

УДК 627.324.2/3:532.72

Мартинюк П. М.¹, к. ф.-м. н., доц.

Порівняння чисельних розв'язків двовимірних крайових задач сітковими та безсітковими методами

Наведено схему чисельного розв'язання двовимірної нелінійної крайової задачі сітковими та безсітковими методами. Запропоновано структуру класів при об'єктно-орієнтованому програмуванні вказаних методів. Наведено результати чисельних експериментів. Проаналізована залежність похибок наближених розв'язків від значень параметрів форми, видів радіальних базисних функцій та кількості вузлів в геометричній та вузловій сітках.

Ключові слова: похибка, клас, проєкційний метод.

¹ Національний університет водного господарства та природокористування, 33028, м. Рівне, вул. Соборна, 11, e-mail: Martinjuk@ukr.net

P. M. Martinyuk¹, Candidate of physics and mathematics sciences

Comparison of mesh and mesh-free numerical solutions of two-dimensional boundary value problem

The numerical solutions of nonlinear two-dimensional boundary-value problem have been found by the finite element method and the radial basis function method. Classes for object-oriented programming have been offered. The results of numerical experiments have been presented. The influence of shape parameters, class of radial basis functions, and number of nodes in meshes on the values of errors has been analyzed.

Key Words: error, class, projection method.

¹ National University of Water Management and Natural Resources Use, 33028, Rivne, Soborna str., 11, e-mail: Martinjuk@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф. Г.

1. Вступ. Одна із складових процесу чисельного розв'язання крайової задачі – програмна реалізація запропонованих алгоритмів. Але досить часто дана складова в наукових публікаціях, що стосуються математичного моделювання та чисельних методів, залишається в стороні. Одна із цілей даної статті – запропонувати структури даних, які можуть використовуватись при програмній реалізації чисельних методів скінченних елементів (МСЕ) та радіальних базисних функцій (РБФ) в двовимірному випадку. Стаття є продовженням ряду робіт вказаного напрямку [1, 2]. Як і в попередніх публікаціях, викладки проведемо на прикладі нелінійної крайової задачі, якою описується математична модель фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу тепло-масопереносу [1, 2].

І МСЕ, і метод РБФ відносяться до одного класу проєкційних методів [3]. Однак, між ними існує дві важливі відмінності. МСЕ відноситься до класу сіткових методів і дозволяє знаходити наближений узагальнений розв'язок крайової задачі [3, 4]. В той же час метод РБФ [5] є одним

із цілої групи безсіткових проєкційних методів і дозволяє шукати класичний наближений розв'язок, оскільки побудований на основі методу колокації в точці.

В роботах [1, 2] проведено порівняння наближених розв'язків крайових задач різними чисельними методами: методом скінченних різниць, МСЕ та методом РБФ. Однак у вказаних роботах для відображення похибок використовувалась або максимальна відносна похибка, або візуальне графічне представлення різниці двох чисельних розв'язків. Такі дані не в повній мірі відображають співвідношення наближених розв'язків. Дана стаття покликана ліквідувати вказану прогалину через застосування похибок інших видів.

2. Постановка задачі та її математична модель. Розглянемо процес фільтраційної консолідації масиву двофазного ґрунту під впливом миттєво прикладеного рівномірного зовнішнього навантаження інтенсивністю q в двовимірному випадку. Згідно [1, 2] математичну модель задачі фільтраційної консолідації масиву ґрунту в умовах фільтрації сольових розчинів в

неізотермічному режимі при урахуванні повзучості скелета ґрунту можна описати наступною крайовою задачею:

$$a_0 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + (a_0 + a_1) \beta_1 \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma} \times \\ \times \nabla \cdot \left(\beta_1 (\mathbf{K}_h(c, T) \nabla h - \mathbf{K}_c \nabla c - \mathbf{K}_T \nabla T) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{K}_h(c, T) \nabla h - \mathbf{K}_c(c) \nabla c - \mathbf{K}_T \nabla T] \right), \quad (1)$$

$$\mathbf{X} = (x, y) \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}_c(c, T) \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - \mathbf{u} \nabla c + \\ + \gamma_1 (C_m - c) = n \frac{\partial c}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho c_p \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} - e \mathbf{v} = -\mathbf{K}_h(c, T) \nabla h + \mathbf{K}_c \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \quad (4)$$

