УДК 539.3

Кушнір Р. М.[1], д. ф.-м. н., проф., член-кор. НАН України,
Попович В. С.[1], д. т. н., проф.

Про визначення усталеного термопружного стану багатошарових структур за високотемпературного нагрівання

На прикладі багатошарової пластини ілюструється методика визначення усталеного термопружного стану багатошарових структур за високотемпературного їх нагрівання внутрішніми джерелами тепла та складного (конвективного, променевого чи конвективно-променевого) теплообміну із оточуючими середовищами через обмежуючі поверхні. Ця методика ґрунтується на класичному математичному апараті, через що є доступною для застосування сучасним інженерам.

Ключові слова: багатошарова пластина, термочутливий матеріал, температура, температурні напруження.

[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-Б, e-mail: dyrector@iapmm.lviv.ua; dept19@iapmm.lviv.ua

R. M. Kushnir[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Cor. Memb. of NASU,
V. S. Popovych[1], Dr. Sci. (Tech.), Prof.

On determination of steady thermoelastic state of multilayered structures under high-temperature heating

On the example of multilayered plate method of determining the steady thermoelastic state of multilayered structures under high-temperature their heating by internal heat sources and complex (convective, radiant or convective-radiant) heat exchange with the environment through the limiting surfaces is illustrated. This method is based on the classical mathematical apparatus because it is understandable for the application by modern engineers.

Key Words: multilayered plate, heat-sensitive material, temperature, thermal stressed.

[1] Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU, 79060, L'viv, Naukova 3-b, e-mail: dyrector@iapmm.lviv.ua; dept19@iapmm.lviv.ua

Для адекватного визначення розподілу температури та компонент термопружного стану в шаруватих елементах конструкцій, які працюють в умовах високотемпературного нагрівання використовують модель термочутливого тіла (враховує залежність характеристик матеріалу та коефіцієнтів теплообміну від температури) [1-3]. При цьому, визначенню компонент статичного чи квазістатичного напружено-деформованого стану передує знаходження відповідного розподілу температури, який визначають з нелінійної задачі теплопровідності. Переважно цю задачу частково лінеаризують шляхом введення змінної Кірхгофа. При визначенні стаціонарних температурних полів в отриманій на змінну Кірхгофа задачі нелінійними будуть умови, отримані із рівності температур на межах контакту сусідніх шарів, та умови, отримані з умов складного (конвективного, променевого чи конвективно-променевого) теплообміну із зовнішніми середовищами через обмежуючі поверхні. В роботах [4, 5] пропонується методика побудови розв'язків таких задач, яка істотно використовує апарат узагальнених функцій і незалежно від кількості шарів зводить проблему до розв'язання (залежно від умов теплообміну на обмежуючих поверхнях) одного або системи двох нелінійних алгебричних рівнянь, розв'язування яких слід здійснити числовими методами. При цьому відкритим залишається принципове питання вибору початкового наближення шуканих розв'язків.

Нижче, на прикладі багатошарової пластини з плоско паралельними межами поділу ілюструється методика розв'язання таких задач, в якій використовується класичний математичний апарат, через що є широкодоступною та простою в застосуванні. Вона, залежно від умов теплообміну на зовнішніх поверхнях, дозволяє отримати точний розв'язок або звести проблему до числового розв'язання одного нелінійного алгебричного рівняння зі зрозумілим способом вибору початкового наближення його розв'язку.

Формулювання задачі

Розглянемо n-шарову пластину (рис. 1), на кожній з обмежувальних поверхонь $z = z_1$ і

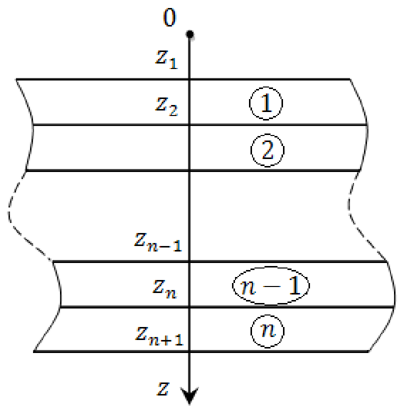

Рис. 1. n-шарова пластина

$z = z_{n+1}$ якої задані сталі температури чи теплові потоки або умови конвективного, променевого чи конвективно-променевого теплообміну із зовнішніми середовищами сталих температур. Між ізотропними контактуючими шарами, коефіцієнти теплопровідності яких є різні і залежать від температури, існує ідеальний тепловий контакт. У кожному із шарів наявні рівномірно розподілені по нормальних до осі z площинах джерела тепла. Стаціонарне температурне поле такої пластини описує система рівнянь теплопровідності [1, 6]

$$\frac{d}{dz}\left[\lambda_t^{(i)}(t_i)\frac{dt_i}{dz}\right] = -W_i(z)\,, \quad i=\overline{1,n}\,, \qquad (1)$$

