УДК 004.42:510.69

Шкільняк С.С., д. ф.-м. н.

Семантичні властивості логік часткових предикатів з розширеними реномінаціями

Досліджено семантичні властивості нових класів першопорядкових композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів із композиціями розширеної реномінації. Це дає змогу явно задавати відсутність значення для предметних імен. Описано властивості відношення логічного наслідку для множин формул, що є семантичною основою побудови секвенційних числень цих логік.

Ключові слова: логіка, предикат, реномінація, квантор, логічний наслідок.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр. Глушкова 4д
e-mail: sssh@unicyb.kiev.ua

S.S. Shkilniak, Doctor of Sciences (Phys.-Math.).

Semantic properties of logics of partial predicates with extended renominations

Semantic properties of new classes of first-order composition-nominative logics of partial quasiary predicates with extended renomination composition are investigated. This gives possibility to indicate explicitly the absence of the value of subject variables. Properties of relation of logical consequence for sets of formulas are described. The specified properties are the semantic basis for construction of sequent calculi for such logics.

Key words: logic, predicate, renomination, quantifier, logical consequence.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: sssh@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Розширення сфери застосування математичної логіки в інформатиці й програмуванні зумовило створення різноманітних логічних систем. Такі системи зазвичай базуються на апараті класичної логіки предикатів. Проте класична логіка має принципові обмеження, що робить актуальною проблему побудови нових логічних формалізмів на єдиній для логіки й програмування концептуальній основі. Програмно-орієнтовані логічні формалізми, збудовані на базі спільного для логіки й програмування композиційно-номінативного підходу, названо композиційно-номінативними логіками (КНЛ). Такі логіки базуються на загальних класах часткових відображень, заданих на довільних наборах іменованих значень. Побудовано низку КНЛ (див., напр., [1–4]), що знаходяться на різних рівнях абстрактності й загальності.

Нові класи першопорядкових композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів запропоновано в [5]. Характерною особливістю таких логік є використання композицій розширеної реномінації (перейменування), що дає змогу явно задавати відсутність значення для предметних імен. За допомогою розширеної реномінації визначаються композиції розширеної квантифікації (розширені квантори).

Дана стаття є є безпосереднім продовженням роботи [5], її метою є дослідження семантичних властивостей чистих першопорядкових КНЛ з розширеними реномінаціями (ЧКНЛРР). Сформульовано та доведено критерій строгого неістотності предметного імені, записаний з використанням розширених кванторів, описано властивості відношення логічного наслідку для множин формул мови ЧКНЛРР. Такі властивості є семантичною основою побудови для ЧКНЛРР числень секвенційного типу.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [1, 2, 5]. Дотримуємось позначень роботи [5].

1. Композиції розширеної реномінації та розширеної квантифікації

Композиції розширеної реномінації для квазіарних предикатів задаємо за допомогою операцій розширеної реномінації для іменних множин.

Нагадаємо, що V-іменна множина (V-ІМ) над A – це однозначна функція $\delta : V \to A$. Тут V і A – множини предметних імен і предметних значень.

V-ІМ подаємо у вигляді $[v_1 \mapsto a_1,...,v_n \mapsto a_n,...]$.

Для V-ІМ вводимо [1, 5] операцію ∇ накладки, операції $\|_{-x}$ та $\|_{-X}$ видалення компоненти з іменем $x \in V$ та видалення компонент з іменами із $X \subseteq V$.

Операцію $r^{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m}_{x_1,...,x_n,\perp,...,\perp} : {}^V A \to {}^V A$ розширеної реномінації задамо так:

$r^{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m}_{x_1,...,x_n,\perp,...,\perp}(\delta) =$

$= \delta\|_{-\{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m\}} + [v_1\mapsto\delta(x_1),...,v_n\mapsto\delta(x_n)]$.

Зокрема, $r^x_\perp(\delta) = \delta\|_{-x}$.

Тут $\perp$ – спеціальний символ, який вказує на відсутність значення для відповідного верхнього імені.

Ввівши позначення $\bar{y}$ для $y_1,..., y_n$, будемо також скорочено писати $r^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$ замість $r^{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m}_{x_1,...,x_n,\perp,...,\perp}$.

Операція $r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}$ монотонна:

$d_1 \subseteq d_2 \Rightarrow r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d_1) \subseteq r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d_2)$.

V-квазіарним предикатом на A назвемо функцію вигляду $P : {}^VA \to \{T, F\}$.

Тут ${}^VA$ – множина всіх V-ІМ над A, $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

Область істинності та область хибності предиката $P : {}^VA \to \{T, F\}$ – це множини

$\boldsymbol{T}(P) = \{d\in {}^VA \mid P(d)\downarrow = T\}$,

$\boldsymbol{F}(P) = \{d\in {}^VA \mid P(d)\downarrow = F\}$.

