УДК 532.5

Голіченко О.Л., аспірант

Рух рідини всередині циліндра при переключенні швидкості на границі.

В статті розглянуте перемішування в'язкої, однорідної, нестисливої рідини при малих числах Рейнольдса в скінченому круговому циліндрі. Задача розглядається в рамках моделі Стокса. Перемішування відбувається за рахунок періодичного переключення швидкостей на верхній і нижній границях циліндра. Наведена оцінка впливу нестаціонарності рівнянь руху при переключенні швидкостей на границі. Розглянутий вплив періоду переключення на якість перемішування.

Ключові слова: Скінченний циліндр, наближення Стокса, перемішування рідини.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е, e-mail: Golichenko_O_L@mail.ru

Oleksandr L.Golichenko, PhD student

Fluid flow inside the cylinder with switching velocity at the boundary

Mixing of viscous, homogeneous, incompressible fluid at low Reynolds numbers inside the finite circular cylinder is considered. Stokes approximation is used to present the fluid flow field. The mixing is due to periodic switching speeds at the upper and lower boundaries of the cylinder. The evaluation of the impact of equation non-stationarity at switching velocity on the border is given. The influence of a swtch time period on the quality mixing is studied.

Key words: Finite cylinder, Stokes approximation, mixing of fluid

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4e, e-mail: Golichenko_O_L@mail.ru

Статтю представив член редколегії професор, д.ф.-м.н. Маципура В.Т.

Постановка задачі

В статті розглядається перемішування нестисливої, в'язкої, однорідної рідини всередині скінченного кругового циліндра при малих числах Рейнольдса (Рис. 1а). В циліндричних координатах циліндр з рідиною займає область $r \in [0,1]$, $z \in [-h,h]$, $\theta \in [0,2\pi)$. Бічна поверхня циліндра $r = 1$ нерухома, в той час як верхня і нижня стінки $z = \pm h$ рухаються в постійною швидкістю, що змінюється через кожний проміжок часу T. Для опису руху рідини використовується наближення стокса.

$$\mu \nabla^2 \vec{\mathrm{u}} = \nabla \mathrm{p}, \quad \nabla \vec{\mathrm{u}} = 0 \tag{1}$$

де $\vec{\mathrm{u}}$ – векторне поле швидкості, p – скалярне поле тиску, μ – динамічна в'язкість. Граничні умови мають вигляд:

$$\begin{cases} \mathrm{u_r}(\theta,z)=0 \\ \mathrm{u}_\theta(\theta,z)=0 \\ \mathrm{u_z}(\theta,z)=0 \end{cases} r=1 \quad \begin{cases} \mathrm{u_r}(r,\theta)=\mathrm{U}^{\pm}_{\mathrm{rp}}\cos(\theta) \\ \mathrm{u}_\theta(r,\theta)=\mathrm{U}^{\pm}_{\mathrm{rp}}\sin(\theta) \\ \mathrm{u_z}(r,\theta)=0 \end{cases} z=\pm h \tag{2}$$

де $U_{гр}$ - деяка константа. Надалі буде зустрічатися 3 види граничних умов. Для першого (рис.1b) $U_{гр} = \pm 1$ при $z = \pm h$. Для другого (рис.1c) $U_{гр} = 1$ при $z = \pm h$. Для третього (рис.1d) $U_{гр} = 1$ при $z = h$ і $U_{гр} = 0$ при $z = -h$.

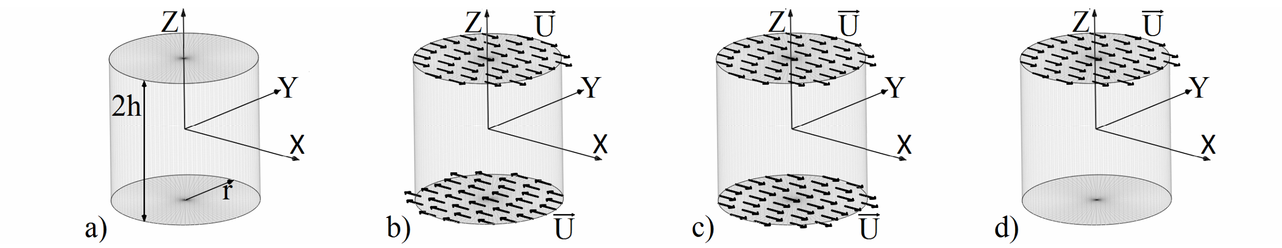

Рис. 1. Геометрія циліндричної області а), та граничні умови, що розглядаються b) - d).