з умовами контакту сусідніх шарів

$$t_i\big|_{z=z_{i+1}} = t_{i+1}\big|_{z=z_{i+1}}\,, \quad i=\overline{1,n-1}\,, \qquad (2)$$

$$\lambda_t^{(i)}(t_i)\frac{dt_i}{dz}\bigg|_{z=z_{i+1}} = \lambda_t^{(i+1)}(t_{i+1})\frac{dt_{i+1}}{dz}\bigg|_{z=z_{i+1}}\,, \quad i=\overline{1,n-1}\,, \qquad (3)$$

де t_i – абсолютна температура, а $\lambda_t^{(i)}(t_i)$ – залежний від температури коефіцієнт теплопровідності i-го шару пластини, $W_i(z)$ – густина джерел тепла в i-му шарі. Для повного формулювання математичної моделі для визначення температури багатошарової пластини до (1) – (3) слід долучити умови на обмежувальних поверхнях, можливі варіанти яких розглянемо дещо пізніше.

Для зручності подальших викладок введемо безрозмірні температури $T_i = t_i/t_0$ та координату $\bar{z} = z/l_0$, де t_0 і z_0 вибрані нами відлікова температура та характерний розмір. Коефіцієнти теплопровідності шарів подано у вигляді $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_0^{(i)}\lambda_*^{(i)}(T_i)$, де множники з нуликом – сталі величини, які мають розмірності коефіцієнта теплопровідності, а з зірочкою – безрозмірні функції, що описують залежності коефіцієнтів теплопровідності від безрозмірних температур. Зауважимо, що у довідковій літературі, залежності характеристик матеріалів від температури, переважно, наводять у табличному вигляді. Для використання у теоретичних дослідженнях, у більшості випадків, їх апроксимують певними аналітичними виразами (лінійними, квадратичними і т. інше), використовуючи при цьому для відшукання невідомих параметрів апроксимації метод найменших квадратів.

Нехай коефіцієнти теплопровідності матеріалів шарів задані у діапазоні температур $[t_p, t_k]$. Тоді, найбільш поширену, лінійну апроксимацію їх температурної залежності можна подати у вигляді

$$\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_0^{(i)}\left[1 + k_i(T_i - T_p)\right], \qquad (4)$$

де $\lambda_0^{(i)}$ – значення коефіцієнтів теплопровідності матеріалів шарів при мінімальній температурі T_p з діапазону їх задання.

Густини джерел тепла W_i подамо у вигляді $W_i = w_0^{(i)} w_*^{(i)}(\bar{z})$, де $w_0^{(i)}$ – розмірні величини, а $w_*^{(i)}(\bar{z})$ – безрозмірні функції, що описують просторовий розподіл джерел тепла.

У введених безрозмірних величинах рівняння (1) та умови контакту (2) і (3) набувають вигляду

$$\frac{d}{dz}\left[\lambda_*^{(i)}(T_i)\frac{dT_i}{d\bar{z}}\right] = -Po_i w_*^{(i)}(\bar{z})\,, \quad i=\overline{1,n}\,, \qquad (5)$$

$$T_i\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} = T_{i+1}\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}}\,, \quad i=\overline{1,n-1}\,, \qquad (6)$$

$$\lambda_0^{(i)}\lambda_*^{(i)}(T_i)\frac{dT_i}{d\bar{z}}\bigg|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} = \lambda_0^{(i+1)}\lambda_*^{(i+1)}(T_{i+1})\frac{dT_{i+1}}{d\bar{z}}\bigg|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}}\,,$$
$$i=\overline{1,n-1}\,, \qquad (7)$$

де $\bar{z}_i = z_i/l_0$, $Po_i = w_0^{(i)} l_0^2 / (t_0 \lambda_0^{(i)})$ – критерій Померанцева.

