УДК 530.145

Барабаш О.В. [1], к.ф.-м.н., асистент.

Класичний аналог спіну в релятивістській теорії

В роботі досліджуються дві класичні теорії спіну: векторна та тензорна. Показано, що в усіх розглянутих випадках результати квантово-механічних обрахунків співпадають з теорією Баргмана-Мішеля-Телегді.

Ключові слова: *спін, теорія БМТ, рівняння Дірака.*

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: obar@univ.kiev.ua

O. V. Barabash[1], PhD

Classical analogue of the spin in relativistic theory.

Two classical spin theories: vector and tensor are investigated in the paper. It is shown that in all considered cases, the results of quantum-mechanical calculations coincide with the theory Bargmann-Michel-Telehdi.

Key Words: *spin, BMT theory, Dirac equation.*

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: obar@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С.М.

Класичний аналог квантового спіну

В класичній механіці спін частинки можна означити як її кутовий момент в системі відліку, де частинка знаходиться у спокої. Якщо частинка зі спіном **s** має ненульовий магнітний момент **μ**, то в присутності магнітного поля ***H*** виникає прецесія Лармора, яка в системі спокою частинки описується рівнянням (ми використовуємо систему одиниць, де *c=1*)

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = 2[\vec{\mu}\times\vec{H}], \qquad \vec{\mu} = \frac{g}{2}\frac{e}{2m}\vec{s} \tag{1}$$

g – множник Ланде. Релятивістське узагальнення рівняння (1) було зроблено Баргманом, Мішелем та Телегді (БМТ) [1]. В цій теорії спін описується 4-вектором S^{μ}, який визначається за своїм виглядом в системі спокою частинки

$$v = 0: \qquad S^{\mu} = (0, \vec{S}_0) \tag{2}$$

де $\vec{S}_0$ – спін нерухомої частинки. В довільній системі відліку, де швидкість частинки дорівнює ***v*** вектор S^{μ} буде мати вигляд

$$S^{\mu} = ((\vec{s}\vec{v}), \vec{s})$$

причому $S^{\mu}u_{\mu} = 0$, де $u_{\mu} = \dfrac{dx_{\mu}}{d\tau}$ – 4-вектор швидкості, τ – власний час. При такому описі коваріантний запис рівняння (1) має вигляд [1]

$$\frac{dS^{\mu}}{d\tau} = \frac{eg}{2m}F^{\mu\nu}S_{\nu} + \eta(A^{\nu}S_{\nu})u^{\mu}, \tag{3}$$

де $A^{\mu} = (e/m)F^{\mu\nu}u_{\nu}$ – 4-вектор прискорення, $\eta = g/2 - 1$.

Проте, опис спіну 4-вектором (2) не є єдиним можливим. Наприклад, можна описати спін за допомогою антисиметричного тензора другого рангу, який в системі спокою частинки визначається як

$$v = 0: \qquad S^{\mu\nu} = (\vec{0}, \vec{S}_0) \tag{4}$$

тобто $S^{0i} = 0$, $S^{ij} = \varepsilon_{ijk}(S_0)_k$. Зауважимо, що опис спіну за допомогою антисиметричного тензора не є чимось неприродним. Навпаки, в квантовій механіці оператор спіну $\vec{\Sigma}$ представляє собою просторові компоненти антисиметричного тензора $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$:

$$\sigma^{\mu\nu} = (i\vec{\alpha}, \vec{\Sigma}) = (2[\vec{\Sigma}\times\vec{\alpha}], \vec{\Sigma}),$$

де $\vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma}$ – оператор швидкості.

