УДК 539.374

Морозов Н. Ф.[1], академик РАН,
Беляев А. К.[2], д. ф.-м. н.,
Ильин Д. Н.[1], аспирант

Параметрический резонанс в задаче Ишлинского о скачкообразном продольном нагружении стержня

Решена задача о динамической устойчивости стержня в случае скачкообразной продольной нагрузки с помощью метода разложения в ряд по формам продольных и изгибных колебаний. Продольные колебания проявляются в виде продольных периодических сил, вызывающих параметрический резонанс. Подход демонстрируется на примере шарнирно опертого стержня, к концу которого скачком приложена осевая сила. Построены области неустойчивости, вид которых зависит от спектральных свойств продольных и изгибных колебаний, величины демпфирования и продольной силы. Получено выражение для критической динамической скачкообразной нагрузки, приводящей к параметрическому резонансу.

Ключевые слова: параметрический резонанс, продольные и изгибные колебания, уравнение Матье.

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
e-mail: morozov@nm1016.nm.spb.edu, dimakrechet@mail.ru
[2] Институт проблем машиноведения РАН, 199178, г. Санкт-Петербург, В.О., Большой пр., 61
e-mail: vice.ipme@gmail.com

N. F. Morozov[1], Academician of RAS,
A. K. Belyaev[2], Dr. Sci. (Phys.-Math.),
D. N. Iliin[1], PhD student

Parametric resonance in the Ishlinsky problem of axial jump loading of rod

The problem of the dynamic stability of the rod subjected to a jump longitudinal load is solved with the help of method of series expansion of displacements in terms of longitudinal and bending vibration modes. Longitudinal oscillations are manifested in the form of longitudinal periodic forces that cause a parametric resonance. The approach is demonstrated by the example of simply supported rod, whose end is subjected to an axial jump force. The instability regions are shown to have the form depending upon the spectral properties of the longitudinal and bending vibrations, damping values and axial force. An expression for the critical dynamic load jump leading to a parametric resonance is derived.

Key Words: parametric resonance, axial and bending vibrations, Mathieu equation.

[1] St. Petersburg State University,
199034, St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7-9
e-mail: morozov@nm1016.nm.spb.edu, dimakrechet@mail.ru
[2] Institute for Problems in Mechanical Engineering, RAS, 199178, V.O., Bolshoy pr., 61
e-mail: vice.ipme@gmail.com

Впервые задача о динамических формах потери устойчивости шарнирно опертой балки при внезапном приложении продольной нагрузки рассмотрена в статье А. Ю. Ишлинского и М. А. Лаврентьева [1]. В ней приняты предположения о начальной погиби балки и о том, что внешняя сжимающая сила, приложенная к концу балки, мгновенно охватывает всю балку и затем остается постоянной. Показано, что наибольшим темпом нарастания стрелы прогиба будут обладать не те формы, которые соответствуют значению статической критической силы, а формы с меньшим номером. Например, показано, если внезапно приложена нагрузка, являющая критической для третьей искривленной равновесной формы, то наибольший темп будет иметь вторая равновесная форма и т. д. Постановка задачи статьи [1] имеет ограничения, что приводит, в частности, к следующему:

1) вывод о наибольшем темпе нарастания какой-то формы утрачивает значение для устойчивости стержня если, например, эта форма вообще не представлена в начальной погиби;

2) продольные волновые процессы в балке не учитываются.

Дальнейшее развитие предложено в статье [2], где анализ динамики стержня проведен с учетом появления продольных волн, вызванных скачком осевой силы.

В настоящей работе рассматривается задача о динамической устойчивости стержня в случае скачкообразной продольной нагрузки. Предлагается систематическое применение метода разложения в ряд по формам продольных и изгибных колебаний. Продольные колебания приводят к появлению периодических продольных сил, вызывающих неустойчивые изгибные колебания, известные как параметрический резонанс [3].