Через залежності коефіцієнтів теплопровідності від шуканих температур рівняння (5) та умови (7) є нелінійними. Для їх лінеаризації скористаємось перетворенням Кірхгофа [1, 6]

$$\theta_i = \int_{T_p}^{T_i} \lambda_*^{(i)}(T_i)\,dT_i\,. \qquad (8)$$

У результаті рівняння (5) та умови (7) трансформуються у лінійні на змінні Кірхгофа

$$\frac{d^2\theta_i}{d\bar{z}^2} = -Po_i w_*^{(i)}(\bar{z}), \quad i=\overline{1,n}, \tag{9}$$

$$\lambda_0^{(i)} \frac{d\theta_i}{d\bar{z}}\bigg|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} = \lambda_0^{(i+1)} \frac{d\theta_{i+1}}{d\bar{z}}\bigg|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}}, \ i=\overline{1,n-1}. \tag{10}$$

У той же час у результаті перетворення Кірхгофа з лінійних умов (6) отримуємо наступні нелінійні умови:

$$T_i(\theta_i)\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} = T_{i+1}(\theta_{i+1})\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}}, \quad i=\overline{1,n-1}, \tag{11}$$

де $T_i(\theta_i)$ – вирази температури через змінні Кірхгофа. Їх вигляд для конкретних залежностей $\lambda_*^{(i)}(T_i)$ отримуємо з рівняння (8). Так, якщо залежності коефіцієнтів теплопровідності мають вигляд (4), то $\lambda_*^{(i)}(T_i) = 1 + k_i(T_i - T_p)$ і

$$\theta_i = T_i - T_p + \frac{k_i}{2}(T_i - T_p)^2, \quad i=\overline{1,n}. \tag{12}$$

Розв'язавши рівняння (12) відносно T_i, отримаємо вирази температури через змінні Кірхгофа

$$T_i(\theta_i) = \frac{\sqrt{1+2k_i\theta_i} - 1}{k_i} + T_p, \quad i=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Зауважимо, що з двох можливих знаків перед коренем квадратним у формулі (13) вибрали той, який відповідає фізичній суті задачі (при $k_i \to 0$ (нетермочутливі шари) $\theta_i \to T_i - T_p$).

Перетворимо дещо умови рівності температур на межі контакту сусідніх шарів (11). Із виразів змінних Кірхгофа для i-го і $i+1$-го шарів маємо

$$\frac{2}{k_i}\Big[\theta_i - (T_i - T_p)\Big]_{\bar{z}=\bar{z}+1} = (T_i - T_p)^2\Big|_{\bar{z}=\bar{z}+1},$$

$$\frac{2}{k_{i+1}}\Big[\theta_{i+1} - (T_{i+1} - T_p)\Big]_{\bar{z}=\bar{z}+1} = (T_{i+1} - T_p)^2\Big|_{\bar{z}=\bar{z}+1}. \tag{14}$$

З умов (6) слідує, що праві частини рівностей (14) однакові, а отже справедливими є рівності

$$\frac{1}{k_{i+1}}\Big[\theta_{i+1} - (T_{i+1} - T_p)\Big]_{\bar{z}=\bar{z}+1} = \frac{1}{k_i}\Big[\theta_i - (T_i - T_p)\Big]_{\bar{z}=\bar{z}+1},$$

з яких отримуємо наступні умови:

$$\left(\theta_{i+1} - \frac{k_{i+1}}{k_i}\theta_i\right)\bigg|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} = \left(1 - \frac{k_{i+1}}{k_i}\right)\left(T_{i+1}(\theta_{i+1})\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} - T_p\right) =$$

$$\overset{\text{або}}{=} \underline{(1 - k_{i+1}/k_i)(T_i(\theta_i)\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} - T_p)}, \quad i=\overline{1,n-1}. \tag{15}$$