Вплив процесу переключення швидкостей на границі на рух рідини всередині циліндра.

В момент переключення швидкостей на границі циліндра рідина всередині циліндра переходить від одного стаціонарного руху (що відповідає границним умовам до переключення) до іншого (що відповідає граничним умовам після переключення). Під час цього переходу рух рідини не є стаціонарним і потребує додаткового аналізу. Розглянемо рівняння Навьє-Стокса, що описує всі рухи однорідної, нестисливої, вязкої рідини:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)\vec{V} = \nu \Delta \vec{V} - \frac{1}{\rho}\nabla p \tag{3}$$

де $\vec{V} = \left(V_x, V_y, V_z\right)$ - швидкість рідини, ν - кінематична вязкість, ρ - густина рідини і p - тиск рідини. В безрозмірних координатах $t^{бр} = \frac{U_{гр}}{r}t$, $\vec{V}^{бр} = \frac{\vec{V}}{U_{гр}}$, $p^{бр} = \frac{r}{\mu \cdot U_{гр}}p$, де $U_{гр}$ - характерна швидкість рідини на границі (2), r - радіус циліндра, рівняння (3) прийме вигляд:

$$\mathrm{Re}\frac{\partial \vec{V}^{бр}}{\partial t^{бр}} + \mathrm{Re}\left(\vec{V}^{бр} \cdot \nabla\right)\vec{V}^{бр} = \Delta \vec{V}^{бр} - \nabla p^{бр} \tag{4}$$

де $\mathrm{Re} = \frac{r \cdot U_{гр}}{\nu}$ - число Рейнольдса. Ми розглядаємо рух рідини при малих числах Рейнольдса $\mathrm{Re} << 1$, тому доданком $\mathrm{Re}\left(\vec{V}^{бр} \cdot \nabla\right)\vec{V}^{бр}$ можна знехтувати. Оскільки миттєва зміна швидкості на границі циліндра спричиняє великі значення похідної швидкості по часу всередині циліндра $\left|\partial V^{бр} / \partial t^{бр}\right| >> 1$, то одразу ж знехтувати доданком $\mathrm{Re}\left(\partial V^{бр} / \partial t^{бр}\right)$ і отримати наближення Стокса (1) не можна. Розглянемо рівняння:

$$\mathrm{Re}\frac{\partial \vec{V}^{бр}}{\partial t^{бр}} - \Delta \vec{V}^{бр} = -\nabla p^{бр} \tag{5}$$

і оціними швидкість рідини і відстань яку пройдуть частинки рідини при переході від одного стаціонарного руху до іншого.

Розглянемо рух рідини під дією рівняння (5) в прямокутній області Ω (рис.2) з нульовими граничними умовами $\vec{V}^{бр}\left(x, y, z, t\right)\big|_{\partial\Omega} = 0$, і деякою швидкістю $\vec{V}_0^{бр}\left(x, y, z\right)$ в початковий момент часу $\vec{V}^{бр}\left(x, y, z, 0\right) = \vec{V}_0^{бр}\left(x, y, z\right)$.

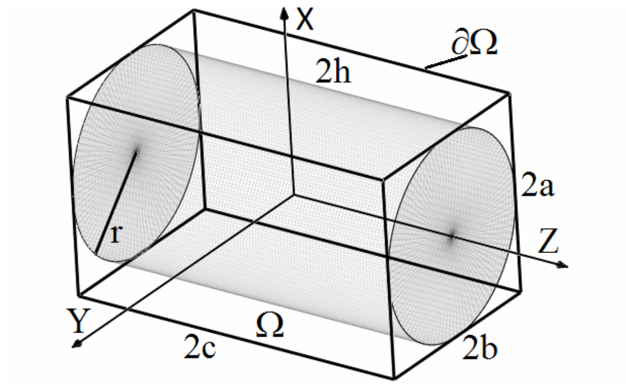

Рис. 2. Прямокутна область і вписаний в неї циліндр.

