УДК 519.852:519.876

Тодоріко Б.Д.[1], аспірант,

Аналіз матричної гри у змішаних стратегіях як прямої задачі лінійного програмування методом базисних матриць

Проаналізовано властивості прямої задачі лінійного програмування, як аналог матричної гри у змішаних стратегіях. Застосовано положення методу допустимих базисних матриць при встановленні властивостей чистих стратегій платіжної матриці.

Ключові слова: базисна матриця, оптимальна стратегія, оптимальний розв'язок, змішана стратегія.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: t1to@list.ru

Todorico B.D., postgraduate student

The analysis of matrix game (mix strategies) how linear programming problems with application method of basic matrix

Analysis of matrix game (mix strategies) as prime linear programming problems of basic matrix metheds is reseatch.

Key Words: basic matrix, optimal solution, optimal strategy, mix strategy .

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: t1to@list.ru

Статтю представив д.т.н., с.н.с. Кудін В.І.

Вступ

Одним з підходів до дослідження матричної гри у змішаних стратегіях є зведення до аналізу спеціальним чином побудованої двоїстої пари задач лінійного програмування [1-4]. Як методи розв'язання даної задачі, найчастіше обирають сімплекс методи, що застосовані до прямої або до двоїстої задачі ("стовпцеві" [4] та "порядкові" [5] схеми). Оскільки, при застосуванні, перші дають інформацію про стовпці, а інші про рядки матриці обмежень, тобто про стратегії гравців матричної гри.

В даній роботі досліджено структурні властивості прямої задачі (матричної гри) та застосовано ідеологію "стовпцевих" та "рядкових" методів при аналізі платіжної матриці (стратегій гравців).

Постановка задачі

Введемо в розгляд двоїсту пару задач лінійного програмування [1], де *пряма задача*

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j , \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} A_j x_j \le B \right) \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} . \tag{3}$$

Двоїста задача:

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i u_i , \tag{4}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + \ldots + a_{m1}u_m \ge c_1; \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + \ldots + a_{m2}u_m \ge c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + \ldots + a_{mn}u_m \ge c_n; \end{cases} \tag{5}$$

$$u_i \ge 0, \quad (i = \overline{1, m}) \tag{6}$$

Матрична гра у змішаних стратегіях подається як двоїста пара задач лінійного програмування [1,2], де $b_i = 1,\ i = \overline{1, m},\ c_j = 1,\ j = \overline{1,n}$.

Пасивність та неактивність стовпців моделі лінійного програмування (1)-(3).

Нехай

$$X = \left\{ x \,/\, \sum_{j=1}^{n} A_j x_j \le B,\ x \ge 0 \right\}$$

$$X_r = \left\{ x \,/\, \sum_{j=1,\, j\ne r}^{n} A_j x_j \le B,\ x \ge 0 \right\}$$

$$X^0 = \{x_0 \,/\, Cx_0 = \max_{x\in X} Cx, x \in X\}$$

$$X_r^0 = \{x_0 \,/\, Cx_0 = \max_{x\in X_r} Cx, x \in X_r\}.$$

Визначення 1. Стовпець A_r $(x_r = 0)$ задачі (1)-(3) пасивний , якщо $X = X_r$.

Визначення 2. Стовпець A_r $(x_r = 0)$ задачі (1)-(3) неактивний, якщо $X^0 = X_r^0$.

Визначення 3. Стовпець A_r $(x_r \ne 0)$ задачі (1)-(3) оптимально-активний, якщо $X^0 \ne X_r^0$.

Нехай $X = \{x \,/\, a_j x \le b_j,\ j \in I\}$

$X_r = \{x \,/\, a_j x \le b_j \quad j\in I, \quad j\ne r\}$

Визначення 4. Обмеження $a_r x \le b_r$ задачі (1)-(3) пасивне, якщо $X = X_r$.

Теорема 1. (друга теорема двоїстості для симетричних задач або з однотипними обмеженнями [5]). Для того, щоб плани X^* та U^* відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості:

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* - c_j \right) = 0,\ \ j = \overline{1,n}$$

$$u_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Очевидніший взаємозв'язок між оптимальними планами прямої та двоїстої задач встановлює наслідок другої теореми двоїстості.