$$\mathbf{q}_c = c \mathbf{u} - \mathbf{D}_c(c, T) \nabla c - \mathbf{D}_T \nabla T, \quad (5)$$

$$\mathbf{q}_T = \rho c_p T \mathbf{u} - \lambda \nabla T, \quad (6)$$

$$h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1^{(h)}} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(h)}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(h)}} = 0, \quad (7)$$

$$c(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1^{(c)}} = C_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(c)}, \quad (\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(c)}} = 0, \quad (8)$$

$$T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1^{(T)}} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(T)}, \quad (\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(T)}} = 0, \quad (9)$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = h_0(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X}, 0) = c_0(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \\ \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial h_0}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad (11)$$

де $C_1(t)$, $T_1(t)$, $H_1(t)$, $h_0(\mathbf{X})$, $c_0(\mathbf{X})$, $T_0(\mathbf{X})$ - задані функції; $\Gamma_1^{(h)} \cup \Gamma_2^{(h)} = \Gamma$, $\Gamma_1^{(h)} \cap \Gamma_2^{(h)} = \emptyset$; $\Gamma_1^{(c)} \cup \Gamma_2^{(c)} = \Gamma$, $\Gamma_1^{(c)} \cap \Gamma_2^{(c)} = \emptyset$; $\Gamma_1^{(T)} \cup \Gamma_2^{(T)} = \Gamma$, $\Gamma_1^{(T)} \cap \Gamma_2^{(T)} = \emptyset$. Тут використано такі позначення: $h(\mathbf{X}, t)$ - надлишкові напори; $c(\mathbf{X}, t)$ - концентрація порового сольового розчину; $T(\mathbf{X}, t)$ - температура; $\mathbf{K}_h(c, T) = \{k_h^{(ij)}\}_{i,j=1}^{2;2}$, $\mathbf{K}_c = \{k_c^{(ij)}\}_{i,j=1}^{2;2}$, $\mathbf{D}_c(c, T) = \{D_c^{(ij)}\}_{i,j=1}^{2;2}$, $\mathbf{D}_T = \{D_T^{(ij)}\}_{i,j=1}^{2;2}$, $\mathbf{K}_T = \{k_T^{(ij)}\}_{i,j=1}^{2;2}$, $\lambda = \{\lambda^{(ij)}\}_{i,j=1}^{2;2}$ - відповідно коефіцієнти фільтрації, хімічного осмосу, конвективної дифузії, термодифузії, термоосмосу та ефективної теплопровідності вологого ґрунту; \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{q}_c , \mathbf{q}_T - швидкості фільтрації сольового розчину та руху твердих частинок ґрунту, потоки розчинених солей і тепла, відповідно; a_0 , a_1 , β_1 - параметри повзучості скелета ґрунту; ρ , c_p -

густина та питома теплоємність порового розчину; c_T - об'ємна теплоємність ґрунту за постійного об'єму; t - час; e - коефіцієнт пористості; ξ - коефіцієнт стисливості ґрунту; γ - питома вага сольового розчину; n - пористість ґрунту; γ_1 - константа швидкості масообміну; C_m - концентрація граничного насичення.

3. Чисельне розв'язання методом РБФ. При застосуванні методу РБФ існує проблема з недостатньою точністю апроксимації граничних умов другого та третього родів. Для вирішення вказаної проблеми в двовимірному випадку використовуємо підхід, запропонований в [6]. Згідно вказаного методу множини вузлових та колокаційних точок є різними. Причому, вузлові точки є лише внутрішніми.

Для застосування методу РБФ покриємо область Ω вузловими точками $\mathbf{X}_j = (x_j^{(x)}; y_j^{(x)})$, $j = \overline{1, N}$. Наближений розв'язок крайової задачі (1)-(11) шукаємо у вигляді

$$h(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^N a_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_j^{(h)}), \\ c(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^N b_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_j^{(c)}), \quad (12) \\ T(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^N s_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_j^{(T)}),$$

де $a_j(t)$, $b_j(t)$, $s_j(t)$, $j = \overline{1, N}$, - невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу; φ_j - відомі РБФ, причому $r_j = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_j\|_2 = \sqrt{(x - x_j^{(x)})^2 + (y - y_j^{(x)})^2}$; $\varepsilon_j^{(h)} > 0$, $\varepsilon_j^{(c)} > 0$, $\varepsilon_j^{(T)} > 0$ - параметри форми, які також залежать від координат вузлів \mathbf{X}_j , $j = \overline{1, N}$.