За допомогою методу розділення зміних [1] знаходимо швидкість рідини в усі наступні моменти часу .

$$\vec{V}_{np}^{бр}\left(x, y, z, t\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{2a}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi \cdot k}{2b}\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi \cdot l}{2c}\left(z + \frac{\pi}{2}\right)\right) \times$$
$$\times\left(V_{0,n,k,l}e^{-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\left(\frac{\pi \cdot n}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi \cdot k}{2b}\right)^2 + \left(\frac{\pi \cdot l}{2c}\right)^2\right)t} + \int_0^t e^{-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\left(\frac{\pi \cdot n}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi \cdot k}{2b}\right)^2 + \left(\frac{\pi \cdot l}{2c}\right)^2\right)(t-\tau)} \nabla p_{n,k,l}\, d\tau\right)$$

Фізичний зміст доданку зі знаком інтегралу є вплив внутрішніх джерел тиску всередині розглядуваної області на швидкість рідини. Оскільки всередині разглядуваної області немає внутрішніх джерел тиску, то і доданок з інтегралом дорівнює нулю:

$$\vec{V}_{np}^{бр}\left(x, y, z, t\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} V_{0,n,k,l}e^{-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\left(\frac{\pi \cdot n}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi \cdot k}{2b}\right)^2 + \left(\frac{\pi \cdot l}{2c}\right)^2\right)t} \times \cdot$$
$$\times \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{2a}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi \cdot k}{2b}\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi \cdot l}{2c}\left(z + \frac{\pi}{2}\right)\right) \tag{6}$$

З принципу максимума [1] для рівнянь параболічного типу випливає, що $\left|\vec{V}_{np}^{бр}\left(x, y, z, t\right)\right| \le \left|\vec{V}_0^{бр}\left(x, y, z\right)\right|$. Таким чином з формули (6) бачимо, що швидкість експоненційно прямує до нуля. Крім того видно, що величина швидкості переважно визначається першими членами ряду (6). Тому щоб оцінити порядок швидкості достатньо оцінити перший член ряду:

$$\left|V_{0,1,1,1}\cdot e^{-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\cdot\frac{\pi^2 t}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{a}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{c}\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right|\le$$
$$\le\left|V_{0,1,1,1}\right|\cdot e^{-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\cdot\frac{\pi^2 t}{4}} \qquad (7)$$

За весь час частинка під дією швидкості (7) пройде шлях:

$$S=\int_0^{\infty}\left|V_{0,1,1,1}\right|\cdot e^{-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\cdot\frac{\pi^2 t}{4}}dt=\left|V_{0,1,1,1}\right|\frac{4\,\mathrm{Re}}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\cdot\pi^2} \qquad (8)$$

З формули (6) також видно, що чим менший розмір має розглядувана область, тим швидше швидкість рідини всередині області прямує до нуля. Тому верхні оцінки швидкості отримані для прямокутної області будуть справедливі і для циліндричної області вписаної в прямокутноу область, для якої ці оцнки були отрмині (Рис.2). Отже всі одержані для прямокутної області оцінки будут справедливі і для циліндричної області з радіусом r і висотою $2h$, якщо покласти $a=b=r$, $c=h$.