Композицію *розширеної реномінації* (розширену реномінацію) $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$ визначаємо так:

$\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)(d) = P(r^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(d))$ для всіх $d\in {}^VA$.

Ім’я $x\in V$ строго неістотне для $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{y},\perp,\perp}(P)$.

Справді, для всіх $d\in {}^VA$ та $a\in A$ маємо:

$\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{y},\perp,\perp}(P)\,(d\nabla x\mapsto a) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{y},\perp,\perp}(P)\,(d\|{-x})$.

Властивості композицій $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$ аналогічні відповідним властивостям композиції $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$ (див. [5]).

Похідні композиції *розширеної квантифікації* (розширені квантори) $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$, які враховують відсутність значення для квантифікованого імені, визначаються так:

$\exists_\perp xP = \exists xP \vee \mathrm{R}^x_\perp(P)$;

$\forall_\perp xP = \forall xP \,\&\, \mathrm{R}^x_\perp(P)$.

Із визначення випливає, що для $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$ виконуються наступні співвідношення:

$\boldsymbol{T}(\exists_\perp xP) \supseteq \boldsymbol{T}(\exists xP)$; $\boldsymbol{F}(\exists_\perp xP) \subseteq \boldsymbol{F}(\exists xP)$;

$\boldsymbol{T}(\forall_\perp xP) \subseteq \boldsymbol{T}(\forall xP)$; $\boldsymbol{F}(\forall_\perp xP) \supseteq \boldsymbol{F}(\forall xP)$.

Композиції $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{y},\perp}$, $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$ зберігають [5] еквітонність предикатів.

Для еквітонних предикатів маємо (див. [5]):

1) $\boldsymbol{T}(\exists_\perp xP) = \boldsymbol{T}(\exists xP)$;

$\boldsymbol{F}(\exists_\perp xP) = \boldsymbol{F}(\mathrm{R}^x_\perp(P)) \subseteq \boldsymbol{F}(\exists xP)$;

2) $\boldsymbol{T}(\forall_\perp xP) = \boldsymbol{T}(R^x_\perp(P)) \subseteq \boldsymbol{T}(\forall xP)$;

$\boldsymbol{F}(\forall_\perp xP) = \boldsymbol{F}(\forall xP)$.

Основні властивості композицій $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$ в цілому аналогічні (див. [5]) відповідним властивостям композицій $\exists x$ та $\forall x$. Розглянемо детальніше властивості, пов’язані з неістотністю імен.

Нагадаємо, що ім'я $x\in V$ строго неістотне для V-квазіарного предиката P, якщо для довільних $d\in {}^VA$ та $a\in A$ маємо $P(d\nabla x\mapsto a) = P(d\|_{-x})$.

Для довільних $d\in {}^VA$ та $a\in A$ маємо:

$\exists_\perp xP(d\nabla x\mapsto a) = (\exists xP \vee \mathrm{R}^x_\perp(P))(d\nabla x\mapsto a) =$

$= (\exists xP \vee \mathrm{R}^x_\perp(P))(d\|_{-x}) = \exists_\perp xP(d\|_{-x})$;

$\forall_\perp xP(d\nabla x\mapsto a) = (\forall xP \,\&\, \mathrm{R}^x_\perp(P))(d\nabla x\mapsto a) =$

$= (\forall xP \,\&\, \mathrm{R}^x_\perp(P))(d\|_{-x}) = \forall_\perp xP(d\|_{-x})$.

Таким чином, ім’я $x\in V$ строго неістотне для $\exists_\perp xP$ та $\forall_\perp xP$.

Твердження 1. Нехай $x\in V$ строго неістотне для P; тоді $P = \mathrm{R}^x_\perp(P)$.

Якщо x строго неістотне для P то для довільних $d\in {}^VA$ та $a\in A$ маємо

$P(d) = P(d\|_{-x}) = \mathrm{R}^x_\perp(P)(d)$. Отже, $P = \mathrm{R}^x_\perp(P)$.

Твердження 2. Нехай $x\in V$ строго неістотне для P; тоді $P = \exists xP$ та $P = \forall xP$.

