УДК 519.852:519.876

Кудін В.І. [1], д.т.н., п.н.с.

Метод базисних матриць та матрична гра у змішаних стратегіях

Проаналізовано зв'язки метода базисних матриць для задачі лінійного програмування та матричної гри у змішаних стратегіях.

Ключові слова: базисна матриця, оптимальна стратегія, оптимальний розв'язок, змішана стратегія.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: V_I_Kudin@mail.ru

V.I.Kudin [1], Dr. Sci.

The method of basic matrix and matrix game with mixed strategies

Analysis of basic matrix methods for linear programming problems and matrix game with mixed strategies is investigated.

Key Words:basic matrix, optimal solution, optimal strategy, mix strategy .

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: V_I_Kudin@mail.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Вступ

В роботах [1-3] встановлено, як побудувати пару двоїстих задач лінійного програмування, розв'язок яких визначає оптимальні стратегії заданої матричної гри. Параметри задач лінійного програмування, що відповідають заданій матричній грі, вибираються в процесі конструктивного доведення основної теореми теорії ігор [1].

Можлива також побудова матричної гри за заданою задачею лінійного програмування.

Введення одного з найважливіших понять теорії ігор - поняття *стратегії* - дозволяє звести найрізноманітніші розгорнуті гри до єдиної стандартної форми, яка називається *нормальною* формою гри.

Стратегією гри [1-3] називається система правил, що однозначно визначають вибір поведінки гравця на кожному ході в залежності від ситуації, що склалася в процесі гри. Гравець, який вибрав стратегію, може не брати участь в грі. За складеною ним інструкцією гру може проводити нейтральна особа.

Кожна фіксована стратегія, яку може обрати гравець, називається його *чистою стратегією*. Чисті стратегії не вичерпують усіх можливостей гравців. Як ми побачимо далі, є ситуації, в яких гравцям доцільно вибирати не чисту стратегію, а частоту, з якою слід використовувати ту чи іншу чисту стратегію в грі. При двох учасниках гра в нормальній формі називається *прямокутною*.

Прямокутна гра з скінченним числом чистих стратегій називається *матричної* грою.

В роботі досліджено властивості методу базисних матриць [4] при аналізі матричної гри у змішаних стратегіях, як двоїстої пари задач лінійного програмування зі своїми структурними особливостями. Встановлено основні співвідношення для елементів методу базисних матриць в двох суміжних базисних матрицях та виявлено особливості обчислень за методом базисних матриць при розв'язанні матричної гри у змішаних стратегіях.

Постановка задачі.

Нехай перший гравець має m стратегій, а другий $-n$. При цьому вважається відомим, що якщо перший гравець вибере i-ю стратегію, а другий - j-ю, виграш першого (і отже програш другого) дорівнює $\|a_{ij}\|$. Матриця $A=\|a_i\|$ $A=\|a_{ij}\|_{i=1,j=1}^{m,n}$ називається *платіжною матрицею* або *матрицею виграшів*.

Зауважимо, що складання платіжної матриці при формалізації реальних конфліктних ситуацій є складною задачею. Підстави для побудови платіжної матриці лежать, взагалі кажучи, поза теорією ігор і відносяться до певного застосування, з яким пов'язана постановка задачі.

Означення 1. Вектор $U = (u_1, u_2, ..., u_m)$, кожна компонента якого вказує відносну частоту (ймовірність), з якою відповідна чиста стратегія використовується в грі, називається *змішаної стратегією* першого гравця.

Набір чисел $W = (w_1, w_2, ..., w_n)$ - змішана стратегія другого гравця.

Ясно, що

$$u_i \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} u_i = 1$$

$$w_j \geq 0,\ j = \overline{1,n},\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1$$

Чиста стратегія може бути визначена як змішана стратегія, в якій всі складові, крім однієї, рівні нулю.

Надалі будемо позначати чисті стратегії обох противників у вигляді одиничних векторів

$$e_i = (\overbrace{\underbrace{0, 0, ..., 0, 1}_{i}, 0, ..., 0}^{m})$$

та $e_j = (\overbrace{\underbrace{0, 0, ..., 0, 1}_{j}, 0, ..., 0}^{n})$ відповідно.

Означення 2. Оптимальна стратегія гравця - це стратегія, що забезпечує йому максимально можливий гарантований середній виграш.

Будь-яка зміна інформації призводить до нової гри, для якої оптимальна лінія поведінки буде іншою.

Властивості оптимальних стратегій матричної гри випливають з основних теоретичних результатів лінійного програмування.

Теорема 1. (Основна теорема теорії ігор [1]). Кожна матрична гра з нульовою сумою має рішення в змішаних стратегіях, тобто існують такі стратегії U^0 та W^0 першого і другого гравця відповідно, що

$$M(U, W^0) \leq v = M(U^0, W^0) \leq M(U^0, W)$$

В процесі доведення основної теореми теорії ігор матричної гри з платіжною матрицею $A = \|a_{ij}\|_{i=1, j=1}^{m,n}$ $(a_{ij} > 0)$ приведена в відповідність наступна пара двоїстих задач лінійного програмування типу (1)-(3) та (4)-(6), які наведені нижче.