Враховуючи лінійність рівняння (5), після переключення швидкостей на границі циліндра (в момент часу $t=0$), швидкість рідини всередині циліндра дорівнюватиме $\vec{V}^{бр}(x,y,z,t)=\vec{V}^{бр}_{п.п}(x,y,z)+$ $+\vec{V}^{бр}_{пер}(x,y,z,t)$, де $\vec{V}^{бр}_{п.п}(x,y,z)$ - стаціонарний рух рідини, що відповідає граничним умовам після переключення. $\vec{V}^{бр}_{пер}(x,y,z,t)$ - рух рідини всередині циліндра з нульовими граничними умовами і початковою швидкісю $\vec{V}^{бр}_{0}(x,y,z)=$ $=\vec{V}^{бр}_{д.п}(x,y,z)-\vec{V}^{бр}_{п.п}(x,y,z)$, де $\vec{V}^{бр}_{д.п}(x,y,z)$ - стаціонарний рух рідини, що відповідає граничним умовам до переключення. Вплив переходу від одного стаціонарного руху до іншого і описується швидкістю $\vec{V}^{бр}_{пер}(x,y,z,t)$, для якої справедливі одержані раніше оцінки (6) (7) і (8). Таким чином для циліндру з $r=1$, $h=1$, швидкостями на границі до переключення $U_{гр\,д.п}=1$, після переключення $U_{гр\,п.п}=-1$, заповненого вязкою рідиною з $\mathrm{Re}=10^{-3}$ будемо мати, що в момент часу $t=2\cdot10^{-3}$ після переключення $\vec{V}^{бр}_{пер}(x,y,z,t)$ має порядок 10^{-7} і продовжує сменшуватися за експонентою, а загальна відстань яку пройде частинка рідини під дією $\vec{V}^{бр}_{пер}(x,y,z,t)$ має порядок 10^{-4}-10^{-3}. Отже одержані оцінки дозволяють нехтувати впливом на рух рідини всередині циліндра процесу переходу від стаціонарного руху, що відповідає граничним умовам до переключення, до стаціонарного руху, що відповідає граничним умовам після переключення, і вважати, що такий перехід відбувається миттєво і швикості всередині циліндра змінюються миттєво.

Принцип дії механізму перемішування за допомогою переключення швидкостей на границі

Надалі будемо розглядати рух рідини лише в площині $y=0$ (рис.1) всередині циліндра. Для розглядуванних граничних умов, одержанні для площини $y=0$ результати можна розповсюдити на весь циліндр (як в роботі [2]). Поле швидкостеі рідини всередині циліндра детально досліджувалось в роботі [2]. Для граничних умов (Рис.1b), (Рис.1c) і (Рис.1d) воно зображене на (рис.3).

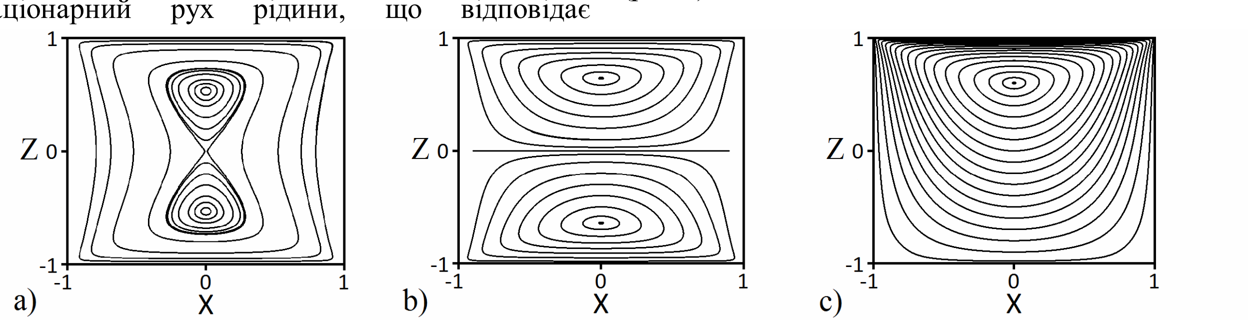

Рис. 3. Лінії току всередині циліндра в площині $y=0$ для граничних умов з (рис.1). a) для граничних умов (рис.1b); b) для граничних умов (рис.1c); c) для граничних умов (рис.1d).

Стаціонарні лінії току повністю визначають траєкторії частинок рідини. Тому пляма рідини не може вийти за межі області границя якої утворена лініями току, що дотикаються до плями (рис. 4).