Припустимо супротивне: $x\in V$ строго неістотне для P, проте $P\neq\exists xP$. Тоді для деякого $d\in {}^VA$ маємо $P(d)\neq\exists xP(d)$. Нехай $\exists xP(d) = T$, тоді $P(d\nabla x\mapsto a) = T$ для деякого $a\in A$. Але x строго неістотне для P, тому $P(d\nabla x\mapsto a) = P(d)$, звідки $P(d) = T = \exists xP(d)$ – суперечність із $P(d)\neq\exists xP(d)$. Нехай $\exists xP(d) = F$, тоді $P(d\nabla x\mapsto a) = F$ для всіх $a\in A$. Але x строго неістотне для P, тому для кожного $a\in A$ маємо $P(d\nabla x\mapsto a) = P(d)$, звідки $P(d) = F = \exists xP(d)$, що суперечить $P(d)\neq\exists xP(d)$. Нехай $\exists xP(d)\uparrow$, тоді $P(d\nabla x\mapsto a)\uparrow$ принаймі для одного $a\in A$. Але x строго неістотне для P, тому маємо $P(d\nabla x\mapsto a) = P(d)$, звідки $P(d)\uparrow$ – суперечність із $P(d)\neq\exists xP(d)$.

Подібним чином доводиться, що при x строго неістотному для P маємо $P = \forall xP$

Твердження 3. Якщо ім’я $x\in V$ строго неістотне для P, то $P = \exists_\perp xP$ та $P = \forall_\perp xP$.

Якщо x строго неістотне для P, то в силу твердження 2 маємо $P = \exists xP$ та $P = \forall xP$. Але в силу твердження 1 тоді $P = \mathrm{R}^x_\perp(P)$. Звідси отримуємо $P = \exists xP \vee \mathrm{R}^x_\perp(P) = \exists_\perp xP$ та $P = \forall xP \,\&\, \mathrm{R}^x_\perp(P) = \forall_\perp xP$.

Твердження 4. $P = \exists_\perp xP \Rightarrow x$ строго неістотне для P.

Припустимо супротивне: $P=\exists_{\perp}xP$, проте для деяких $d\in{}^{V}\!A$ та $a\in A$ маємо $P(d\nabla x\mapsto a)\neq P(d\,\|_{-x})$. В силу $P=\exists_{\perp}xP$ тоді маємо $P(d\,\|_{-x})=\exists_{\perp}xP(d\,\|_{-x})=$ $=\exists xP(d\,\|_{-x})\vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)\,(d\,\|_{-x})$. Водночас $\exists xP(d\,\|_{-x})=$ $=\exists xP(d\nabla x\mapsto a)$ та $\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)\,(d\,\|_{-x})=\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)\,(d\nabla x\mapsto a)$, тому отримуємо $\exists xP(d\,\|_{-x})\vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)\,(d\,\|_{-x})=$ $=\exists xP(d\nabla x\mapsto a)\vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)\,(d\nabla x\mapsto a)=\exists_{\perp}xP(d\nabla x\mapsto a)=$ $=P(d\nabla x\mapsto a)$. Отже, $P(d\,\|_{-x})=P(d\nabla x\mapsto a)$, що суперечить припущенню..

Звідси отримуємо: $P=\forall_{\perp}xP\Rightarrow\neg P=\neg\forall_{\perp}xP\Rightarrow$ $\Rightarrow\neg P=\exists_{\perp}x\neg P\Rightarrow$ x строго неістотне для $\neg P\Rightarrow$ $\Rightarrow$ x строго неістотне для P. Враховуючи цей факт, із тверджень 3 і 4 дістаємо критерій строго неістотності предметного імені, записаний з використанням розширених кванторів:

Теорема 1. $P=\exists_{\perp}xP\Leftrightarrow x$ строго неістотне для $P\Leftrightarrow P=\forall_{\perp}xP$.

Мова ЧКНЛ з розширеними реномінаціями. ЧКНЛ з розширеними реномінаціями (ЧКНЛРР) можна трактувати як підрівень ЧКНЛ.

З формального погляду мова ЧКНЛРР відрізняється лише дещо відмінними параметрами (парами імен) символів реномінації (нижнім іменем може бути спеціальний символ $\perp$). Визначення формули та відображення інтерпретації задаються аналогічно випадку традиційних ЧКНЛ. Те саме стосується визначень істинної (неспростовної) формули, виконуваної формули, тавтології, відношень тавтологічного наслідку, логічного наслідку, слабкого логічного наслідку, тавтологічної еквівалентності, логічної еквівалентності, строгої логічної еквівалентності. Для ЧКНЛРР справджується теорема еквівалентності, вона теж формулюється (див. [5]) у двох формах – для відношення $\sim$ та відношення $\sim_{TF}$.

Для семантичних моделей ЧКНЛРР, як і для семантичних моделей ЧКНЛ, маємо умову наявності нескінченної множини V_T тотально строго неістотних [3, 4] імен.

Специфічні властивості формул ЧКНЛРР пов'язані з композиціями розширеної реномінації та квантифікації, вони відображають відповідні властивості цих композицій. Такі властивості описано в [5], а в даній роботі далі зосередимося на властивостях відношення логічного наслідку для множин формул мови ЧКНЛРР.