Области динамической неустойчивости

Рассматривается шарнирно опертый стержень постоянного сечения, к концу $x = l$ которого в момент времени $t = 0$ скачком приложена осевая сила P_0. Предполагаются чисто упругие продольные колебания. Тогда продольное смещение $u(x, t)$ ищем в виде ряда по формам собственных колебаний $u_k(x)$:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)q_k(t), \quad u_k(x)=\sin\frac{\omega_k}{a}x,$$
$$\omega_k=\frac{\pi a}{2l}(2k-1), \quad a=\sqrt{E/\rho},$$

где ω_k – собственные частоты, E и ρ – модуль Юнга и плотность материала стержня. С учетом нулевых начальных условий получаем выражения для обобщенной координаты продольных колебаний

$$q_k(t)=(-1)^{k+1}\frac{2a^2P_0}{lEF\omega_k^2}(1-\cos\omega_k t) \quad (1)$$

и для продольной силы в виде ряда

$$P(x,t)=EF\frac{\partial u}{\partial x}=$$
$$=\frac{4}{\pi}P_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}(1-\cos\omega_k t)\cos\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{x}{l}, \quad (2)$$

где F – площадь поперечного сечения стержня.

Уравнение поперечных колебаний стержня с учетом трения по модели Кельвина – Фойгта имеет вид

$$E\left(1+\gamma\frac{\partial}{\partial t}\right)I\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial}{\partial x}\left(P(x,t)\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. \quad (3)$$

Здесь $w(x, t)$ – прогиб, I и F – момент инерции и площадь поперечного сечения стержня, γ – коэффициент вязкости. Необходимость введения вязкости в модель поперечных колебаний вызвана тем, что демпфирование оказывает решающее влияние на форму областей неустойчивости при малых амплитудах продольной силы [3].

Поперечное смещение $w(x, t)$ представим в виде разложения по формам изгибных колебаний:

$$w(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}Q_m(t)\sin\frac{m\pi x}{l}. \quad (4)$$

Подставляя представление для продольной силы (4) в уравнение (3), методом Галеркина получаем уравнения для обобщенной координаты $Q_m(t)$:

$$\rho F\frac{l}{2}\ddot{Q}_j(t)+EI\frac{j^4\pi^4}{l^4}\frac{l}{2}\left[\gamma\dot{Q}_j(t)+Q_j(t)\right]-$$
$$-EF\frac{\pi^2}{8l^2}\left[\sum_m m\sum_k(2k-1)\alpha_{mk}q_k(t)Q_m(t)\right]=0, \quad (5)$$

где α_{kmj} зависит от номера k продольной формы колебаний и номеров j и m поперечных форм.

Система уравнений (5) представляет собой бесконечную систему связанных дифференциальных уравнений. Как видно из третьего слагаемого в уравнениях (5), представляющего собой двойной ряд, обобщенные координаты изгибных колебаний $Q_j(t)$ зависят от коэффициентов продольного разложения $q_k(t)$, равно как и от других обобщенных координат коэффициентов изгибных колебаний $Q_m(t)$, что отражает влияние поперечных форм колебаний друг на друга.

Пренебрежем влиянием изгибных форм друг на друга, тогда в двойном ряде остается только слагаемое, для которого $m = j$. В этом случае приходим к системе несвязанных уравнений для поперечных колебаний, каждое из которых описывает влияние продольной формы колебаний (с номером k) на рассматриваемую поперечную (с номером m). Система уравнений (5) принимает вид

$$EI\frac{m^4\pi^4}{l^4}\frac{l}{2}Q_{mk}(t)+E\gamma I\frac{m^4\pi^4}{l^4}\frac{l}{2}\dot{Q}_{mk}(t)-$$
$$-EF\frac{\pi^2 m(2k-1)\alpha_{mk}}{8l^2}q_k(t)Q_{mk}(t)+\rho F\frac{l}{2}\ddot{Q}_{mk}(t)=0.$$

Здесь нижние индексы у Q_{mk}, $k,m = 1, 2, 3, ...$ соответствуют номеру m поперечной формы колебаний и номеру k продольной формы, влияние которой рассматривается.

Подставляя в последнее уравнение явное выражение для $q_k(t)$ из (1), получаем

$$\ddot{Q}_{mk}+\frac{E\gamma I\pi^4 m^4}{\rho Fl^4}\dot{Q}_{mk}+\left(\frac{EI\pi^4}{\rho Fl^4}m^4+\right.$$
$$\left.+(-1)^k\frac{2m\alpha_{mk}}{2k-1}\frac{P_0}{\rho Fl^2}(1-\cos\omega_k t)\right)Q_{mk}=0. \quad (6)$$