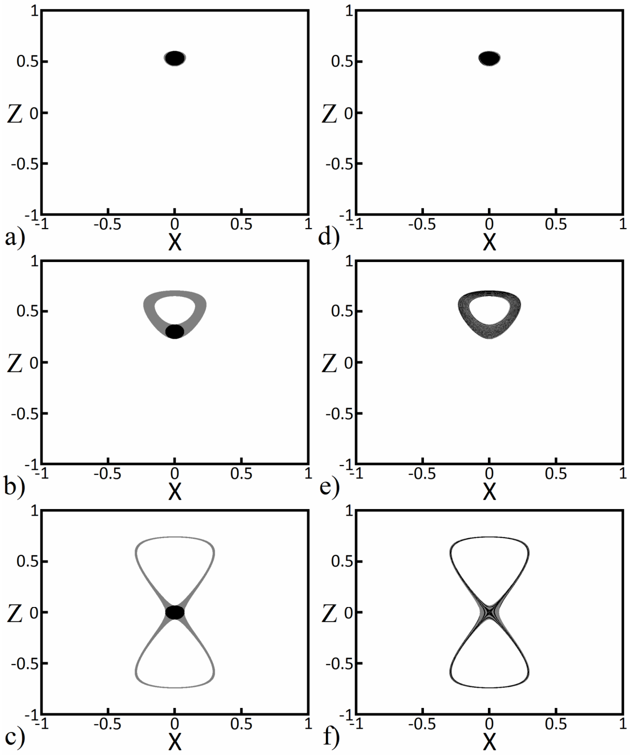

Рис. 4. Рух різних плям рідини всередині циліндра, в площині $y = 0$, для граничних умов з рис1.b. Чорний колір – пляма, що рухається. Сірий колір – область обмежена лініями току, що дотикаються до плями. В початковий момент пляма є колом з радіусом $r = 0.07$. a) $t = 0$, центр плями $x = 0$, $z = 0.533$; b) $t = 0$, центр плями $x = 0$, $z = 0.3$; c) $t = 0$, центр плями $x = 0$, $z = 0$; d) (рис. 4a) при $t = 72$; e) (рис. 4b) при $t = 72$; f) (рис. 4c) при $t = 72$

Вивести рідину за лінію току можна лише «розірвавши» її, тобто змінивши поле швидкостей всередині циліндра. Для цього будемо почергово «переключати» швидкість на границі через фіксований проміжок часу T . Швидкість на границі буде переключатися між граничними умовами (рис.1b) та (рис.1c). Для $T = 5$ зміна області обмеженої дотичними лініями току, при кожному переключенні зображено на (рис. 5).

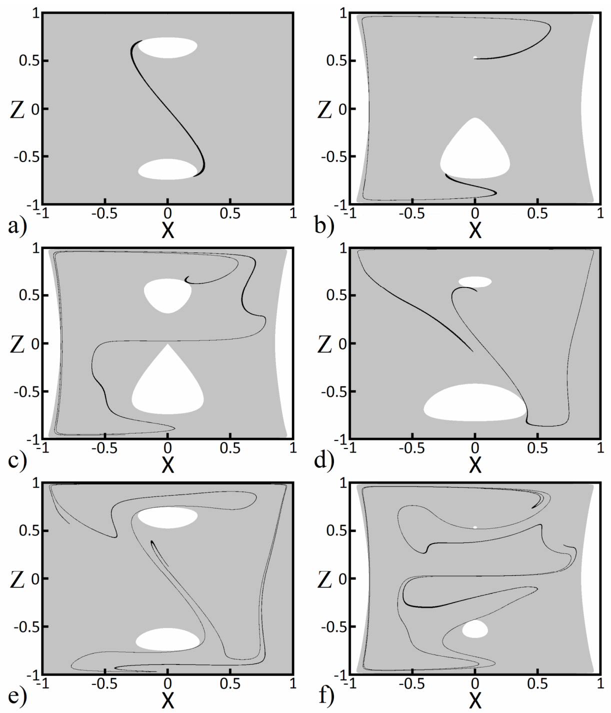

Рис.5. Положення плями рідини (чорний колір) і області утвореної дотичними до плями лініями току (сірий колір) в площині $y = 0$ в моменти переключення швидкості на границі для плями, що в початковий момент $t = 0$ зображена на (рис.4c). a) $t = 5$; b) $t = 10$; c) $t = 15$; d) $t = 20$; e) $t = 25$; f) $t = 30$

Таким чином бачимо, що переключення швидкості на границі дозволяє, за рахунок періодичної зміни ліній току, розмазати пляму рідини в тих областях циліндра, куди б вона не змогла потрапити без переключення.