2. Відношення логічного наслідку для множин формул

Нехай $\Gamma\subseteq Fr$ та $\Delta\subseteq Fr$ – множини формул.

Δ є логічним наслідком Γ в моделі мови $\boldsymbol{A}$ (позн. $\Gamma_A|=\Delta$), якщо $\bigcap\limits_{\Phi\in\Gamma}T(\Phi_A)\cap\bigcap\limits_{\Psi\in\Delta}F(\Psi_A)=\varnothing$.

Δ є логічним наслідком Γ (позн. $\Gamma\,|=\Delta$), якщо $\Gamma_A|=\Delta$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Теорема 2 (заміни еквівалентних). Нехай $\Phi\sim_{TF}\Psi$. Тоді:

$\Phi,\Gamma\,|=\Delta\Leftrightarrow\Psi,\Gamma\,|=\Delta$ та $\Gamma\,|=\Delta,\Phi\Leftrightarrow\Gamma\,|=\Delta,\Psi$.

Наведемо основні властивості відношення |= для множин формул ЧКНЛРР. Властивості пропозиційного рівня такі ж, як і для ЧКНЛ:

C) Якщо $\Gamma\cap\Delta\neq\varnothing$, то $\Gamma\,|=\Delta$.

U) Нехай $\Gamma\subseteq\Lambda$ та $\Delta\subseteq\Sigma$, тоді $\Gamma\,|=\Delta\Rightarrow\Lambda\,|=\Sigma$.

$\neg_{|-}$) $\neg\Phi,\Gamma\,|=\Delta\Leftrightarrow\Gamma\,|=\Delta,\Phi$;

$\neg_{-|}$) $\Gamma\,|=\Delta,\neg\Phi\Leftrightarrow\Phi,\Gamma\,|=\Delta$;

$\vee_{|-}$) $\Phi\vee\Psi,\Gamma\,|=\Delta\Leftrightarrow\Phi,\Gamma\,|=\Delta$ та $\Psi,\Gamma\,|=\Delta$;

$\vee_{-|}$) $\Gamma\,|=\Delta,\Phi\vee\Psi\Leftrightarrow\Gamma\,|=\Delta,\Phi,\Psi$.

Наведені нижче властивості індуковані відповідними однойменними властивостями композицій рошириної реномінації із використанням теореми заміни еквівалентних. Від аналогічних властивостей відношення |= для множин формул ЧКНЛ вони відрізняються лише використанням символів $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$ замість символів $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Зліва від символа $\Leftrightarrow$ у записі такої властивості – виділена формула, справа – її спрощення.

$\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{T}_{|-}$) $R_{z,\bar{x},\perp}^{z,\bar{v},\bar{u}}(\Phi),\Gamma\,|=\Delta\Leftrightarrow R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi),\Gamma\,|=\Delta$;

$\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{T}_{-|}$) $\Gamma\,|=\Delta,R_{z,\bar{x},\perp}^{z,\bar{v},\bar{u}}(\Phi)\Leftrightarrow\Gamma\,|=\Delta,R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi)$;

$\Phi_{\perp}\mathrm{N}_{|-}$) $R_{z,\bar{x},\perp}^{y,\bar{v},\bar{u}}(\Phi),\Gamma\,|=\Delta\Leftrightarrow R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi),\Gamma\,|=\Delta$;

$\Phi_{\perp}\mathrm{N}_{-|}$) $\Gamma\,|=\Delta,R_{z,\bar{x},\perp}^{y,\bar{v},\bar{u}}(\Phi)\Leftrightarrow\Gamma\,|=\Delta,R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi)$.

Для $\Phi_{\perp}\mathrm{N}_{|-}$ та $\Phi_{\perp}\mathrm{N}_{-|}$ умова $y\in\nu(\Phi)$.

$\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{R}_{|-}$) $R_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}(R_{\bar{x},\perp}^{\bar{u},\bar{t}}(\Phi)),\Gamma\,|=\Delta\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}\circ_{\bar{x},\perp}^{\bar{u},\bar{t}}(\Phi)),\Gamma\,|=\Delta$;

$\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{R}_{-|}$) $\Gamma\,|=\Delta,R_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}(R_{\bar{x},\perp}^{\bar{u},\bar{t}}(\Phi))\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\Gamma\,|=\Delta,R_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}\circ_{\bar{x},\perp}^{\bar{u},\bar{t}}(\Phi))$;

$\mathrm{R}_{\perp}\neg_{|-}$) $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\neg\Phi),\Gamma\,|=\Delta\Leftrightarrow\neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi),\Gamma\,|=\Delta$;