Вигляд тензора $S^{\mu\nu}$ в системі відліку, де частинка рухається зі швидкістю ***v*** отримується з (4) застосуванням перетворення Лоренца

$$S^{\mu\nu} = ([\vec{S}\times\vec{v}], \vec{S}), \quad S^{\mu\nu}u_{\nu} = 0.$$

З означень (2) та (4) випливає зв'язок між 4-вектором S^{μ} та тензором $S^{\mu\nu}$

$$S^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} S_{\alpha} u_{\beta}, \qquad (5а)$$

$$S^{\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} S_{\alpha\beta} u_{\gamma} \qquad (5б)$$

Використовуючи (5) та рівняння (3) можна отримати рівняння руху на $S^{\mu\nu}$

$$\frac{dS^{\mu\nu}}{d\tau} = \frac{eg}{2m}(S^{\alpha\mu} F_{\alpha}{}^{\nu} - S^{\alpha\nu} F_{\alpha}{}^{\mu}) - $$
$$-\eta(S^{\alpha\mu} u^{\nu} - S^{\alpha\nu} u^{\mu}) A_{\alpha}.$$

В теоретичному плані опис спіну за допомогою будь-якого з векторів ***s***, ***S*** чи $\boldsymbol{S_0}$ є задачею цілком еквівалентною, оскільки будь-який з них можна виразити через інший, зокрема

$$\vec{S} = \gamma \vec{S}_0 - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{S}_0 \vec{v})\vec{v},$$

$$\vec{s} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{S}_0 \vec{v})\vec{v} + \vec{S}_0, \qquad (6)$$

де $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}$ – релятивістській множник. В тривимірному вигляді рівняння руху на ***s*** та ***S*** в постійному однорідному магнітному полі ***H*** будуть мати вигляд

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{eg}{2\gamma m}[\vec{s} \times \vec{H}] - \eta\gamma^2(\vec{a}\vec{s})\vec{v} \qquad (7)$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{eg}{2\gamma m}[\vec{S} \times \vec{H}] + \eta\gamma^2(\vec{v}\vec{S})\vec{a} \qquad (8)$$

де $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{e}{m\gamma}[\vec{v} \times \vec{H}]$ – вектор прискорення.

В нерелятивістському випадку вектори ***s*** та ***S*** співпадають, в той час як в протилежному, ультрарелятивістському випадку вони відрізняються як за модулем, так і по напрямку. Тому виникає питання: який саме з векторів (***s***, ***S*** чи якійсь інший) вимірює експериментатор?

Експерименти з ультрарелятивістськими електронами (γ=25000) проводились ще в кінці 70-х років [2] з метою прецизійного вимірювання аномального магнітного моменту електрона (фактор η). Суть експерименту полягає в тому, що при русі електрона по колу в площині, що перпендикулярна до напрямку магнітного поля, вектор магнітного моменту (а значить і спіну) обертається по відношенню до напрямку швидкості з кутовою частотою $\omega = \eta \dfrac{eH}{m}$. Таким чином, знаючи з експерименту частоту прецесії ω можна порахувати η. Обраховане за цією схемою значення η співпало з аналогічним значенням, отриманим спін-резонансним методом, в якому електрон тривалий час утримується в електромагнітній пастці (і тому є нерелятивістським).

Наведене вище значення ω було отримано з рівняння (7). В той же час, неважко переконатися, що рівняння (8) приводить до точно такого ж значення частоти прецесії. Таким чином, обидві теорії (векторна та тензорна) однаково гарно можуть пояснити результати вищезгаданих експериментів і тому вибір між теоріями за цими даними зробити неможливо. В даній роботі це питання розглядається теоретично на основі рівняння Дірака.

Квантовий спін.

Як відомо, в релятивістській квантовій механіці правильну одночастинкову інтерпретацію має лише парна частина оператора фізичної величини. При наявності зовнішніх полів обрахунок парної частини оператора викликає, як правило, значні математичні труднощі. Тому, ми застосували іншій підхід, оснований на тому, що середнє значення парної частини оператора співпадає з середнім значенням повного оператора, якщо усереднення проводити на чистих зарядових станах. Нижче розглянуто три випадки: 1) вільна частинка, 2) частинка в однорідному магнітному полі та 3) частинка в електричному полі. В кожному з цих випадках обраховується значення вектора спіну та порівнюється з векторною та тензорною теоріями.