Замикання $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ області Ω покриємо колокаційними точками $\mathbf{Y}_i = (x_i^{(y)}; y_i^{(y)})$, $i = \overline{1, M}$. Нехай $\omega = \{i: \mathbf{Y}_i \in \Omega\}$, $\gamma_1^{(h)} = \{i: \mathbf{Y}_i \in \Gamma_1^{(h)}\}$, $\gamma_2^{(h)} = \{i: \mathbf{Y}_i \in \Gamma_2^{(h)}\}$. Аналогічно визначаємо множини номерів колокаційних точок $\gamma_1^{(c)}$, $\gamma_2^{(c)}$, $\gamma_1^{(T)}$, $\gamma_2^{(T)}$.

Використовуючи метод колокації у точці, з рівнянь (1)-(3), граничних і початкових умов (7)-(11) отримуємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь [2]

$$\mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{S} = \mathbf{F}^{(3)},$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{B}(t) = \mathbf{G}^{(2)} \cdot \mathbf{S}(t) + \mathbf{F}^{(2)}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{(1)} \cdot \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} + \mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{B}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{A}(t) = \\ = \mathbf{G}^{(1)} \cdot \mathbf{B}(t) + \mathbf{G}'^{(1)} \cdot \mathbf{S}(t) + \mathbf{M}^{(12)} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \\ + \mathbf{M}^{(13)} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt} + \mathbf{F}^{(1)}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(0)} \cdot \frac{d\mathbf{A}^{(0)}}{dt} + \mathbf{L}^{(0)}(\mathbf{B}^{(0)}, \mathbf{S}^{(0)}) \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \\ = \mathbf{G}^{(0)} \cdot \mathbf{B}^{(0)}(t) + \mathbf{G}'^{(0)} \cdot \mathbf{S}^{(0)}(t) + \mathbf{F}^{(0)}, \\ \tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{B}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \\ \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \cdot \mathbf{S}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \end{aligned} \quad (15)$$

де $\mathbf{A}(t) = \{a_i(t)\}_{i=1}^N$, $\mathbf{B}(t) = \{b_i(t)\}_{i=1}^N$,
 $\mathbf{S}(t) = \{s_i(t)\}_{i=1}^N$, $\mathbf{A}^{(0)} = \{a_i(0)\}_{i=1}^N$, $\mathbf{B}^{(0)} = \{b_i(0)\}_{i=1}^N$,
 $\mathbf{S}^{(0)} = \{s_i(0)\}_{i=1}^N$, $\mathbf{M}^{(k)} = \{m_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{M,N}$, $\mathbf{L}^{(k)} = \{l_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{M,N}$,
 $\mathbf{F}^{(k)} = \{f_i^{(k)}\}_{i=1}^M$, $\tilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \{\tilde{m}_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{M,N}$, $\tilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \{\tilde{f}_i^{(k)}\}_{i=1}^M$,
 $k = \overline{0,3}$, $\mathbf{G}^{(k)} = \{g_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{M,N}$, $\mathbf{G}'^{(k)} = \{g'_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{M,N}$,
 $k = \overline{0,2}$, $\mathbf{Q}^{(1)} = \{q_{ij}^{(1)}\}_{i,j=1}^{M,N}$. Визначення елементів

матриць вказаної задачі Коші є однотипним, але досить громіздким [2]. Так, наприклад для рівняння теплопровідності маємо

$$\begin{aligned} m_{ij}^{(3)} = c_T \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)}), \quad i \in \omega; \quad \tilde{m}_{ij}^{(3)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)}), \\ \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(\mathbf{Y}_i), \quad i = \overline{1, M}; \\ l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)})) + \rho c_p \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)}), & i \in \omega; \\ (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)}) - \rho c_p \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)})) \cdot \mathbf{n}, & i \in \gamma_2^{(T)}; \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)}), & i \in \gamma_1^{(T)}; \end{cases} \\ f_i^{(3)} = \begin{cases} 0, & i \in \omega; \\ 0, & i \in \gamma_2^{(T)}; \\ T_1(\mathbf{Y}_i, t), & i \in \gamma_1^{(T)}; \end{cases} \quad r_{ji} = \|\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_j\|_2. \end{aligned}$$

