УДК 519.925.51

Рутицька В.В.[1], к.т.н.

Про гарантовану множинну оцінку параметрів математичної моделі

Розглядається задача про побудову гарантованої множинної оцінки параметрів математичної моделі динамічного процесу.

Ключові слова: математична модель, ідентифікація параметрів, інвестиційний портфель, банківські активи

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д
e-mail: vlarut@gmail.com

V.V.Rutytska[1], Ph.D.

On guaranted multiple estimation of parameters of mathematical model

The problems of constructing a guaranted multiple parameters estimation of mathematical models of dynamic process are investigated.

Key Words: mathematical model, identification of parameters, portfolio management, bank assets

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d

e-mail: vlarut@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

При розв'язанні задач моделювання динаміки траєкторій складних систем часто доводиться зустрічатись із проблемами, пов'язаними з тим, що рівняння руху відомі з точністю до параметрів. Очевидно, що перш ніж перейти до розв'язання задач із побудови траєкторій руху системи, необхідно визначити значення параметрів таких моделей, або множин, яким вони належать.

Сучасне прикладне математичне моделювання оперує різними підходами до обчислення параметрів при визначеній структурі математичних моделей. До найбільш відомих та поширених методів ідентифікації параметрів дискретних та неперервних моделей відносять:

- кореляційно – дисперсійний аналіз;
- підходи, що ґрунтуються на принципах теорії стійкості;
- підходи, що ґрунтуються на методах аналізу чутливості розв'язків.

Разом з тим, в силу складності структури моделі, нелінійного характеру процесів, що моделюються, а також інших факторів, часто доводиться звертатись до комп'ютерного моделювання, яке дає можливість шляхом перебору великої кількості моделей – претендентів будувати комп'ютерні образи моделей методами самоорганізації або імітаційного моделювання. Під складністю параметрично заданої моделі будемо розуміти розмірність вектора параметрів, а основним принципом моделювання, пов'язаного із самоорганізацією моделі є: «чим складніша модель, тим вона точніша», на відміну від основного принципу імітаційного моделювання про «існування моделі оптимальної складності».

Такі підходи, до яких можна віднести методи типу нейромереж або групового урахування аргументів, часто застосовують і при розв'язанні задач моделювання складних та взаємопов'язаних економічних процесів, у тому числі математичних задач фондового ринку та банківського сектору економіки.

Як показано в роботах [1] та [2], математична модель формування ринкової вартості акції та портфеля акцій мають вигляд

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = f(r_i, t, \alpha),\ r_i(t_0) = r_0, \quad (1)$$

$t \in (t_0, T),\ i = \overline{1,n}.$

і

$$\dot{r}_p = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i, t). \quad (2)$$

відповідно, і є заданими параметрично. Тут

r_i – очікувана ринкова вартість акції; r_p – очікувана ринкова вартість інвестиційного портфеля; x_i – частка акцій i – того виду у портфелі; t – час.

При розв'язанні задач прогнозування або керування у наведених вище прикладних сферах є необхідність розробляти алгоритми та методи для отримання гарантованих фінансових результатів. Прикладом такого підходу може бути розробка методології Value at Risk, а підтвердженням актуальності – її загальне визнання як надійного математичного інструменту при прийнятті інвестиційних рішень.

Розглянемо детально задачу про побудову гарантованої множинної оцінки параметрів математичної моделі. Таку оцінку побудуємо у класі еліпсоїдальних множин.

Задача про оптимізацію портфеля акцій з точки зору його прибутковості у статичному випадку має вигляд

$$r_p = \sum_i x_i r_i \to \max_x .$$

При практичному інвестуванні вона розглядається у такій постановці

$$r_p(T) = \sum_i x_i(T) r_i(T) \to \max_x$$

і полягає у побудові оптимального за прибутковістю у кінцевий момент часу інвестиційного портфеля.

Праві частини рівнянь системи (1) є лінійними і залежать від параметрів. Для забезпечення можливості інтегрування системи (1) побудуємо процедуру визначення параметрів α.

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t)) r_i(t) + \alpha_3 r_j(t)),$$

$$i, j = \overline{1, n}.$$

При різних постановках задачі за вектор параметрів можна розглядати вектори $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ або $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Скористаємось при цьому відомою статистичною інформацією про динаміку ринкової вартості відповідних акцій $\overline{r}_i(t)$.