Наслідок 1. Якщо в результаті підстановки оптимального плану однієї із задач (прямої чи двоїстої) в систему обмежень цієї задачі *і*-те обмеження виконується як строга нерівність, то *і*-та компонента оптимального плану (відповідна стовпцю A_i) спряженої задачі дорівнює нулю.

Якщо *і*-та компонента оптимального плану однієї із задач додатна (при стовпцю A_i), то відповідне *і*-те обмеження спряженої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Оскільки оптимальні стратегії матричної гри визначаються через компоненти розв‘язки задач (1)-(3) та (4)-(6) [1-3], саме складові оптимальних стратегій $u_i^{'}$ та $w_i^{'}$ ігри пов'язані з компонентами u_i та x_j оптимальних планів двоїстих задач лінійного програмування формулами

$$w_j^{'} = x_j \,/\, \sum_{j=1}^{n} x_j\ ,\ u_i^{'} = u_i \,/\, \sum_{i=1}^{m} u_i\ .$$

Означення 4. Чиста стратегія $e_k = \left(\underbrace{\overbrace{0,0,...,0,1}^{k},0,...0}_{m} \right)$ першого гравця називається *істотною (суттєвою)*, якщо існує така оптимальна змішана стратегія $u' = \left(u_1, u_2, ..., u_{k-1}, \underbrace{u_k}_{k}, u_{k+1}, ..., u_m \right)$, в якій k-а її складова u_k додатня. В іншому випадку стратегія e_k неістотна (несуттєва).

Аналогічно визначаються суттєві і несуттєві стратегії другого гравця.

Мають місце такі властивості оптимальних стратегій матричної гри:

Необхідною і достатньою умовою того, щоб чиста стратегія e_k першого гравця була суттєвою, є виконання рівності $e_k A w = v$ для всіх оптимальних стратегій другого гравця, де v ціна ігри.

Наслідок 2. З наведених вище означень пасивності та неактивності стовпців та обмежень (1)-(3) витікає несуттєвість відповідних чистих стратегії ігроків матричної гри.

Це вказує на потребу проведення аналізу структурних властивостей системи обмежень (2)-(3) задачі.

При розв'язуванні задачі сімплексним методом [5-6] необхідно звести задачі до канонічної форми, для чого в системи обмежень задач необхідно ввести m невід'ємних змінних. Оптимальний розв‘язок знаходиться послідовними вводами-виводами стовців в опорну базисну матрицю (відповідну опорному розв‘язку) – “стовпцева” процедура. Встановлення властивості пасивності стовпця буде вказувати на несуттєвість відповідної чистої стратегії (наслідок теореми 1).

При розв'язуванні задачі (без додаткових перетворень) методом базисних матриць як задачі з однотипними обмеженнями [4] встановлюються властивості пасивності обмеження (2), що вказує на несуттєвість (відповідної обмеженню нормалі, рядку платіжної матриці) чистої стратегії (наслідок теореми 1).

Відомо, що існує зв'язок умов оптимальності, формул зв‘язків елементів методу (методів) поміж задачами з різною формою запису [3], типом обмежень, напрямком оптимізації умовами пасивності (неактивності) рядків одної з задач та стовпців двоїстої, що витікає з умов теорем двоїстості [3].

Положення методу базисних матриць.

Без обмеження загальності, при викладенні положень методу будемо розглядати як базову задачу лінійного програмування з однотипними обмеженнями (4)-(6) на "$\le$" та на "max" з використанням методу базисних матриць.

Визначення 5. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей обмежень (5), будемо називати базисною, а розв′язок відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0 = C^0$ базисним. Дві базисні матриці з відміними одним рядком будемо називати суміжними.