Пряма задача:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad (1)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0,\quad j = \overline{1, n}\ . \qquad (3)$$

де $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$. Вважаємо, що модель виду (1)−(3) має матрицю обмежень А в якій кількість стовпців більш ніж рядків (“довга”).

Двоїста задача:

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i u_i\ , \qquad (4)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + ... + a_{m1}u_m \geq c_1; \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + ... + a_{m2}u_m \geq c_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + ... + a_{mn}u_m \geq c_n; \end{cases} \qquad (5)$$

$$u_i \geq 0,\quad (i = \overline{1,m}) \qquad (6)$$

Матрична гра у змішаних стратегіях подається як двоїста пара задач лінійного програмування [2-4].

де $b_i = 1,\ i = \overline{1, m},\ c_j = 1,\ j = \overline{1,n}$.

Задача (4)-(6) є двоїстою або спряженою до задачі (1)-(3), яку називають прямою (основною, початковою).

Положення методу базисних матриць (МБМ)

Без обмеження загальності, при викладенні положень методу будемо розглядати задачу лінійного програмування у вигляді (4)-(6), а саме: ($\max Bu,\ A^T u \leq C^T,\ u \geq 0$).

Для визначеності, будемо вважати, що задача (1)−(3) має n>>m, матриця А обмежень витягнута горизонтально, ранг системи рівним m. Задача виду (4),(5) має n обмежень та m змінних, матриця A^T обмежень витягнута вертикально.

Метод базисних матриць може бути застосований як до задачі (1)-(3 так і до задачі (4)-(6). Виклад положень методу будемо проводити з прив'язкою до структури задачі (4)-(6).

Визначення 2. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати базисною (БМ), а розв′язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0^T = C_б$, де $C_б = (c_{i1}, c_{i2}, ..., c_{im})^T$ - підвектор С базисним (опорним) (БР).

Нехай: β_{ij}, $i, j \in I = \{1,2,...,m\}$ - елементи $A_б$; e_{ri} та $(A_б^{-1})_i$ елементи та i-й стовпець $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ - вектор розвинення нормалі $a_r u_1 \le c_r$ за рядками $A_б$, $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ вектор розвинення нормалі цільової функції (4) за рядками $A_б$; $\Delta_r = a_r u_0^T - c_r$ - нев'язка r-го обмеження (5), а $\Delta_0 = B u_0^T$ - значення цільової функції в вершині u_0, які утворюють вектор $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_n)$; $J_б, J_H$ - множини індексів, відповідно базисних і небазисних обмежень (5).

Всі означені елементи при переході до суміжної $\overline{A}_б$, яка утворюється із A_b заміною її рядка a_k на a_l, що не входить в $A_б$ будемо позначати рискою зверху, тобто $\overline{\beta}_{ij}$, $\overline{\alpha}_r, \overline{L}_i$, $\overline{\Delta}_k$, $\overline{e}_{ri}$, $(\overline{A}_b^{-1})_i$ $\overline{\alpha}_0$.

Нехай $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}$ - нормалі, $a_j u^T \le c_j, j \in J_б$, де $J_б = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ - індекси обмежень, нормалі яких утворюють $A_б$, a_l - вектор-нормалі $\alpha_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, ..., \alpha_{lm})$, $a_l u \le c_l$ - вектор розвинення a_l за рядками $A_б$.

Теорема 2. Між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (5) та цільової функції (4) за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць, базисними розв'язками, нев′язками обмежень (5) та значеннями цільової функції в двох суміжних базисних розв′язках мають місце такі співвідношення

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li},$$
$$r = \overline{0,n}; \ \ i = \overline{1,m}; \ \ i \ne k; \tag{7}$$
$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li},$$
$$r = \overline{1,m}; \ \ i = \overline{1,m}; \ \ i \ne k; \tag{8}$$
$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, \ j = \overline{1,m}, \tag{9}$$
$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \ \ \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l,$$
$$r = \overline{1,n}; \quad r \ne k; \tag{10}$$
$$B\overline{u}_0^T = Bu_0^T - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, \tag{11}$$

причому умовою невиродженості є $\alpha_{lk} \ne 0$, умовою допустимості опорного базисного розв'язку - $\alpha_{lk} < 0$, а умовою зростання цільової функції - $\alpha_{0k} < 0$.

Про особливості елементів методу базисних матриць при дослідженні матричної гри у змішаних стратегіях

Твердження 1. Компоненти вектора розкладу цільової функції задачі лінійного програмування (двоїстої задачі матричної гри) в ході ітерацій методу базисних матриць обчислюються за формулами

$$\alpha_{0i} = \sum_{j=1}^{m} e_{ji}, \ i = \overline{1,m}.$$

Твердження 2. Компоненти вектора розв'язків задачі лінійного програмування (двоїстої задачі матричної гри) в ході ітерацій методу базисних матриць обчислюються за формулами $u_{0i} = \sum_{j=1}^{m} e_{ij}, \ i = \overline{1,m}$.