На основі цієї динаміки розіб'ємо інтервал інтегрування на підінтервали $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_T$. Будемо шукати оптимальні на підінтервалах значення параметрів α. Для цього на початковому підінтервалі для i – тої акції і для вибраного значення параметра α_0 розв'яжемо задачу Коші

$$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_0), \quad r_i(t_0) = r_{i0}, \quad t \in (t_0, t_1).$$

Далі з метою отримання оптимального значення параметра α_1^* сформулюємо оптимізаційну задачу

$$\alpha_1^* = arg \min_{\alpha} (r_i^0(r(t_0), t, \alpha) - \overline{r}_i(t))^2 . \quad (3)$$

Тут через $r^0(r(t_0), t, \alpha)$ позначено розв'язок задачі Коші на першому інтервалі. Таким чином, можемо визначити оптимальне, у розумінні критерія якості (3), значення параметрів моделі (1) на першому інтервалі. Сформулюємо та розв'яжемо аналогічні задачі на інших інтервалах розбиття. На k – тому кроці алгоритму процедура розрахунку оптимальних значень параметрів динамічної моделі є такою:

1. Розв'язуємо задачу Коші

$$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_{k-1}), \quad r_i(t_{k-1}) = r_{i_{k-1}} \quad t \in (t_{k-1}, t_k),$$
$$i = \overline{1, n}.$$

2. Будуємо траєкторію руху системи із точки t_{k-1} до точки t_k при значенні параметра α_{k-1}^*. При цьому значенням функції у момент часу t_k буде r_k.
3. Оптимізуємо параметр α системи на цьому інтервалі. Для цього сформулюємо та розв'яжемо оптимізаційну задачу

$$\alpha_{k-1}^* = arg \min_{\alpha} (r^0(r(t_{k-1}), t, \alpha_{k-2}^*) - \overline{r}_{k-1}(t))^2 \quad (4)$$

Розв'язком задач (4) для вибраного k кожної із них буде значення параметра α_{k-1}^*, що переводить систему із точки r_{k-1} у точку r_k.

Наведена вище процедура дає можливість на основі відомої статистичної інформації будувати послідовність значень параметрів α математичної моделі, яка дозволяє моделювати поведінку та прогнозувати очікувану прибутковість акції r_i у вибрані моменти заданого інвестором інтервалу часу.

Варто відмітити, що при розбитті інтервалу інтегрування необхідно враховувати також значення складових вектора станів системи для коректного застосування знайдених параметрів при розв'язанні відповідних траєкторних задач.

Перейдемо до задачі про побудову гарантованої множинної оцінки параметрів для математичної моделі загального вигляду (1). Сформулюємо процедуру побудови оптимальної еліпсоїдальної оцінки параметрів математичної моделі (1) у просторі R^n параметрів α.

1. **Алгоритм 1 побудови допустимої множини параметрів математичної моделі (1).**

Вектор параметрів моделі розглянемо у вигляді $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ за умови $x(t_0) = x_0$ при $t \in [t_0, t_1]$.
Розглянемо точку α_0 у просторі параметрів

$$\alpha_0 = (\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2}).$$

І нехай це значення параметрів буде розв'язком задачі параметричної ідентифікації моделі (1). Навколо точки α_0 опишемо коло одиничного радіуса

$$(\alpha_1 - \alpha_{0_1})^2 + (\alpha_2 - \alpha_{0_2})^2 = 1$$

з центром у т. $(\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2})$. Довжина кола при цьому буде $l = 2\pi$. Поділимо цю лінію на n рівних частин, причому значення n вибирається у залежності від точності отриманого розв'язку задачі з побудови гарантованої множинної оцінки параметрів. Розглянемо довільну точку $\alpha_k = (\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})$.

Проведемо дотичну до кола у цій точці. Рівнянням її буде

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_2 - \alpha_{k_2}).$$

Рівняння нормалі до дотичної у цій точці матиме вигляд

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_2 - \alpha_{k_2}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1}).$$

Нові значення параметрів α, які задовольняють умовам програмного функціонування системи, будемо шукати на нормалі. Із рівняння нормалі визначимо α_2

$$\alpha_2 = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})} + \alpha_{k_2}.$$

Нове положення координати α_2 визначимо, змінивши положення координати α_1

$$\alpha_{N_1} = \alpha_1 + \delta\alpha_1, \quad \delta > 0.$$

$$\alpha_{N_2} = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 + \delta\alpha_1 - \alpha_{k_1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})} + \alpha_{k_2}.$$

Таким чином, отримано нове положення значення параметра $\alpha_N \in A$, де $A -$ обмежена замкнута множина параметрів математичної моделі

$$\alpha_N = (\alpha_{N_1}, \alpha_{N_2}).$$

Наведемо деякі критерії якості для перевірки належності параметра допустимій множині

$$\sum_i (x^0(x_0, t_i, \alpha_\delta) - x_{\exp}(t_i))^2 < \varepsilon, \tag{5}$$

$$\max_t (x^0(x_0, t, \alpha_\delta) - x_{\exp}(t)) < \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{6}$$

Наведена вище процедура реалізує рух параметра α вздовж нормалі в один або інший бік до тих пір, доки виконується один із вибраних наведених вище критеріїв. Виконавши такі кроки для кожної із визначених раніше точок, отримаємо нове положення точок α у просторі параметрів математичної моделі.

2. **Алгоритм 2 побудови допустимої множини параметрів математичної моделі (1).**

Після побудови та аналізу розв'язків задачі ідентифікації параметрів визначимо точку, що найбільш віддалена від точки $D(\alpha_1^c, \alpha_2^c)$, координати якої визначимо за допомогою формул

$$\alpha_1^c = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k} \alpha_1^j, \quad \alpha_2^c = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k} \alpha_2^j.$$

Для цього розв'яжемо задачу одномірної оптимізації

$$R = \max_i L(\alpha_i, \alpha^c),$$

де $L(p,q) -$ функція відстані між точками p та q.