Нехай β_{ij}, $1, j = 1, 2, ..., m,$ елементи базисної підматриці $A_б$, $e_{ri,}$ - елементи матриці $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$; $e_k = (A_б^{-1})_k$.- стовпець оберненої матриці. Розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})^T$ системи рівнянь $A_б u = c^0$, де c^0 - підвектор C - компоненти якого складаються з правих частин обмежень (5), нормалі, яких утворюють базисну матрицю $A_б$; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ - вектор розвинення нормалі обмеження $a_r u_1 \le c_r$ за рядками базисної матриці $A_б$, $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ вектор розвинення нормалі цільової функції (4) за рядками базисної матриці $A_б$, $. \Delta_r = a_r u_0 - c_r$ - нев'язка r-го обмеження (5) в вершині u_0; $J_б, J_H$, $J = J_б \cup J_H$ - множини індексів базисних і небазисних обмежень (5).

Теорема 2. Між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (5) та цільової функції (4) за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць, базисними розв'язками, нев′язками обмежень (5) та значеннями цільової функції в двох суміжних базисних розв′язках мають місце такі співвідношення

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li},$$
$$r = \overline{0,n}; \ \ i = \overline{1,m}; \ \ i \ne k; \tag{7}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li},$$
$$r = \overline{1,m}; \ \ i = \overline{1,m}; \ \ i \ne k; \tag{8}$$

$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, \ j = \overline{1,m}, \tag{9}$$

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \ \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l,$$
$$r = \overline{1,n}; \quad r \ne k; \tag{10}$$

$$B\overline{u}_0^T = Bu_0^T - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, \tag{11}$$

причому умовою невиродженості є $\alpha_{lk} \ne 0$, умовою допустимості опорного базисного розв‘язку - $\alpha_{lk} < 0$, а умовою зростання цільової функції - $\alpha_{0k} < 0$.

Встановлено [4], що якщо існує базисна матриця $A_б$ така, що $\alpha_{0k} \ge 0, k = \overline{1,m}$, то базисна матриця та відповідний їй розв'язок u_0 оптимальні, причому при $\alpha_{0k} > 0$, $k = \overline{1,m}$, розв‘язок єдиний, при $\exists i_0 \in I, \alpha_{0i0} = 0$, розв‘язок неєдиний.

Теорема 2. (Критерій пасивності [4]) Для того, щоб обмеження $a_r u \le c_r$ було пасивним необхідно і достатньо існування базисної матриці, $A_б$ відносно якої розвинення $\alpha_{rk} \ge 0$ для всіх k.

Про структурні властивості задачі (1)-(3.)

Задача (1)-(3) має свої особливості структури, що "позначається" на вигляді формул зв‘язку елементів методу базисних матриць в двох суміжних базисних матрицях та в специфіці побудови та застосування алгоритмів. Неважко переконатись, що $0 \in E^n$ допустимий розвязок задачі (1)-(3). Множина обмежень задачі являється обмеженою.

Твердження 1. Множина точок з координатами $x_{j(H)} = (0, 0, ..., \underbrace{\lambda_{j(H)}}_{j}, 0, ..., 0),\ j \in J$,

де $\lambda_{j(H)} = \min\limits_{\substack{a_{ij}>0,\\ i\in I}} \dfrac{1}{a_{ij}},\ j \in J$ є допустимими для (2).

Доведення. Розглянемо додатні координатні осі множини обмежень в E^n, тобто промені, які можна представити у вигляді $OX_j = \left\{ \begin{matrix} x = (x_1, x_2, ..., x_n) / x_i = 0, \\ i \neq j,\ x_j = \lambda_j,\ 0 < \lambda_j < +\infty,\ i = j \end{matrix} \right\}$.

Найдемо перетин кожної з гіперплощин обмежень (півпросторів) з OX_j, $j \in J$ (опуклих множин). Підставимо кординати точок променя OX_j, $j \in J$ в рівняння гіперплощини відповідній

$a_i x \le b_i,\ i \in I$, $a_i x = b_i,\ i \in I$,

$a_i x = 1,\ i \in I$, $\lambda_{j(i)} = 1 / a_{ij},\ i \in I$,

Відрізок $\left[0, \lambda_{j(i)}\right]$ допустимий для $a_i x \le b_i,\ i \in I$ (оскільки $0 \in E^n$ та $(0, 0, ..., \lambda_{j(i)}, 0, ..., 0)$ допустимі). Знайдемо перетин відрізків, тобто відрізок $\left[0, \lambda_{j(H)}\right]$, $\lambda_{j(H)} = \min\limits_{i\in I} \lambda_{j(i)}$. Точка з координатами $x\ x_{j(H)} = (0, 0, ..., \lambda_{j(H)}, 0, ..., 0),\ j \in J$ буде допустимою для всіх обмежень.