Вільна частинка.

В системі відліку де частинка знаходиться у спокої її хвильова функція має вигляд:

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-(i/\hbar)mt}, \qquad \psi_0{}^{+}\psi_0 = 1.$$

В цій системі відліку

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{\hbar}{2}\psi_0{}^{+}\Sigma\psi_0 = \frac{\hbar}{2}\varphi_0{}^{+}\vec{\sigma}\varphi_0 \equiv \vec{S}_0 .$$

Перейдемо тепер в систему відліку, де частинка рухається зі швидкістю ***v***. Відповідну хвильову функцію позначимо ψ.

$$\psi = L(v)\psi_0 = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{E+m}\varphi_0 \end{pmatrix} e^{i/\hbar(px-Et)},$$

де $L(v)$ – оператор лоренцевого бусту. При цьому

$$\psi^{+}\psi = \gamma , \tag{9}$$

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{\hbar}{2}\psi^{+}\vec{\Sigma}\psi = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{S}_0\vec{v})\vec{v} + \vec{S}_0 .$$

Порівнюючи отриманий вираз з (6) бачимо, що він узгоджується з теорією БМТ і не узгоджується з тензорною теорією.

Постійне магнітне поле.

Розглянемо рух частинки в однорідному магнітному полі. Виберемо вісь z вздовж напрямку поля. Хвильова функція вільної частинки в циліндричних координатах (аксіальне калібрування) має вигляд

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad \varphi = e^{il\varphi}e^{ip_z z/\hbar}R(\rho)\varphi_0 ,$$

$$\chi = \frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi})}{E+m}\varphi ,$$

де $R(\rho)$ – радіальна частина хвильової функції, значення якої для нас не суттєве, φ_0 – власний вектор оператора σ_z з власним значенням λ: $\sigma_z\varphi_0 = \lambda\varphi_0$.

Обрахуємо спочатку середнє значення проекції спіну на напрямок магнітного поля.

$$\left\langle \Sigma_z \right\rangle = \lambda(\varphi,\varphi) + (\chi,\sigma_z\chi) = \lambda(\varphi,\varphi) + \frac{1}{(E+m)^2}\times$$
$$\times[(2\lambda p_z^2 + e\hbar H)(\varphi,\varphi) - \lambda(\varphi,\pi^2\varphi)].$$

Для подальшого спрощення скористаємось рівнянням руху

$$\pi^2\varphi = (e\hbar(\vec{\sigma}\vec{H}) + E^2 - m^2)\varphi ,$$

з якого знаходимо

$$(\varphi,\pi^2\varphi) = (e\hbar\lambda H + E^2 - m^2)(\varphi,\varphi) .$$

Умова нормування (9) дає

$$(\psi,\psi) = \frac{2\gamma}{\gamma+1}(\varphi,\varphi) = \gamma$$

звідки отримуємо

$$(\varphi,\varphi) = \frac{\gamma+1}{2} .$$

Збираючи все разом знаходимо

$$\left\langle \Sigma_z \right\rangle = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{S}_0\vec{v})v_z + (S_0)_z ,$$

де $\vec{S}_0 = \lambda\vec{e}_z$. Середні значення від поперечних (до напрямку магнітного поля) компонент спину дорівнюють нулю.

$$\left\langle \Sigma_{x,y} \right\rangle = \frac{2\lambda p_z}{(E+m)^2}(\varphi,\pi_{x,y}\varphi) =$$

$$= \frac{2\lambda p_z}{(E+m)^2}(\varphi,\hat{p}_{x,y}\varphi) = 0 .$$

В результаті знову приходимо до рівності

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{S}_0\vec{v})\vec{v} + \vec{S}_0 ,$$

що співпадає з теорією БМТ.

Постійне електромагнітне поле. Друге релятивістське наближення.