Доведення. Справедливість тверджень 1,2 витікає з формул (7), (9) та співвідношень

$$A_б u_0 = C_б, \ C_б = (\underbrace{1,1,...,1}_{m})^T,$$

$$u_0 = A_б^{-1} \times C_б, \ C_б = (\underbrace{1,1,...,1}_{m})^T,$$

$$\alpha_0 \times A_б = B, \ B = (\underbrace{1,1,...,1}_{m}),$$

$$\alpha_0 = B \times A_б^{-1}, \ B = (\underbrace{1,1,...,1}_{m})$$

Наслідок 1. Сума елементів векторів стовпців оберненої матриці співпадають із значенням відповідної компоненти вектору розкладу цільової функції за рядками базисної матриці.

Наслідок 2. Сума елементів рядків оберненої матриці співпадають із значенням відповідної компоненти вектору проміжного розв'язку на ітераціях методу базисних матриць.

Доведення. Справедливість тверджень є наслідком властивостей розкладу елементів методу базисних матриць за рядками базисної матриці.

Твердження 3. Для суми елементів стовпців оберненої матриці в двох суміжних базисних матрицях виконуються такі рекурентні співвідношення

$$\sum_{j=1}^{m}\bar{e}_{jk} = \frac{\sum_{j=1}^{m} e_{jk}}{\alpha_{lk}},$$

$$\sum_{j=1}^{m}\bar{e}_{jr} = \sum_{j=1}^{m} e_{jr} - \frac{\sum_{j=1}^{m} e_{jk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},$$

$$r = \overline{1,m};\ \ i = \overline{1,m};\ \ i \neq k .$$

Доведення. Згідно співвідношення

$$\bar{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \bar{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\quad r = \overline{1,m};$$

$i = \overline{1,m};\ i \neq k;$ витікає, що $\bar{e}_k = \dfrac{e_k}{\alpha_{lk}}$,

$$\bar{e}_r = e_r - \frac{e_k}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\quad r = \overline{1,m};\quad i = \overline{1,m};\quad i \neq k .$$

Після проведення по-елементного складання елементів стовпців отримаємо, що

$$\sum_{j=1}^{m}\bar{e}_{jk} = \frac{\sum_{j=1}^{m} e_{jk}}{\alpha_{lk}},$$

$$\sum_{j=1}^{m}\bar{e}_{jr} = \sum_{j=1}^{m} e_{jr} - \frac{\sum_{j=1}^{m} e_{jk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},$$

$$r = \overline{1,m};\ \ i = \overline{1,m};\ \ i \neq k .$$

Твердження 4. Для суми елементів рядків оберненої матриці в двох суміжних базисних матрицях виконуються такі рекурентні співвідношення

$$\sum_{i=1}^{m}\bar{e}_{ri} = \sum_{i=1}^{m} e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\Big(\sum_{i=1,}^{m}\alpha_{li} - 1\Big),\ r = \overline{1,m};$$

Доведення. Згідно співвідношення

$$\bar{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}},$$

$$\bar{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\quad r = \overline{1,m};\quad i = \overline{1,m};\quad i \neq k;$$

витікає, що елементи рядків оберненої матриці знаходяться за співвідношенням для кожного $r = \overline{1,m};$

$$\bar{e}_{r1} = e_{r1} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{l1},\ \bar{e}_{r2} = e_{r2} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{l2},$$

$$\bar{e}_{rk-1} = e_{rk-1} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{lk-1},\qquad \bar{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}},$$

$$\bar{e}_{rk+1} = e_{rk+1} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{lk+1},\ \bar{e}_{rm} = e_{rm} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{lm},$$

тобто для вектор рядка

$$\overline{E}_r = E_r - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}(\alpha_{l1},\alpha_{l2},\alpha_{lk-1},\alpha_{lk} - 1,\alpha_{lk+1},\alpha_{lm-1}\alpha_{lm})$$

. Після сумування елементів рядка отримаємо

$$\sum_{i=1}^{m}\bar{e}_{ri} = \sum_{i=1}^{m} e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\Big(\sum_{i=1,}^{m}\alpha_{li} - 1\Big)$$

Висновок

Було встановлено, що сума елементів стовпців (невід‘ємність) вказує на властивість оптимальності розв'язків, а суми елементів рядків вказують на компоненти розв‘язку задачі. Згадані властивості можна врахувати при побудові алгоритмів на основі методу базисних матриць та встановити ряд властивостей, зокрема оптимальних розв'язків тощо.

Список використаних джерел

1. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* New directions in linear programming. − M. − Sovetskoe radio, − 1969, − 524p. (in Russian).
2. *Dantzig G.B., Thapa M.N.* Linear Programming 1: introduction, Springer, − 1997, − 435p.
3. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* Linear programming/.Theory and methods. −M.: Nauka, − 1963. – 776p. (in Russian).
4. Kudin V. I., Lyashko S.I., Khritonenko N.V., Yatsenko Yu.P. Analysis of the properties of a linear system using the method of artificial basis matrices // Kibernetika i sistemny analiz. — 2007. — N 4. —.P. 119–127 (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 05.04.13