Это уравнение позволяет выяснить, при каких значениях нагрузки P_0 рассматриваемая поперечная форма колебаний (с номером m) станет неустойчивой под действием продольной формы колебаний (с номером k). Перепишем его в виде, принятом при исследовании параметрической неустойчивости [3]:

$$\ddot{Q}_{mk} + 2\delta_{mk}\Omega_{mk}\dot{Q}_{mk} + \Omega_{mk}^2\left(1 - 2\mu_{mk}\cos\theta t\right)Q_{mk} = 0\,, \quad (7)$$

где

$$\Omega_{mk}^2 = \frac{EI\pi^4}{\rho F l^4}m^4 + (-1)^k\frac{2m\alpha}{2k-1}\frac{P_0}{\rho F l^2}\,,$$

$$\delta_{mk} = \frac{E\gamma I\pi^4 m^4}{2\rho F l^4\Omega_{mk}}\,,\quad \theta = \omega_k\,,$$

$$\mu_{mk} = \frac{(-1)^{k+1}\alpha P_0}{EI\pi^4 m^3(2k-1) + (-1)^k 2\alpha l^2 P_0}\,. \quad (8)$$

Перед тем, как перейти к нахождению границ областей параметрической неустойчивости, заметим, что они существуют только при условии $\Omega_{mk}^2 > 0$. Если же $\Omega_{mk}^2 \le 0$, то решение уравнения вида (7) будет неограниченно возрастающим даже при $\mu_{mk} = 0$, то есть соответствующая поперечная форма колебаний будет неустойчивой. Таким образом, критическое значение нагрузки для рассматриваемой поперечной формы колебаний при влиянии на нее определенной продольной формы может быть найдено из условия

$$\frac{EI\pi^4}{\rho F l^4}m^4 + (-1)^k\frac{2m\alpha}{2k-1}\frac{P_0}{\rho F l^2} \le 0\,. \quad (9)$$

При $\Omega_{mk}^2 > 0$ уравнение (7) является уравнением Матье с затуханием. Известно [3], что влияние затухания, практически несущественное для главной области неустойчивости, делает побочные области нереализуемыми в инженерной практике. Исходя из данного замечания, ограничимся рассмотрением только главной области динамической неустойчивости.

Главные области неустойчивости поперечных форм колебаний на плоскости параметров (P_0, θ) задаются системами неравенств в форме, принятой в [3]:

$$2\Omega\sqrt{1-\sqrt{\mu^2 - 4\delta^2}} \le \theta \le 2\Omega\sqrt{1+\sqrt{\mu^2 - 4\delta^2}} \quad (10)$$

(нижние индексы здесь и далее опущены для простоты записи). Эти неравенства формально совпадают с неравенствами классического уравнения Матье, однако надо иметь в виду, что продольные колебания радикально меняют формулы для каждого параметра, см. (8), тем самым принципиально изменяя области динамической неустойчивости. Системы неравенств данного вида задают в неявном виде значения нагрузки, при которых m-ая поперечная форма колебаний будет неустойчивой при рассмотрении влияния k-ой продольной формы.

Путем построения областей динамической неустойчивости, задаваемых неравенствами вида (10), для всевозможных пар продольная – поперечная для некоторых поперечных форм колебаний можно получить критические значения нагрузки, меньшие, чем значения, получаемые из условия (9).

Найдем критическое значение силы путем построения областей динамической неустойчивости для выбранных значений параметров стержня: $l = 2$ м, $h = 0{,}005$ м, $b = 0{,}01$ м, где h и b – соответственно высота и ширина сечения и $\gamma = 10^{-4}$.

Рис. 1 демонстрирует влияние первой продольной формы на главные областей неустойчивости для 7-ой – 12-ой поперечных форм колебаний. В стандартной проблеме динамической потери устойчивости балки [3] частота продольной силы θ может меняться непрерывно. В рассматриваемой задаче частота θ принадлежит дискретному спектру собственных частот продольных колебаний. Учитывая, что для первой продольной формы колебаний $\theta = \omega_1 = \pi a/(2l)$, находим номер поперечной формы колебаний, которой соответствует минимальное значение нагрузки. Как видно из рис. 1, для поперечных форм колебаний с номерами меньше 12, параметрический резонанс невозможен, т. к. эти области не пересекаются прямой $\theta = \omega_1$. Для этих поперечных форм критическое значение силы может быть найдено из условия $\Omega_{mk}^2 > 0$. Для высших поперечных форм наименьшее значение критической силы дает метод построения областей динамической неустойчивости.