4. Застосування МСЕ. Наближений узагальнений розв'язок задачі (1)-(11) згідно МСЕ шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} h(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^M a_j(t) \varphi_j(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^M b_j(t) \varphi_j(\mathbf{X}), \\ T(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^M s_j(t) \varphi_j(\mathbf{X}), \end{aligned} \quad (17)$$

де $\varphi_j(\mathbf{X})$ - базисні функції МСЕ. Використовуючи стандартний підхід [1, 3, 4],

отримаємо задачу Коші (13)-(16), де, наприклад, для рівняння теплопровідності маємо

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{ij}^{(3)} = \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{X}) \varphi_j(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad \tilde{f}_i^{(3)} = \int_{\Omega} T_0(\mathbf{X}) \varphi_i(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, \\ m_{ij}^{(3)} = \begin{cases} c_T \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{X}) \varphi_j(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, & i \in \omega \cup \gamma_2^{(T)}; \\ 0, & i \in \gamma_1^{(T)}; \end{cases} \\ l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} \int_{\Omega} (\lambda \nabla \varphi_i(\mathbf{X}) + \rho c_p \varphi_i(\mathbf{X}) \mathbf{u}) \nabla \varphi_j(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, & i \in \omega \cup \gamma_2^{(T)}; \\ 1, & i \in \gamma_1^{(T)}, i = j; \\ 0, & i \in \gamma_1^{(T)}, i \neq j; \end{cases} \\ f_i^{(3)} = \begin{cases} T_1(\mathbf{X}_i, t), & i \in \gamma_1^{(T)}; \\ 0, & i \in \omega \cup \gamma_2^{(T)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Наближений розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь (13), (14) можна знайти, наприклад, за допомогою лінеаризованої повністю неявної різницевої схеми [7]. Детальніше можливі схеми дискретизації в часі наведено в роботах [1, 2].

5. Похибки. В роботах [1, 2] для оцінки якості співпадання двох наближених розв'язків $u_1(\mathbf{X}, t)$, $u_2(\mathbf{X}, t)$ (при $t = t_s = s \cdot \tau$) крайової задачі використана лише максимальна відносна похибка

$$\max_{1 \leq i \leq M} \frac{|u_1(\mathbf{X}_i, t_s) - u_2(\mathbf{X}_i, t_s)|}{|u_1(\mathbf{X}_i, t_s)|} 100\% \quad (\text{при умові}$$

$u_1(\mathbf{X}_i, t_s) \neq 0$). В якості дискретної множини точок \mathbf{X}_i вибирались, як правило, вузли в МСЕ. Окрім вказаної, можна використати ще наступні оцінки для похибок: середня відносна похибка

$$\bar{v}^{(s)} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M v_i^{(s)}, \quad \text{де } v_i^{(s)} = \frac{|u_1(\mathbf{X}_i, t_s) - u_2(\mathbf{X}_i, t_s)|}{|u_1(\mathbf{X}_i, t_s)|} 100\%$$

- відносна похибка у вузлі \mathbf{X}_i на часовому шарі під номером s ; середньоквадратична відносна

$$\text{похибка } v^{(s)} = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (v_i^{(s)})^2}.$$

6. Структури даних. В двовимірному випадку в МСЕ найчастіше використовуються трикутні скінченні елементи [3, 4, 8]. Тоді, при програмній реалізації МСЕ доцільно використати клас «трикутний скінченний елемент», який містить *властивості*

- номер скінченного елемента: натуральне число;
- степінь базисних функцій (від степеня залежить кількість вузлів): натуральне число s ;
- координати вузлів: два двовимірні динамічні масиви розмірності $s \times k$, які складаються з дійсних чисел. Перший масив відповідає

координаті x , а другий - y . Для задання координат вузлів може бути використаний окремий клас «точка» та його об'єкти;

- номери вузлів: двовимірний динамічний масив розмірності $s \times k$, який складається з натуральних чисел. Нумерація вузлів є наскрізною;

методи

- конструктор: завдання конструктора – виділення пам'яті при створенні об'єкта під використанням в класі динамічні масиви;