Наслідок 2. Точки простору E^n : $0 \in E^m$ $x_{j(H)} = (0, 0, ..., \lambda_{j(H)}, 0, ..., 0),\ j \in J$ є допустимими для (1)-(3), а точка $x_{d(H)} = (0, 0, ..., \lambda_{d(H)}, 0, ..., 0)$, $\lambda_{d(H)} = \max\limits_{j\in J} \lambda_{j(H)}$ нижньою допустимою оцінкою за цільовою функцією (1) задачі (1)-(3), тобто $cx \ge cx_{d(H)}$.

Доведення цього факту є очевидне, якщо врахувати властивість цільової функції (1) (координати вектора одиничні) та додатність компонент ($cx_{d(H)} = \lambda_{d(H)}$).

Теорема 3. Параллелепіпед змінних вигляду $\Pi_{X(B)} = \left\{ x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) / 0 \le x_j \le x_{j(B)},\ j \in J \right\}$, де

$x_{j(B)} = (0, 0, ..., \lambda_{j(B)}, 0, ..., 0),\ j \in J$,

$\lambda_{j(B)} = \max\limits_{i\in I} \lambda_{j(i)}$, $\lambda_{j(i)} = 1 / a_{ij},\ i \in I$,

є обмежена замкнена множина-апроксимуюча для обмежень (2)-(3), тобто $X \subseteq \Pi_x$.

Доведення. Введемо в розгляд допоміжні задачі вигляду

$\max x_k$,

$a_i x \le b_i,\ i \in I$ ($a_i x \le 1,\ i \in I$)

$x_j \ge 0,\ j \in J$, $k \in J$

та $\min x_k$, $k \in J$ при тих же обмеженнях.

Неважко переконатись, що верхніми оцінками розв‘язків наведених оптимізаційних задач на максимум будуть

$x_{j(B)} = (0, 0, ..., \lambda_{j(B)}, 0, ..., 0),\ j \in J$,

$\lambda_{j(B)} = \max\limits_{i\in I} \lambda_{j(i)}$, $\lambda_{j(i)} = 1 / a_{ij},\ i \in I$,

а на мінімум $x_{j(H)} = (0, 0, ..., 0, ..., 0),\ j \in J$. Розв‘язки наведених задач визначають апроксимацію допустимої області паралелепіпедом вигляду

$$\Pi_X = \left\{ \begin{matrix} x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) / \\ 0 \le x_j \le x_{j(0)},\ j \in J \end{matrix} \right\},$$

де $\left\{ x_{j(0)},\ j \in J \right\}$- оптимальні розв‘язки введених задач на максимум.

Півпростори $x_j \le \lambda_{j(B)},\ x_j \ge 0,\ j \in J$ будуть містить множину X, що описується (2)-(3). Це вказує на обмеженість множини X та виконання умови $X \subseteq \Pi_{x(B)}$.

Оптимальне значення на $\Pi_{x(B)}$ цільової функції (1) досягається в точках $x_{\Pi(\max)} = (\lambda_{1(B)}, \lambda_{2(B)}, ..., \lambda_{j(B)}, ..., \lambda_{n(B)})$,

$x_{\Pi(\min)} = (0, 0, ..., 0, ..., 0)$

і набувають, відповідно, значень

$$cx_{\Pi(\max)} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j(B)}, F_{x(B)} = cx_{\Pi(\max)},\ cx_{\Pi(\min)} = 0,\ F_{x(H)} = 0$$

які є верхньою та нижньою оцінками за цільовою функцією.

Нехай $d_i = \dfrac{1}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}}$ - відстані гіперплощин обмежень (2) від початку координат $0 \in E^m$, $d = \min\limits_{i\in I} d_i$.