$\mathrm{R}_{\perp}\neg_{-|}$) $\Gamma\,|=\Delta,R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\neg\Phi)\Leftrightarrow\Gamma\,|=\Delta,\neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi)$;

$\mathrm{R}_{\perp}\vee_{|-}$) $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi\vee\Psi),\Gamma\,|=\Delta\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi)\vee R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Psi),\Gamma\,|=\Delta$;

$\mathrm{R}_{\perp}\vee_{-|}$) $\Gamma\,|=\Delta,R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi\vee\Psi)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\Gamma\,|=\Delta,R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi)\vee R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Psi)$;

$\mathrm{R}_{\perp}\exists\mathrm{R}_{|-}$) $R_{\bar{v},\perp,y}^{\bar{u},\bar{w},x}(\exists x\Phi),\Gamma\,|=\Delta\Leftrightarrow R_{\bar{v},\perp}^{\bar{u},\bar{w}}(\exists x\Phi),\Gamma\,|=\Delta$ та $R_{\bar{v},\perp,\perp}^{\bar{u},\bar{w},x}(\exists x\Phi),\Gamma\,|=\Delta\Leftrightarrow R_{\bar{v},\perp}^{\bar{u},\bar{w}}(\exists x\Phi),\Gamma\,|=\Delta$;

$R_{\perp}\exists R_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$ та $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$.

Зокрема, $R^{x}_{y}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists x\Phi, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi$.

Властивості типу $R_{\perp}\exists R$ можна узагальнити для розширених кванторів:

$R_{\perp}\exists_{\perp}R_{\vdash}$) $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\exists_{\perp}x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists_{\perp}x\Phi), \Gamma \models \Delta$ та

$R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(\exists_{\perp}x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists_{\perp}x\Phi), \Gamma \models \Delta$.

$R_{\perp}\exists_{\perp}R_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\exists_{\perp}x\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists_{\perp}x\Phi)$ та

$\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(\exists_{\perp}x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists_{\perp}x\Phi)$.

Для властивостей типу $R_{\perp}\exists R$ та $R_{\perp}\exists_{\perp}R$ неявно маємо умову $x \notin \{\bar{u}, \bar{w}\}$, яка випливає з визначення композицій реномінації $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}$ та $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}$.

Для опису властивостей, пов'язаних з елімінацією кванторів, використаємо спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами предикати-індикатори εz, які визначають наявність в даних компоненти з відповідним іменем z.

Предикати-індикатори εz задаємо [4, 6] так:

$\boldsymbol{T}(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d \in {}^{V}A \mid z \notin asn(d)\}$;

$\boldsymbol{F}(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d \in {}^{V}A \mid z \in asn(d)\}$.

Теорема 3. Для ЧКНЛРР справджуються наступні співвідношення:

$\boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(P)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z) \subseteq \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP))$ $\quad$ ($TR_{\perp}\exists R$)

$\boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z) \subseteq \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(P))$ $\quad$ ($FR_{\perp}\exists R$)

Доведення. Доводимо $TR_{\perp}\exists R$. Нехай $d \in \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(P)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z)$, тоді $d(z)\downarrow$ та $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(P)(d) = T$, звідки $d(z)\downarrow a$ для деякого $a \in A$ та $P(d \|_{-\{\bar{u},\bar{w},x\}} + \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) + x \mapsto d(z)) = T$. Отже, $P(d \|_{-\{\bar{u},\bar{w},x\}} + \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) + x \mapsto a) = T$ для деякого $a \in A$, звідки $(\exists xP)(d(r^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(d)) = T$, тому отримуємо $R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP)(d) = T$, що дає $d \in \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP))$. Отже, $\boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(P)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z) \subseteq \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP))$.

Доводимо співвідношення $FR_{\perp}\exists R$. Нехай $d \in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z)$, тоді маємо $d(z)\downarrow$ та $R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP)(d) = F$. Із останнього отримуємо $(\exists xP)(d \|_{-\{\bar{u},\bar{w}\}} + \bar{u} \mapsto d(\bar{v})) = F$, тому для всіх $b \in A$ маємо $P(d \|_{-\{\bar{u},\bar{w},x\}} + \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) + x \mapsto b) = F$ Згідно з $d(z)\downarrow$ маємо $d(z)\downarrow a$ для деякого $a \in A$, тоді $P(d \|_{-\{\bar{u},\bar{w},x\}} + \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) + x \mapsto d(z)) = F$, звідки $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(P)(d) = F$, що дає $d \in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(P))$. Таким чином, $\boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z) \subseteq \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(P))$.

Із використанням теореми 3 отримуємо властивості елімінації кванторів під реномінацією.

$\exists R_{\perp\vdash}$) За умови $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi))$ маємо:

$R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$.