- базисна функція: функція, яка повертає дійсне число і вхідними параметрами якої є степінь, координати точки $\mathbf{X}=(x; y)$ (дійсні числа) та внутрішній номер номера вузла, який власне і вказує для якого вузла потрібно обчислювати базисну функцію. Для скінченного елемента степеня s внутрішні номери – це номери від 1 до k його вузлів у відповідному динамічному масиві в додатному напрямку обходу;

- перша частинна похідна базисної функції по x : аналогічний методу «базисна функція»;

- перша частинна похідна базисної функції по y : аналогічний методу «базисна функція»;

- другі частинні похідні базисної функції $\varphi_{xx}(x, y)$, $\varphi_{xy}(x, y)$, $\varphi_{yy}(x, y)$: аналогічні методу «базисна функція». Необхідність в других похідних обумовлюється можливістю застосування стабілізаційних схем МСЕ.

Задача розбиття області на трикутні скінченні елементи є самостійною складною проблемою. Вказана задача не є цілком даною статті і ми рекомендуємо для читача [8].

Самі скінченні елементи являють собою динамічний масив, який складається із об'єктів відповідного класу.

В методі РБФ за основну структуру даних можна запропонувати клас «вузол», який містить *властивості*

- номер вузла: натуральне число;

- координати вузла: два дійсних числа - x та y ;

- параметр форми: дійсне додатне число;

- радіус компактного носія: дійсне додатне число;
методи

- радіальна базисна функція: функція, яка повертає дійсне число і вхідними параметрами якої є координати точки $\mathbf{X}=(x; y)$ (дійсні числа) та вид РБФ, який відображається натуральним числом або рядком символів;

- перша похідна РБФ: функція, аналогічна попередньому методу;

- друга похідна РБФ: функція, аналогічна методу «радіальна базисна функція».

Метод РБФ, який розглядається в даній статті, побудований на основі методу колокації в точці. Тому ще однією структурою даних, яка використовується в методі РБФ має бути клас «колокаційна точка», який містить *властивості*

- номер колокаційної точки: натуральне число;

- координати колокаційної точки: два дійсних числа;

- показник належності до внутрішності області чи межі: ціле невід'ємне число або масив чисел. Необхідність в заданні даного показника полягає в наступному. У внутрішній колокаційній точці має виконуватись відповідне диференціальне рівняння. В граничній колокаційній точці має виконуватись гранична умова першого, другого або третього родів.

Також відмітимо, що обидва класи «вузол» і «колокаційна точка» можуть бути похідними від одного батьківського класу – «точка». Як властивості вказаного батьківського класу можна розглядати координати точки та її номер.

Із класу нескінченно-диференційовних радіальних базисних функцій (РБФ) найбільшого вжитку набула мультіквадратична

$\varphi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$ [5, 9]. Тут $\varepsilon > 0$ - константа, яку називають параметром форми; $r = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_c\|_2$

- відстань до зафіксованої точки-центру $\mathbf{X}_c = (x_c; y_c)$. Також останнім часом широко використовуються РБФ з компактним носієм [10].

7. Результати чисельних експериментів та висновки. Розглянемо двовимірну задачу фільтраційної консолидації масиву однорідного ізотропного ґрунту прямокутної форми при $a = 5\text{ м}$, $b = 10\text{ м}$, $l = 10\text{ м}$ (рис. 1). Припустимо, що навантаження інтенсивністю $q = 10^5 \text{ Н/м}^2$ прикладене миттєво. Межі Γ_2 та Γ_3 непроникні, а межі Γ_1 , Γ_3 дренавані. Межі Γ_4 та Γ_6 є межами симетрії.

Початковий розподіл концентрації солей візьмемо у вигляді

$$c_0(x, y) = \begin{cases} C_m, & (x, y) \in \Gamma_1; \\ 8z/l, & (x, y) \notin \Gamma_1; \end{cases}$$

а температури

$$T_0(x, y) = \begin{cases} 30^\circ \text{ C}, & (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3; \\ 4^\circ \text{ C}, & (x, y) \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_3. \end{cases}$$