Вплив періоду переключення на перемішування рідини

Розглянемо, як впливає період переключення швидкості на границі T на перемішування рідини всередині циліндра, при переключенні між граничними умовами (рис. 1b) та (рис. 1c). В стаціонарному полі рух частинки повністю визначається лінією тока. Оскільки, для довільного періоду T , невідомо на яку нову лінію тока потрапить точка під час зміни поля швидкості, замість лінії тока, дослідимо перерізи Пуанкаре цієї точки (координати точки в моменти закінчення переключення швидкостей на границі). Для різних періодів переключення T , для точки (0,0) матимемо картину зображену на (рис.6).

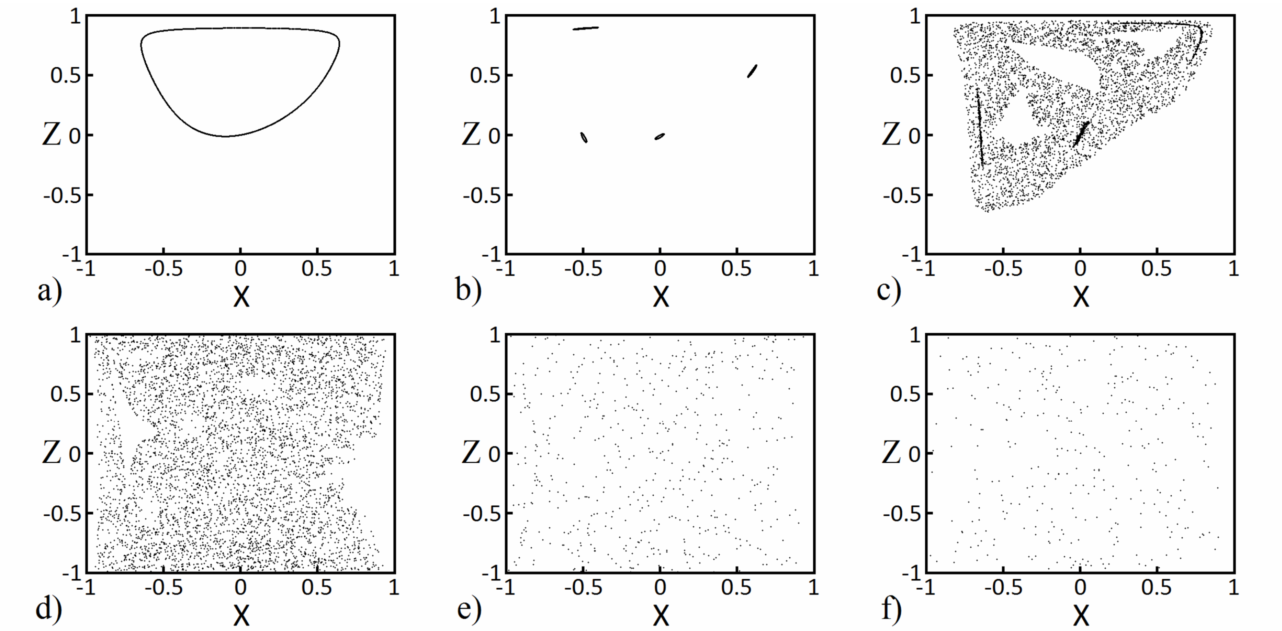

Рис.6. Перерізи Пуанкаре, в площині $y=0$, для точки, що в початковий момент часу $t=0$ знаходиться в центрі цилідра $x=0$, $z=0$ для різних періодів переключення T. a) $T=0.5$; b) $T=1.5$; c) $T=2.3$; d) $T=6$; e) $T=10$; f) $T=15$; Для кожного малюнку точка пойшла 5000 періодів T.

Оскільки для різних точок циліндра, при одному і тому ж періоді переключення T, перерізи Пуанкаре можуть принципово відрізнятися, то побудуємо ці перерізи не лише для однієї точки, а для цілого набору точок (рис. 7)