Зауважимо, що вигляд умов (15), які рівносильні умовам (11), не є єдиним. Так, виходячи з виразів змінних Кірхгофа для i-го і $i+1$-го шарів та використовуючи умови (6) отримуємо умови типу (15) у вигляді

$$(\theta_{i+1} - \theta_i)\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} = \frac{k_{i+1} - k_i}{k_i}\Big[T_{i+1}(\theta_{i+1})\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} - T_p\Big]^2 \overset{\text{або}}{=}$$

$$\underline{= \frac{k_{i+1} - k_i}{k_i}\Big[T_i(\theta_i)\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} - T_p\Big]^2}, \quad i=\overline{1,n-1}. \tag{16}$$

Побудова розв'язку задачі на змінні Кірхгофа

Інтегруючи двічі рівняння (9) знаходимо, що

$$\frac{d\theta_i}{d\bar{z}} = c_{i1} - Po_i w_i(\bar{z}), \tag{17}$$

а $\quad \theta_i = c_{i1}(\bar{z} - \bar{z}_i) + c_{i2} - Po_i \bar{w}_i(\bar{z}), \quad i=\overline{1,n}, \qquad (18)$

де

$$w_i(\bar{z}) = \int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}} w_*^{(i)}(\xi)d\xi, \quad \bar{w}_i(\bar{z}) = \int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}} w_i(\eta)d\eta,$$

c_{ij}, $j=1,2$, – сталі інтегрування.

Для визначення сталих інтегрування поступаємо так. Вважаємо сталі інтегрування, наприклад, першого шару c_{1j} (назвемо їх базовими) відомими величинами. Покажемо, що використовуючи умови контакту сусідніх шарів (10) і (15) або (16), всі решта сталі інтегрування c_{ij} ($i=\overline{2,n}$ $j=1,2$) виражаються через вибрані базові. Дійсно, з умов (10) знаходимо, що

$$c_{i1} = \frac{1}{\lambda_0^{(i)}}\left[\lambda_0^{(i)} c_{11} - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_0^{(i)} Po_j w_j(\bar{z}_{j+1})\right] \ (i=\overline{2,n}). \tag{19}$$

Задовольняючи умови (15) (підкреслений варіант), враховуючи при цьому, що $\theta_i(\bar{z}_i) = c_{i2}$, отримуємо рекурентне співвідношення

$$c_{i+1,2} = \frac{k_{i+1}}{k_i}\theta_i(\bar{z}_{i+1}) + \left(1 - \frac{k_{i+1}}{k_i}\right)\Big(T_i\big(\theta_i(\bar{z}_{i+1})\big) - T_p\Big)$$

$$(i=\overline{1,n-1}). \tag{20}$$

З (20) бачимо, що стала інтегрування

$$c_{22}=\frac{k_2}{k_1}\theta_1(\bar{z}_2)+\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right)\left(T_1\left(\theta_1(\bar{z}_2)\right)-T_p\right),$$

де $\theta_1(\bar{z}_2)=c_{11}(\bar{z}_2-\bar{z}_1)+c_{12}-Po_1\,\bar{w}_1(\bar{z}_2)$ виражається через базові сталі.

Подібно до того стала

$$c_{32}=\frac{k_3}{k_2}\theta_2(\bar{z}_3)+\left(1-\frac{k_3}{k_2}\right)\left(T_2\left(\theta_2(\bar{z}_3)\right)-T_p\right),$$

де $\theta_2(\bar{z}_3)=c_{21}(\bar{z}_3-\bar{z}_2)+c_{22}-Po_2\bar{w}_2(\bar{z}_3)$. Оскільки сталі c_{21} і c_{22} виражаються через базові c_{11} і c_{12}, то і стала c_{32} виражається через них. Так продовжуючи можна виписати вирази всіх решта сталих $c_{42},\ldots,\ c_{n2}$ через базові сталі c_{11} і c_{12}.

Якщо сталі інтегрування $c_{i2}\,(i=\overline{2,n})$ визначити з умов (16) (підкреслений варіант), то змінні Кірхгофа матимуть вигляд (18), де

$$c_{i+1,2}=\theta_i(\bar{z}_{i+1})+\frac{k_{i+1}-k_i}{k_i}\left(T_i\left(\theta_i(\bar{z}_{i+1})\right)-T_p\right)^2$$
$$(i=\overline{1,n-1})\,. \qquad (21)$$

Нескладними перетвореннями можна показати, що вирази (20) і (21) є тотожними.