Як відомо, в електричному полі стає можливим процес народження пар частинка-античастинка. Тому хвильова функція втрачає свій одночастинковий смисл і розглянута вище схема усереднення оператора спіну стає некоректною. Тому поступимо інакше. Застосуємо друге релятивістське наближення до теорії Паулі. Перевага такого підходу полягає в тому, що при описі електрона двокомпонентним спінором ефекти народження пар відсутні (в будь-якому порядку по *v/c*). Це пов’язано з тим, що в двокомпонентній теорії відсутні розв’язки з від'ємною енергією. Гамільтоніан частинки (з

$g=2$) в електромагнітному полі має вигляд [3]

$$H_2 = \frac{\vec{\pi}^2}{2m} + eA_0 - \frac{e\hbar}{2m}(\vec{\sigma}\vec{H}) - \frac{\vec{p}^4}{8m^3} -$$

$$- \frac{e\hbar}{4m^2}(\vec{\sigma},[\vec{E}\times\vec{\pi}]).$$

Двокомпонентну хвильову функцію (яка є власним вектором гамільтоніану H_2) будемо позначати φ_s. Означимо квазірелятивістський оператор спіну $\hat{s}$ рівністю

$$(\varphi_s, \hat{s}\varphi_s) = (\psi, \gamma\vec{\Sigma}\psi), \quad (\psi,\psi) = 1. \qquad (10)$$

Множник γ в (10) необхідний для виконання умови нормування (9). Спінор φ_s пов'язаний з біспінором ψ співвідношеннями [3]

$$\varphi_s = \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2}\right)\varphi,$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x},t) \\ \chi(\vec{x},t) \end{pmatrix} e^{-(i/\hbar)mt},$$

$$\chi = \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{2m}\varphi.$$

Підставляючи ці вирази в означення (10) після перетворень знаходимо

$$\hat{s} = \gamma\left(\vec{\sigma} + \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})\vec{p} - \vec{p}^2\vec{\sigma}}{2m^2}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{2m}\right)\left(\vec{\sigma} + \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})\vec{p} - \vec{p}^2\vec{\sigma}}{2m^2}\right) = \vec{\sigma} + \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})\vec{p}}{2m^2}.$$

Цей оператор задовольняє рівнянню руху

$$\frac{d\hat{s}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{s}, H_2] = \frac{e}{m^2}\vec{E}(\vec{\sigma}\vec{p}) + \frac{e}{m}[\vec{\sigma}\times\vec{H}]$$

яке в другому порядку по v/c співпадає з рівнянням на спін в теорії БМТ:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{e}{\gamma m}((\vec{s}\vec{v})\vec{E} + [\vec{s}\times\vec{H}]).$$

Висновки

В рамках класичної механіки релятивістське узагальнення спіну можна проводити по-різному: спін можна розглядати як просторові компоненти 4-вектора (псевдовектора) або як просторові компоненти антисиметричного тензора (та іншими способами). Ці описи нееквівалентні між собою – величина спіну та його динаміка в різних теоріях буде різною. Надати перевагу якійсь одній теорії в рамках класичної механіки неможливо. В той же час, в квантовій механіці поняття спіну є добре означеним і допускає квазикласичний опис. В роботі досліджуються три випадки: вільна частинка, частинка в однорідному магнітному полі та частинка в електромагнітному полі. В усіх трьох випадках було знайдено, що квазикласичний вектор спіну описується теорією БМТ.

Список використаних джерел

1. Bargmann V., Michel L., Telegdi V.L. Precession of the Polarization of Particles Moving in a Homogeneous Electromagnetic Field // Phys. Rev. Lett. – 1959. – Vol. 2. – P. 435–436.
2. Combley F., Farley F.J. M., Field J.H., Picasso E. g – 2 Experiments as a Test of Special Relativity // Phys. Rev. Lett. – 1979. – Vol. 42. – P. 1383–1385.
3. *Davydov A.S.* Quantum mechanics. – Moscow: Fizmatgiz, 1963. – 543 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 12.04.13