Ниже приводятся расчетные данные, полученные численным экспериментом с использованием критериев динамической неустойчивости, выведенных выше:

– сила Эйлера $P_E = EI\pi^2/l^2 \approx 53{,}97$ Н;

– условие неустойчивости *первой* поперечной формы колебаний: $P_0 \ge 1{,}32P_E \approx 71{,}3$ Н;

– условие неустойчивости *второй* поперечной формы колебаний: $P_0 \ge 5P_E \approx 270{,}6$ Н и т. д.;

– условие неустойчивости *седьмой* поперечной формы колебаний: $P_0 \ge 3266{,}6$ Н.

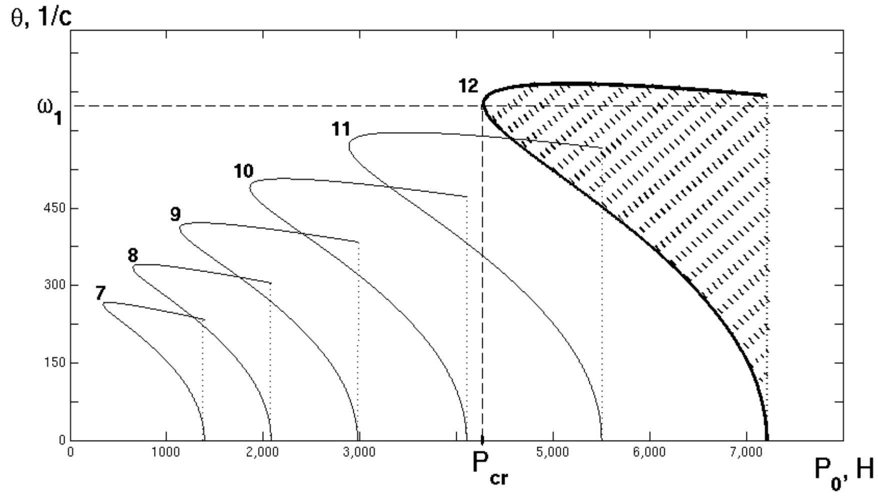

Рис. 1. Границы главных областей неустойчивости для 7-ой – 12-ой поперечных форм колебаний, вызванных первой продольной формой. Горизонтальная прямая $\theta = \omega_1$ не пресекает главные области неустойчивости для поперечных формы с номером ниже 12, P_{cr} – минимальное значение параметра нагрузки, теоретически приводящее к неустойчивости 12-ой поперечной формы колебаний.

При значениях нагрузки $P_0 \geq 3924{,}5$ Н теоретически возможно нарастание прогиба по двенадцатой форме (в соответствии с результатами, полученными из рассмотрения системы (8)).

Расположение областей неустойчивости на плоскости параметров (P_0, θ) зависит от параметров стержня. В зависимости от геометрии стержня и его материала минимальное значение продольной силы может приводить к динамической неустойчивости не обязательно по двенадцатой поперечной форме, а по изгибной форме с другим номером.

Заключение

Построение и анализ областей динамической неустойчивости позволяет сделать следующие выводы.

1. Наиболее опасным является влияние первой продольной формы колебаний на поперечные формы изгибных колебаний.
2. Для первых номеров поперечных форм колебаний значение критической нагрузки может быть получено из условия (9), а для более высоких номеров из неравенств (10).
3. С увеличением (выбором большего значения) сжимающей силы возможно непоследовательное выделение поперечных форм колебаний, то есть зависимость номера формы потери устойчивости от значения нагрузки не прямо пропорциональная.
4. Потеря устойчивости стержня по высшим формам возможна при значениях сжимающей силы меньше, чем значения, вычисленные по формуле Эйлера.
5. Наименьшее значение критической нагрузки соответствует паре первая продольная – первая поперечная. Это значение больше значения силы Эйлера и может быть найдено из условия (9): $P_{cr} = 1{,}3P_E$.

Список использованных источников

1. *Lavrentiev M. A., Ishlinsky A. Yu. Dynamic form of stability loss of elastic systems* // Doklady AN SSSR. – 1949. – N 6. – P. 776-782. (in Russian).
2. *Morozov N. F., Tovstik P. E. Dynamics of rod under axail impact* // Vestnik SPb. State University. Ser. 1. – 2009. – N 2. – P. 105-111. (in Russian).
3. *Bolotin V. V.* Dynamic stability of elastic systems. – Moscow: Nauka, 1956. – 600 p. (in Russian).

Поступила в редколлегию 31.03.13