У знайдених виразах змінних Кірхгофа (18) невідомими залишаються дві базові сталі інтегрування, для визначення яких слід використати умови теплообміну на обмежувальних поверхнях. Розглянемо можливі їх варіанти.

1. Нехай обмежувальна поверхня $z=z_1$ підтримується при сталій температурі, тобто $t_1\big|_{z=z_1}=t_{c1}$. У безрозмірних величинах ця умова має вигляд

$$T_1\big|_{\bar{z}=\bar{z}_1}=T_{c1}\,, \qquad (22)$$

а записана через змінну Кірхгофа

$$\theta_1\big|_{\bar{z}=\bar{z}_1}=\theta_{c1}\,, \qquad (23)$$

де

$$T_{c1}=t_{c1}/t_0\,,\ \theta_{c1}=T_{c1}-T_p+(k_1/2)\left(T_{c1}-T_p\right)^2.$$

Задовольняючи дану умову знаходимо, що $c_{12}=\theta_{c1}$.

На другій обмежувальній поверхні можуть бути задані:

а) стала температура t_{cn}. У безрозмірних величинах дана гранична умова має вигляд

$$T_n\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{n+1}}=T_{cn}\,, \qquad (24)$$

а через змінну Кірхгофа для n-го шару вона запишеться

$$\theta_n\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{n+1}}=\theta_{cn}\,, \qquad (25)$$

де

$$T_{cn}=t_{cn}/t_0\,,\ \theta_{cn}=T_{cn}-T_p+(k_n/2)\left(T_{cn}-T_p\right)^2.$$

З умови (25) отримуємо рівняння

$$(\bar{z}_{n+1}-\bar{z}_n)c_{n1}(c_{11})+c_{n2}(c_{11},c_{12})\big|_{c_{12}=\theta_{c1}}=$$
$$=Po_n\bar{w}_n(\bar{z}_{n+1})+\theta_{cn} \qquad (26)$$

для визначення сталої c_{11}.

б) сталий тепловий потік q_n, а саме $\lambda_t^{(n)}(t_n)\times \times dt_n/dz\big|_{z=z_{n+1}}=q_n$.

У безрозмірних величинах ця умова набуває вигляду

$$\lambda_*^{(n)}(T_n)\frac{dT_n}{d\bar{z}}\bigg|_{\bar{z}=\bar{z}_{n+1}}=Ki_n\,, \qquad (27)$$

а через змінну Кірхгофа для n-го шару вона запишеться так:

$$\frac{d\theta_n}{d\bar{z}}\bigg|_{\bar{z}=\bar{z}_{n+1}}=Ki_n\,, \qquad (28)$$

де $Ki_n=q_nl_0\big/(t_0\lambda_0^{(n)})$ – критерій Кірпічова.

У цьому випадку з умови (28) знаходимо, що

$$c_{11}=\frac{1}{\lambda_0^{(1)}}\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_0^{(j)}Po_jw_j(\bar{z}_{j+1})+$$
$$+\frac{\lambda_0^{(n)}}{\lambda_0^{(1)}}\left[Po_nw_n(\bar{z}_{n+1})+Ki_n\right],$$

а отже отримуємо точний аналітичний розв'язок задачі.

в) конвективно-променевий теплообмін з середовищем сталої температури t_{cn}, а саме

$$\left[\lambda_t^{(n)}(t_n)\frac{dt_n}{dz}+\alpha_n(t_n)(t_n-t_{cn})+\right.$$
$$\left.+\sigma\varepsilon(t_n)(t_n{}^4-t_{cn}{}^4)\right]_{z=z_{n+1}}=0\,,$$

де $\alpha_n(t_n)$, $\varepsilon(t_n)$ – залежні від температури коефіцієнт теплообміну через поверхню $z=z_{n+1}$ та ступінь чорноти даної поверхні, які подібно до коефіцієнтів теплопровідності подаємо у вигляді $\alpha_n(t_n) = \alpha_n^0 \alpha_n^*(T_n)$, $\varepsilon(t_n) = \varepsilon_0 \varepsilon^*(T_n)$. У безрозмірних величинах умова конвективно-променевого теплообміну набуває вигляду

$$\left[\lambda_t^{(n)}(T_n) \frac{dT_n}{d\bar{z}} + Bi_n \alpha_n^*(T_n)(T_n - T_{cn}) + \right.$$

$$\left. + Sk \varepsilon^*(T_n)(T_n{}^4 - T_{cn}{}^4) \right]_{\bar{z}=\bar{z}_{n+1}} = 0, \quad (29)$$

де $Bi_n = \alpha_n^0 l_0 / \lambda_0^{(n)}$ – критерій Біо, $Sk_n = \sigma\varepsilon_0 l_0 t_0^3 / \lambda_0^{(n)}$ – критерій Старка.