Значення решти вхідних даних наступні:

$$k_{11}^{(c)} = k_{22}^{(c)} = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}, \quad e = 0,7,$$

$$\xi = 0,75, D_{11}^{(c)} = D_{22}^{(c)} = 0,02 \text{ м}^2 / \text{доба},$$

$$k_{11}^{(T)} = k_{22}^{(T)} = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{град} \cdot \text{доба},$$

$$\rho = 1100 \text{ кг} / \text{м}^3, \lambda_{11} = \lambda_{22} = 108 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба},$$

$$a_0 = 0 \text{ м}^2 / \text{Н}, a_1 = 5,12 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{Н},$$

$$\beta_1 = 10^4 \text{ доба}^{-1}, c_p = 4,2 \text{ кДж} / \text{кг} \cdot \text{град},$$

$$C_m = 160 \text{ г} / \text{л}, c_T = 2137 \text{ кДж} / \text{м}^3 \cdot \text{град}.$$

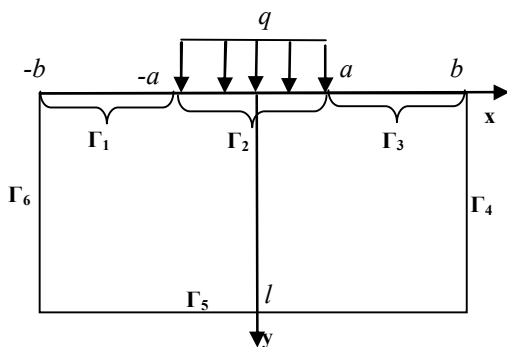


Рис.1. Фільтраційна консолидація масиву ґрунту

Коефіцієнт фільтрації чистої води при $T = 20^\circ \text{C}$ дорівнює $10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{доба}}$. Залежність коефіцієнта фільтрації $k_h = k(c, T)$ визначалася шляхом апроксимації функції $k(c, T)$ радіальними базисними функціями [9] за експериментальними даними, які наведені в [2].

Для дискретизації в часі використано повністю неявну лінеаризовану різницеву схему [1, 2, 7] з кроком $\tau = 10$ діб.

Результати чисельних експериментів наведені на рис. 2 при $t = 300$ діб та у таблицях 2-4. В таблиці 1 наведено параметри чисельних експериментів. Рядки в таблиці 1 відповідають номеру чисельного експерименту. Номери стовпців мають наступні значення: 1 – використана РБФ (МКВ – мультіквадратична, КН – з компактним носієм, зокрема

$$\varphi^{[\alpha]}(r) = \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)_+^6 \left(35 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 + 18 \frac{r}{\alpha} + 3\right), \quad \alpha > 0,$$

$$(1-r)_+ = \begin{cases} 1-r, & 0 \leq r \leq 1; \\ 0, & r > 1. \end{cases};$$

2 – кількість вузлів в МСЕ; 3 – кількість вузлів в методі РБФ; 4 – кількість колокаційних точок в методі РБФ. В МСЕ використано квадратичні базисні функції. В табл. 2-4 рядки відповідають номерам чисельних

експериментів, а стовпці мають наступні значення: 1 – максимальна відносна похибка (%); 2 – середня відносна похибка (%); 3 – середньоквадратична відносна похибка (%).

Як видно з рис. 2, найбільші абсолютні похибки виникають в околах кутових точок прикладеного навантаження. В цих точках відбувається «стик» меж, на яких для шуканих функцій задаються граничні умови різних типів. Оскільки метод РБФ використаного типу (на основі методу колокації в точці) дозволяє шукати наближений класичний розв'язок, то, можливо, в околах кутових точок цей розв'язок не володіє потрібним запасом диференційованості. Саме цим можна пояснити найбільші похибки в околах вказаних точок.

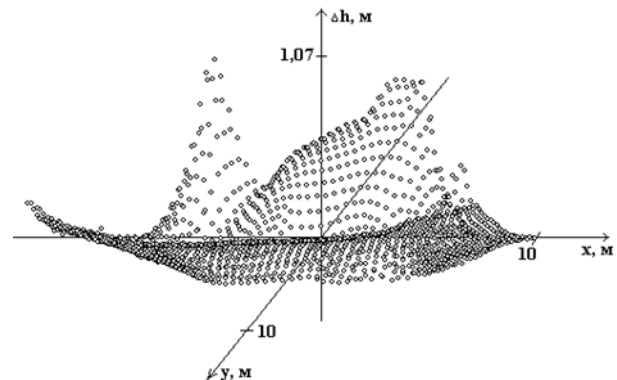


Рис.2. Розподіл різниці надлишкових напорів у масиві ґрунту

Таблиця.1.