Твердження 2. Множина X_r, що описується співвідношеннями вигляду

$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \le d^2$, $x_j \ge 0,\ j \in J$ є внутрішньою апроксимацією множини (2)-(3), тобто $X_r \subseteq X$, оптимальне значення (1) на множині X_r досягає в точці $x_{0(r)} = \left(\underbrace{\frac{d}{\sqrt{n}}, \frac{d}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{d}{\sqrt{n}}}_{n} \right)$, $cx_{0(r)} = \frac{nd}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}d$.

Доведення. Відстань від точки $x_0 = 0$ простору до гіперплощини можна визначити за формулою $d_i = \frac{|a_i x_0 - b_i|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}}$. Оскільки, $x_0 = 0, b_i = 1$, то $d_i = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}}, i \in I$. Точки $0 \in E^n$ та точки сфери радіуса d_i з додатнього ортанту) належать одному півпростору (негативному), тобто для них виконується $a_i x - b_i \le 0, i \in I$. Звідси витікає, що точка $0 \in E^n$ та точки сфери мінімального радіуса $d = \min_{i \in I} d_i$ з додатнього ортанту належать всім півпросторам (негативним), тобто виконується $a_i x - b_i \le 0,\ \forall i \in I$ та умова додатності змінних . Зокрема для точок, що задовольняють умовам $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \le d^2$ та $x_j \ge 0,\ j \in J$. Це означає, що $X_r \subseteq X$. Для оптимального розв‘язку задачі (1) при обмеженнях $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \le d^2$ та $x_j \ge 0,\ j \in J$ врахуємо вигляд цільової функції та обмежень $x_{0(r)} = \left(x_{0(r),1}, x_{0(r),1}, \ldots, x_{0(r),n} \right)$

$$x_{0(r),1} = x_{0(r),1} = \ldots = x_{0(r),p} = \ldots = x_{0(r),n},$$

$$n \times x_{0(r),p}^2 = d^2,\ x_{0(r),p}^2 = d^2 / n,\ x_{0(r),p} = \sqrt{d^2 / n} = d / \sqrt{n}$$

. тобто $cx_{0(r)} = \frac{nd}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}d$.

Наслідок 3. Нижня допустима границя значень цільової функції (1) визначається із співвідношення

$$x_{d(H)} = \arg\max\left(cx_{j(H)},\ \ j \in J,\ \ 0,\ cx_{0(r)} \right),$$

$$F_{x(H)} = cx_{d(H)} = max\left(cx_{j(H)},\ j \in J,\ 0,\ cx_{0(r)} \right)$$

Наслідок 4. Множини (області) оптимальних значень задачі (1)-(3) та задачі (1)-(3) з додатковим обмеженням на цільову функцію у вигляді $cx \ge cx_{d(H)} \left(-cx \le -cx_{d(H)} \right)$ співпадають.

Обмеження (стовпці) пасивні (несуттєві) для даної множини будуть неактивними для (1)-(3).

Наслідок 5. Відповідні стовпці двоїстої задачі (стовпці платіжної матриці) будуть неактивними.

Висновок

Врахування структурних властивостей обмежень задачі (2)-(3) дозволяє: побудувати двосторонні оцінки значень змінних та цільової функції (1), локалізувати область належності оптимальних значень, додатково ідентифікувати пасивні та неактивні обмеження (стовпці), застосувати другу теорему двоїстості (про умови доповнюючої нежорсткості) для виявлення суттєвих та несуттєвих стратегій.

Список використаних джерел

1. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* New directions in linear programming. − M. − Sovetskoe radio, − 1969, − 524p. (in Russian).
2. *Dantzig G.B., Thapa M.N.* Linear Programming 1: introduction, Springer, − 1997, − 435p.
3. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* Linear programming/.Theory and methods. −M.: Nauka, − 1963. – 776p. (in Russian).
4. Kudin V. I., Lyashko S.I., Khritonenko N.V., Yatsenko Yu.P. Analysis of the properties of a linear system using the method of artificial basis matrices // Kibernetika i sistemny analiz. — 2007. — N 4. —.P. 119–127 (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 05.04.13