Через змінну Кірхгофа для n-го шару умова (29) запишеться наступним чином:

$$\left[\frac{d\theta_n}{d\bar{z}} + q_{n+1}\left(T_n(\theta_n)\right) \right]_{\bar{z}=\bar{z}_{n+1}} = 0, \quad (30)$$

де

$$q_{n+1}\left(T_n(\theta_n)\right) = Bi_n \alpha_n^*\left(T_n(\theta_n)\right)(T_n(\theta_n) - T_{cn}) +$$

$$+ Sk_n \varepsilon^*\left(T_n(\theta_n)\right)(T_n{}^4(\theta_n) - T_{cn}{}^4).$$

З умови (30) отримуємо рівняння

$$\lambda_0^{(1)} \frac{c_{11}}{\lambda_0^{(n)}} + \left[q_n\left(T_n\left(\theta_n \big|_{\bar{z}=\bar{z}_{n+1}} \right)\right)\right]_{c_{12}=\theta_{c1}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_0^{(n)}} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_0^{(j)} Po_j w_j(\bar{z}_{j+1}) + Po_n w_n(\bar{z}_{n+1}) \quad (31)$$

для визначення сталої інтегрування c_{11}. Зауважимо, що поклавши в рівнянні (31) $Sk_n = 0$ отримаємо з нього рівняння для визначення сталої c_{11} у випадку суто конвективного, а при $Bi_n = 0$ – суто променевого теплообміну на обмежувальній поверхні $z = z_{n+1}$.

2. Нехай на обмежувальній поверхні $z = z_1$ заданий сталий потік q_{10}. Тоді відповідна умова на цій поверхні записана через змінну Кірхгофа має вигляд

$$\left. \frac{d\theta_1}{dz} \right|_{z=z_1} = -Ki_1, \quad (32)$$

де $Ki_1 = q_{10} l_0 / (t_0 \lambda_0^{(1)})$. З умови (32) знаходимо, що $c_{11} = -Ki_1$. Сталу c_{12} визначаємо з умови теплообміну на поверхні $\bar{z} = \bar{z}_{n+1}$. При заданні на цій поверхні умови конвективно-променевого теплообміну (30), із неї для визначення сталої c_{12} отримуємо рівняння

$$\left[q_{n+1}\left(T_n\left(\theta_n \big|_{\bar{z}=\bar{z}_{n+1}} \right)\right)\right]_{c_{11}=-Ki_1} = \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(n)}} Ki_1 +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_0^{(1)}} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_0^{(j)} Po_j w_j(\bar{z}_{j+1}) + Po_n w_n(\bar{z}_{n+1}). \quad (33)$$

3. Нехай розглядувана пластина через поверхні $z = z_1$ і $z = z_{n+1}$ конвективно-променевим способом обмінюється теплом з зовнішніми середовищами, температури яких t_{c1} і t_{cn} відповідно. Тоді умова теплообміну на поверхні $z = z_1$, записана через змінну Кірхгофа для першого шару, має вигляд

$$\left[\frac{d\theta_1}{d\bar{z}} - q_1\left(T_1(\theta_1)\right) \right]_{\bar{z}=\bar{z}_1} = 0, \quad (34)$$

де

$$q_1\left(T_1(\theta_1)\right) = Bi_1 \alpha_1^*\left(T_1(\theta_1)\right)(T_1(\theta_1) - T_{c1}) +$$

$$+ Sk_1 \varepsilon^*\left(T_1(\theta_1)\right)(T_1^4(\theta_1) - T_{c1}{}^4),$$

$$Bi_1 = \frac{\alpha_1^0 l_0}{\lambda_0^{(1)}}, \quad Sk_1 = \frac{\sigma\varepsilon_0 l_0 t_0^3}{\lambda_0^{(1)}}.$$