Доводимо $\Rightarrow$) Нехай $R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta$, тоді $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) = \varnothing$.

Згідно теореми 3 маємо $\boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) \subseteq \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A)$, тому $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) = \varnothing$.

Отже, $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$.

Доводимо $\Leftarrow$) Нехай $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$, звідси $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) = \varnothing$. Покажемо, що $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) = \varnothing$, звідки випливає $R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta$.

Припустимо супротивне:

$\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) = \varnothing$ та існує d таке: $d \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)$.

Маємо $d \in \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A)$, $d \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)$ та $d \in \boldsymbol{F}(\Delta_A)$. Із умови $d \in \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A)$ тоді маємо $d \|_{-\{\bar{u},\bar{w}\}} + \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) \in \boldsymbol{T}(\exists x\Phi_A)$, звідки для деякого $a \in A$ маємо $d \|_{-\{\bar{u},\bar{w},x\}} + \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) + x \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$. Але $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi))$ та $z \in V_T$, тому $d \|_{-\{\bar{u},\bar{w},x,z\}} + \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) + x \mapsto a + z \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$, $d \|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)$, $d \|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{F}(\Delta_A)$. Із першого отримуємо $d \|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)_A)$, за визначенням εz маємо $d \|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)$, тому $d \|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)$, що суперечить припущенню

$\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap (R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) = \varnothing$.

$\exists R_{\perp}$f$_{\dashv}$) За умови $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi))$ маємо:

$\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi), \varepsilon z$.

Доводимо $\Rightarrow$) Якщо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)$, то згідно U маємо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\ R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,z}(\Phi), \varepsilon z$.

Доводимо $\Leftarrow$) Припустимо супротивне: $\Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\ R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,z}(\Phi), \varepsilon z$, водночас маємо $\Gamma \not\models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)$. Із останнього маємо, що існує $d \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)_A)$. Тоді $d \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)$, $d \in \boldsymbol{F}(\Delta_A)$ та $d \in \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)_A)$.

Із умови $d \in \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)_A)$ маємо
$d\,\|_{-\{\bar u,\bar w\}} + \bar u \mapsto d(\bar v) \in \boldsymbol{F}(\exists x\Phi_A)$, звідки для всіх
$a \in A$ маємо $d\,\|_{-\{\bar u,\bar w,x\}} + \bar u \mapsto d(\bar v) + x \mapsto a \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$
Але $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi))$ та z тотально строго неістотне, тому для всіх $a \in A$ отримуємо:
$d\,\|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)$, $d\,\|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{F}(\Delta_A)$,
$d\,\|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)_A)$ та
$d\,\|_{-\{\bar u,\bar w,x,z\}} + \bar u \mapsto d(\bar v) + x \mapsto a + z \mapsto a \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$.

Із останнього маємо

$d\,\|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,z}(\Phi)_A)$, за визначенням εz тоді $d\,\|_{-z} + z \mapsto a \in F(\varepsilon z_A)$, тому для всіх $a \in A$ маємо $d\,\|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap$
$\cap\, \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)$. Це суперечить припущенню $\Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\ R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,z}(\Phi), \varepsilon z$.

$\exists R_\perp v_{\dashv}$) За умови $x \notin \{\bar u, \bar w\}$ маємо:

$\Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi), \varepsilon y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\ R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\Phi), \varepsilon y$.

Доводимо $\Rightarrow$) Якщо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi), \varepsilon y$, то згідно U маємо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\ R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\Phi), \varepsilon y$.

Доводимо $\Leftarrow$) Згідно теореми 3 маємо
$\boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A) \subseteq \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\Phi)_A)$, тому
$\boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A) \subseteq \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\Phi)_A) \cap$
$\cap\, \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A)$. Отже, з умови
$\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap$
$\cap\, \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A) = \varnothing$ випливає
$\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A) = \varnothing$,
тобто $\Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\ R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\Phi), \varepsilon y \Rightarrow$
$\Rightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi), \varepsilon y$.

$\exists R_\perp d_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)$ та $\Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\ R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\Phi), \varepsilon y$.

Доводимо $\Rightarrow$) Якщо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)$, то згідно U маємо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\ R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\Phi), \varepsilon y$ та $\varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)$.

Доводимо $\Leftarrow$) Припустимо супротивне:
$\varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)$ та
$\Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\ R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\Phi), \varepsilon y$, проте
$\Gamma \not\models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)$. Тоді маємо
$\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap F(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)_A) \neq \varnothing$, звідки існує
d таке, що $d \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)_A)$.

Можливі 2 випадки: $d(y)\uparrow$ та $d(y)\downarrow$.

Якщо $d(y)\uparrow$, то $d \in T(\varepsilon y)$, звідки
$d \in \boldsymbol{T}(\varepsilon y) \cap \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)_A)$, що суперечить умові $\varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)$.