Параметри чисельних експериментів

№	1	2	3	4
1	МКВ, $\varepsilon = 2$	1695	808	1695
2	МКВ, $\varepsilon = 2$	2139	1024	2139
3	МКВ, $\varepsilon = 1$	2139	1024	2139
4	МКВ, $\varepsilon = 3$	2139	1024	2139
5	КН, $\alpha = 10$	1695	808	1695
6	КН, $\alpha = 10$	2139	1024	2139
7	КН, $\alpha = 10$	2878	1017	2878

Як видно з табл. 2-4 на величини похибок значно впливає параметр форми (при використанні мультіквадратичної РБФ). При цьому максимальні відносні похибки можуть сягати значних величин. Тому при наявності кутових точок більш інформативними є середня відносна та середньоквадратична відносна похибки. Збільшення кількості вузлових та колокаційних точок не завжди приводить до зменшення похибки. В той же час, при використанні РБФ з компактним носієм спостерігається тенденція до зменшення похибок при зростанні кількості вузлових та колокаційних

точок. При збільшенні радіуса компактного носія – похибки зменшуються, а при зменшенні – збільшуються.

Таблиця.3.

Похибки для напорів

№	1	2	3
1	31,67	7,65	10,48
2	32,55	8,28	10,95
3	29,68	9,27	11,62
4	39,39	9,15	12,77
5	27,30	4,64	5,75
6	24,84	3,91	4,96
7	23,58	3,00	4,57

Таблиця.2.

Похибки для концентрації солей

№	1	2	3
1	63,19	12,80	18,08
2	66,24	9,73	12,98
3	49,16	8,69	12,95
4	91,52	16,35	22,95
5	68,91	10,39	16,66
6	65,02	10,08	16,44
7	63,15	10,02	16,24

Таблиця 4.

Похибки для температури

№	1	2	3
1	20,39	4,98	6,10
2	19,65	5,03	5,99
3	19,90	7,69	9,23
4	19,67	5,28	6,51
5	30,22	12,43	13,93
6	27,63	11,66	13,13
7	26,34	11,28	12,66

Отже, в даній статті порівняно чисельні розв'язки згідно методу РБФ та МСЕ. Показано, що максимальна відносна похибка не завжди може виступати критерієм для оцінки співпадання наближених розв'язків різними чисельними методами. Подальшого розвитку та розробки вимагають: 1) безсіткові методи для відшукування наближеного узагальненого розв'язку; 2) ефективні та стійкі методи розв'язання великих СЛАР.

Список використаних джерел

1. *Vlasyuk A. P., Martinyuk P. M.* Mathematical modeling of soil filtration consolidation under filtration of saline fluid in unisothermal conditions. – Rivne: NUVGP, 2008. – 416 p. (in Ukrainian).
2. *Vlasyuk A. P., Martinyuk P. M.* Numerical solution of consolidation problem and filtration destruction of soil in conditions of heat and mass transfer by radial basis functions method. – Rivne: NUVGP, 2010. – 277 p. (in Ukrainian).
3. *Marchuk G. I., Agoshkov V. I.* Introduction to the projection meshes methods. - Moscow: Nauka, 1981. – 416 p. (in Russian).
4. *Savula Y. G.* Number analysis of mathematical physics problems by variation methods. – L'viv: Ivan Franko LNU, 2004. – 222 p. (in Ukrainian).
5. *Kansa E. J.* Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations // *Comput. Math. Appl.* – 1990. - 19. – Pp. 147-161.
6. *Zhang X., Liu X.-H., Song K.-Z., Lu M.-W.* Least-squares collocation meshless method // *Int. J. Numer. Methods Engin.* – 2001. - Vol.51. - P. 1089-1100.
7. *Samarskiy A. A., Gulin A. V.* Numerical methods of mathematical physics. – Moscow: Nauchniy mir, 2003. – 316 p (in Russian).
8. *Frey P. J.* Mesh generation / P. J. Frey, P.-L. George. – Wiley-ISTE, 2010. – 814 p.
9. *Iske A.* Radial basis functions: basics, advanced topics and meshfree methods for transport problems // *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino.* –2003. -Vol. 61, 3.– Pp.247-284.
10. *Wendland H.* Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree // *Adv. Comput. Math.* - 1995. - Vol. 4. - P. 389-396.

Надійшла до редколегії 27.02.13