Умова теплообміну на поверхні $z = z_{n+1}$ має вигляд (30). З умови (34) отримуємо рівняння

$$c_{11} - q_1\left(T_1\left(\theta_1(\bar{z}_1)\right)\right) = 0. \quad (35)$$

Оскільки $\theta_1(\bar{z}_1) = c_{12}$, то вираз $q_1\left(T_1\left(\theta_1(\bar{z}_1)\right)\right)$ в рівнянні (35) не містить сталої c_{11}, а отже,

$$c_{11} = q_1(c_{12}). \quad (36)$$

Враховуючи співвідношення (36), з граничної умови (30) отримуємо алгебричне рівняння для визначення сталої інтегрування c_{12}:

$$\lambda_0^{(1)} / \lambda_0^{(n)} q_1(c_{12}) + \left[q_{n+1}\left(T_n\left(\theta_n(\bar{z}_{n+1})\right)\right)\right]_{c_{11}=\lambda_0^{(1)} q_1(c_{12})} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_0^{(n)}} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_0^{(j)} Po_j w_j(\bar{z}_{j+1}) + Po_n w_n(\bar{z}_{n+1}). \quad (37)$$

Отже, ми розглянули всі можливі варіанти умов теплообміну на обмежуючих поверхнях багатошарової термочутливої пластини. У випадку задання на одній обмежуючій поверхні температури, а на іншій – теплового потоку отримано точний аналітичний розв'язок розглядуваної нелінійної задачі теплопровідності (варіант 1б). У всіх інших випадках граничних умов проблему зведено до визначення одної з базових сталих інтегрування з нелінійного алгебричного рівняння. Для його розв'язання можна скористатися числовими методами, вибравши за початкове наближення невідомої сталої її значення у розв'язку аналогічної задачі для нетермочутливої багатошарової пластини.

За відомими змінними Кірхгофа температуру у шарах пластини обчислюємо за формулами (13).

Визначення термопружного стану

Дві ненульові компоненти тензора напружень $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, які спричинить знайдений одновимірний розподіл температури $T(\bar{z})$ можна обчислити за формулами, наведеними у працях [1, 3, 5].

При цьому розподіл температури та залежності модуля Юнга $E(\bar{z}, T)$, коефіцієнта Пуассона $\nu(\bar{z}, T)$ та температурного коефіцієнта лінійного розширення $\alpha_t(\bar{z}, T)$ слід подати у вигляді

$$\chi(\bar{z}, T) = \chi_1(T_1) + \sum_{i=1}^{n} \big(\chi_i(T_i) - \chi_{i-1}(T_{i-1})\big) S(\bar{z} - \bar{z}_{i+1}),$$

де $S(\cdot)$ - одинична функція Хевісайда.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки в рамках наукового проекту за спільним конкурсом НАН України і РФФД на 2012-2013 рр.

Список використаних джерел

1. *Kushnir R. M., Popovych V. S.* Thermoelasticity of Thermosensitive Solids. – L'viv: Spolom, 2009. – 412 p. (in Ukrainian).
2. *Noda N.* Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties: Thermal Stresses I / R. B. Hetnarski (ed.). – 1986. – P. 391-483.
3. *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R.* and *Oka N.* Transient Heat Conduction and Thermal Stress Problems of a Nonhomogeneous Plate with Temperature-Dependent Material Properties // Journal of Thermal Stresses. – 1996. – 19. – No. 1. – P. 77-102.
4. *Kushnir R. M., Protsiuk Yu. B.* Thermoelastic State of Layered Thermosensitive Bodies of Revolution for the Quadratic Dependence of the Heat-Conduction Coefficients // Materials Science. – 2010. – Vol. 46, No. 1. – P. 1-15.
5. *Protsyuk Yu. B.* Static Thermoelasticity Problems for Layered Thermosensitive Plates with Cubic Dependence of the Coefficients of Heat Conductivity on Temperature // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 181, No. 4. – P. 481-496.
6. *Kushnir R. M., Popovych V. S.* Heat Conduction Problems of Thermosensitive Solids under Complex Heat Exchange: Heat Conduction – Basic Research / V. S. Vikhrenko (ed.). – In Tech, 2011. – P. 131-154.

Надійшла до редколегії 30.04.13