Якщо $d(y)\downarrow$, то $d \in \boldsymbol{F}(\varepsilon y)$; нехай $d(y) = a$.

Із умови $d \in \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)_A)$ тоді отримуємо $d\,\|_{-\{\bar u,\bar w\}} + \bar u \mapsto d(\bar v) \in \boldsymbol{F}(\exists x\Phi_A)$. Звідси маємо $d\,\|_{-\{\bar u,\bar w,x\}} + \bar u \mapsto d(\bar v) + x \mapsto b \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$ для всіх $b \in A$, зокрема, $d\,\|_{-\{\bar u,\bar w,x\}} + \bar u \mapsto d(\bar v) + x \mapsto a \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$, тому $d\,\|_{-\{\bar u,\bar w,x\}} + \bar u \mapsto d(\bar v) + x \mapsto d(y) \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$, звідки $d \in \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\Phi)_A)$. Отже, $d \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap$
$\cap\, \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y)$, що суперечить $\Gamma \models \Delta, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\ R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\Phi), \varepsilon y$.

Окремими випадками властивостей $\exists R_{\perp\vdash}$, $\exists R_\perp f_{\dashv}$, $\exists R_\perp v_{\dashv}$, $\exists R_\perp d_{\dashv}$ є відомі [4] властивості елімінації кванторів $\exists_{\vdash}$, $\exists f_{\dashv}$, $\exists v_{\dashv}$, $\exists d_{\dashv}$.

Секвенційні числення ЧКНЛРР. Властивості відношення логічного наслідку для множин формул є семантичною основою побудови числень секвенційного типу для ЧКНЛРР. Назвемо їх $Q_\perp SC$-численнями.

Базовими секвенційними формами числення $Q_\perp SC$ є ${}_{\vdash}R_\perp T$, ${}_{\dashv}R_\perp T$, ${}_{\vdash}\Phi_\perp N$, ${}_{\vdash}\Phi_\perp N$, ${}_{\vdash}R_\perp\exists R$, ${}_{\dashv}R_\perp\exists R$, ${}_{\vdash}R\exists p$, ${}_{\dashv}R\exists p$, ${}_{\vdash}\neg$, ${}_{\dashv}\neg$, ${}_{\vdash}\vee$, ${}_{\dashv}\vee$, ${}_{\vdash}R_\perp R$, ${}_{\dashv}R_\perp R$, ${}_{\vdash}R_\perp\neg$, ${}_{\dashv}R_\perp\neg$, ${}_{\vdash}R_\perp\vee$, ${}_{\dashv}R_\perp\vee$, ${}_{\vdash}\exists$, ${}_{\vdash}\exists R_\perp$, ${}_{\dashv}\exists f$, ${}_{\dashv}\exists R_\perp f$, ${}_{\dashv}\exists v$, ${}_{\dashv}\exists R_\perp v$, ${}_{\dashv}\exists d$, ${}_{\dashv}\exists R_\perp d$.

Форми ${}_{\vdash}R\exists p$, ${}_{\dashv}R\exists p$, ${}_{\vdash}\neg$, ${}_{\dashv}\neg$, ${}_{\vdash}\vee$, ${}_{\dashv}\vee$, ${}_{\vdash}\exists$, ${}_{\dashv}\exists f$, ${}_{\dashv}\exists v$, ${}_{\dashv}\exists d$ такі ж, як для QSC-числень (див. [4]).

Форми ${}_{\vdash}R_\perp T$, ${}_{\dashv}R_\perp T$, ${}_{\vdash}\Phi_\perp N$, ${}_{\vdash}\Phi_\perp N$, ${}_{\vdash}R_\perp\exists R$, ${}_{\dashv}R_\perp\exists R$, ${}_{\vdash}R_\perp R$, ${}_{\dashv}R_\perp R$, ${}_{\vdash}R_\perp\neg$, ${}_{\dashv}R_\perp\neg$, ${}_{\vdash}R_\perp\vee$, ${}_{\dashv}R_\perp\vee$, ${}_{\vdash}\exists R_\perp$, ${}_{\dashv}\exists R_\perp f$, ${}_{\dashv}\exists R_\perp v$, ${}_{\dashv}\exists R_\perp d$ відрізняються від відповідних форм числення QSC лише наявністю розширених реномінацій.