На границі кола $S(1, D)$ радіусу 1, із центром у точці $D(\alpha_1^c, \alpha_2^c)$ сформуємо довільну $\delta -$ сітку $\{y_i\}_{i \in K_s}$ з вузлами y_i. В кожному вузлі y_i побудуємо вектор зовнішньої нормалі $\overline{n}_{e_i}$ до кола за правилами, описаними вище, і розв'яжемо допоміжну задачу з побудови нових значень параметрів α аналогічно підходу, описаному в Алгоритмі 1.

Виконавши наведену процедуру для кожного із векторів $n_i, i \in K_n$ отримаємо новий набір точок $\alpha_{e_n} \in A$.

Опишемо еліпсоїд найменшого об'єму (еліпс найменшої площі у площині) навколо таким чином побудованих точок, який будемо називати гарантованою еліпсоїдальною оцінкою параметрів моделі (1) при застосуванні критеріїв (5) або (6).

На основі розв'язків задачі параметричної ідентифікації математичної моделі (1) та відомих спостережень гарантовану множинну оцінку параметрів побудуємо у класі еліпсоїдальних множин

$$Q(B,d):\{(B(\alpha-d),\alpha-d)\le 1\}, \qquad (7)$$

де B - симетрична додатньо–визначена матриця, що задає геометрію множинної оцінки у просторі параметрів α, $\alpha\in R^n$; $d-$ геометричний центр еліпсоїда, $d\in R^n$. Множину (7) будемо називати гарантованою множинною оцінкою, якщо кожне значення параметра α, отримане для довільних спостережень, належить $Q(B,d)$.

Ітераційна процедура методу побудови гарантованої множинної оцінки реалізує уточнення елементів матриці B та вектора d на кожному кроці. Початкову матрицю B оберемо одиничною $B^0=E,$ а початкове положення центру d визначимо як центр мас

$$d^0=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_j ,$$

де $k-$ кількість точок.

На $k+1-$ кроці процедури формули для визначення B^{k+1} та d^{k+1} мають вигляд

$$B^{k+1}=B^k+\lambda_1^{k+1}\nabla_B\{(B^k(\alpha-d^k),\alpha-d^k)\},$$

$$d^{k+1}=d^k+\lambda_2^{k+1}\nabla_d\{(B^k(\alpha-d^k),\alpha-d^k)\},$$

де λ_1^{k+1} та λ_2^{k+1} такі, що

$$(B^{k+1}(\lambda_1^{k+1})(\alpha_{\bar i}-d^{k+1}(\lambda_2^{k+1}),\alpha_{\bar i}-d^{k+1}(\lambda_2^{k+1}))<$$
$$(B^k(\alpha_{\bar i}-d^k),\alpha_{\bar i}-d^k),$$

де $\bar i=\arg\max_i(B(\alpha_i-d),\alpha_i-d).$

$$(B^j(\alpha-d^j),\alpha-d^j)<1,$$

На границі сфери $S(1,d^j)$ з центром у точці d^j,($j-$номер кроку процедури такий, що $(B^j(p-d^j),p-d^j)<1,$ сформуємо довільну $\delta-$сітку $\{y_i\}_{i\in K_s}$ з вузлами y_i. В кожному вузлі сформуємо довільну $\delta-$сітку $\{y_i\}_{i\in K_s}$ з вузлами y_i. У кожному вузлі за допомогою описаного методу побудови еліпсоїда найменшого об'єму навколо заданих точок знаходимо гарантовану множинну оцінку параметрів, яка, як і побудована за допомогою Алгоритму 1, забезпечує адекватну роботу системи. Побудована таким способом множина дозволяє сформувати допустиму множину параметрів і gпри подальшій оптимізації цієї множинної оцінки логічним наступним кроком є формулювання та розв'язання задачі про побудову ефективної оцінки.

Запропонована в даній роботі математична процедура дає можливість для динамічних математичних моделей однієї акції та портфеля акцій розв'язати задачу параметричної та гарантованої множинної ідентифікації параметрів і на основі розроблених алгоритмів визначення допустимої множини параметрів математичної моделі знайти розв'язок задач побудови траєкторії ринкової вартості для математичних моделей (1) та (2) та оптимальної диверсифікації інвестиційного портфеля ризикованих цінних паперів.

Список використаних джерел

1. Bublik B.N.,Garashchenko F.G., Kirichenko N.F. Structural and self-reactance optimization and stability of dynamics of bunches. -Kyiv, Naukova dumka, 1985. –304p. (in Russian).
2. Garashchenko F.G., Kulyan V.R., Rutitskaya V.V. Quality analysis of mathematical models of investment management. –Kyiv, //Cybernetics and computing engineering. – 2005. –N 148. –p.3-10. (in Russian).
3. Krylov I.A., Chernousko F.L. Algorithm of method of progressive approximations for the decision of optimal control problems. – Moskow, Nauka, 1971. –247p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 12.04.2013р.