Наведемо тут зазначені форми з розширеними реномінаціями.

$$ {}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{T}\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}R^{z,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{T}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\dashv}R^{z,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}; $$

$$ {}_{\vdash}\Phi_{\perp}\mathrm{N}\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}, \qquad {}_{\dashv}\Phi_{\perp}\mathrm{N}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\dashv}R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}, $$

де $y\in\nu(\Phi)$;

$$ {}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar z,\bar u}_{\bar v,\perp}(\exists xA),\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar z,\bar u,x}_{\bar v,\perp,y}(\exists xA),\Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar z,\bar u}_{\bar v,\perp}(\exists xA),\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar z,\bar u,x}_{\bar v,\perp,y}(\exists xA),\Sigma}; $$

$$ {}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{R}\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}\circ^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}(R^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi)),\Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{R}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}\circ^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}(R^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi)),\Sigma}; $$

$$ {}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}\neg\ \frac{{}_{\vdash}\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\neg\Phi),\Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}\neg\ \frac{{}_{\dashv}\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\neg\Phi),\Sigma}; $$

$$ {}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}\vee\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi)\vee R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Psi),\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi\vee\Psi),\Sigma}; $$

$$ {}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}\vee\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi)\vee R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Psi),\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi\vee\Psi),\Sigma}; $$

$$ {}_{\vdash}\exists\mathrm{R}_{\perp}\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,z}(\Phi),\ {}_{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\Sigma}, $$

де $z\in V_T$, $z\notin nm(\boldsymbol{\Sigma}, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)$;

$$ {}_{\dashv}\exists\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{f}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\ {}_{\dashv}R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,z}(\Phi),\ {}_{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\Sigma}, $$

де $z\in V_T$, $z\notin nm(\boldsymbol{\Sigma}, R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)$;

$$ {}_{\dashv}\exists\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{v}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\ {}_{\dashv}R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\Phi),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}. $$

Секвенційна форма ${}_{\dashv}\exists\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{d}$ має такий вигляд:

$$ \frac{{}_{\vdash}\varepsilon y,\ {}_{\dashv}R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\Sigma \qquad {}_{\dashv}R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\ {}_{\dashv}R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\Phi),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\Sigma}. $$

Можна додатково ввести похідні секвенційні форми, де фігурують похідні композиції розширеної квантифікації. Наприклад, враховуючи, що $\exists_{\perp}x\Phi$ – це скорочення для $\exists x\Phi\vee\mathrm{R}^{x}_{\perp}(\Phi)$, отримуємо форму елімінації розширеного квантора

$$ {}_{\vdash}\exists_{\perp}\ \frac{{}_{\vdash}R^{x}_{z}(\Phi),\ {}_{\dashv}\varepsilon z,\Sigma \qquad {}_{\vdash}R^{x}_{\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}\exists_{\perp}x\Phi,\Sigma}. $$

Дослідження секвенційних числень ЧКНЛРР буде продовжене в наступних роботах.

Висновки

В роботі досліджено семантичні властивості нових класів першопорядкових композиційно-номінативних логік часткових однозначних квазіарних предикатів. Характерною особливістю цих логік є використання композицій розширеної реномінації та розширеної квантифікації. Це дає змогу явно задавати відсутність значення для предметних імен, тобто вилучати з вхідних даних компоненти з певними іменами. Сформульовано та доведено критерій строго неістотності предметного імені, записаний з використанням розширених кванторів. Описано властивості відношення логічного наслідку для множин формул, що є семантичною основою побудови для таких логік числень секвенційного типу. Секвенційні форми цих числень, в яких фігурують композиції розширеної реномінації, наведено в роботі.

Проведене дослідження планується продовжити в плані побудови логік часткових неоднозначних предикатів із композиціями розширеної реномінації та розширеної квантифікації.

Список використаних джерел

1. *Nikitchenko M.S.*, *Shkilniak S.S.* Mathematical Logic and Theory of Algorithms. – Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet, 2008. – 528 p. (in Ukrainian).
2. *Nikitchenko M.S.*, *Shkilniak S.S.* First-Order Composition-Nominative Logics // Visnyk, Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2011. – № 4. – P. 176–185 (in Ukrainian).
3. *Shkilniak S.S.* First-Order Logics of Quasi-ary Predicates // Cybernetics and Systems Analysis. – 2010. – № 6. – P. 32–49 (in Russian).
4. *Nikitchenko M.S.*, *Shkilniak S.S.* Special Sequent Calculi of Pure First-order Composition-nominative Logics// Visnyk, Ser. Kibernetyka, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – V. 12. – P. 38–45 (in Ukrainian).
5. *Nikitchenko M.S.*, *Shkilniak O.S.*, *Shkilniak S.S.* Logics of partial predicates with extended renominations and quantifier // Visnyk, Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2013. – № 2. – P. 210–215 (in Ukrainian).
6. *Nikitchenko M.*, *Tymofieiev V.* Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics // Comm. in Comp. and Inf. Science. – Springer, 2012. – V. 347. – P. 89–110.

Надійшла до редколегії 28.03.2013