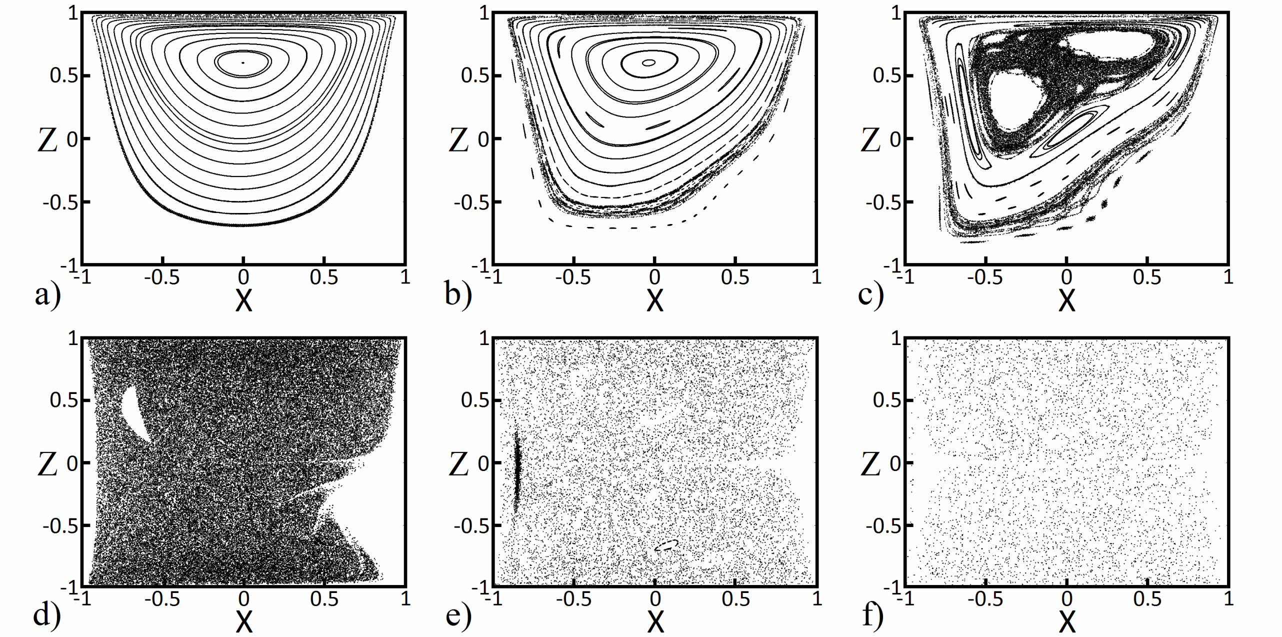

Рис.7. Перерізи Пуанкаре, в площині $y=0$, для набору точок, що в початковий момент часу $t=0$ знаходиться на лінії цилідра $x=0$, для різних періодів переключення T. a) $T=0.1$; b) $T=1$; c) $T=2$; d) $T=5$; e) $T=10$; f) $T=20$; Для кожного малюнку точки пойшли 5000 періодів T.

Бачимо, що для малих періодів переключення (рис. 7a) перерізи Пуанкаре точок співпадають з лініями току (рис. 3c) для граничних умов (рис. 1d). Граничні умови (рис. 1d) є сумою граничних умов (рис. 1b) і (рис. 1c). Як наслідок рух рідини всередині циліндра при граничних умовах (рис.

1d) для малих T подібний до суми рухів всередині циліндра при граничних умовах (рис. 1b) і (рис. 1c). Тут проявляється лінійність вихідних рівнянь (1). Як результат дуже малі періоди переключення швидкості на границі створюють всередині циліндра рух подібний до стаціонарного, що не сприяє ефективному перемішуванню плями по усьому циліндрі. При подальшому збільшені періоду T (рис. 7b) і (рис. 7c) перерізи Пуанкаре у вигляді ліній починають деформуватися і руйнуватися. З'являються області, в яких в моменти переключення швидкостей точка займає не якусь лінію, а цілу область. При деякому значенні періоду T перерізи Пуанкаре у вигляді ліній руйнуються і точки займають увесь циліндр (рис. 7d). Така картина перерізів Пуанкаре свідчить про найефективніше перемішування рідини всередині циліндра. При подальшому збільшені T густина точок в перерізі Пуанкаре падає (рис. 7e) і (рис. 7f), що свідчить про те, що перемішування відбувається по всьому циліндрі але його ефективність за часом падає. Підтвердженням одержаних результатів є положення однієї і тієї ж плями в один і той же момент часу при різних значеннях T (рис. 8).

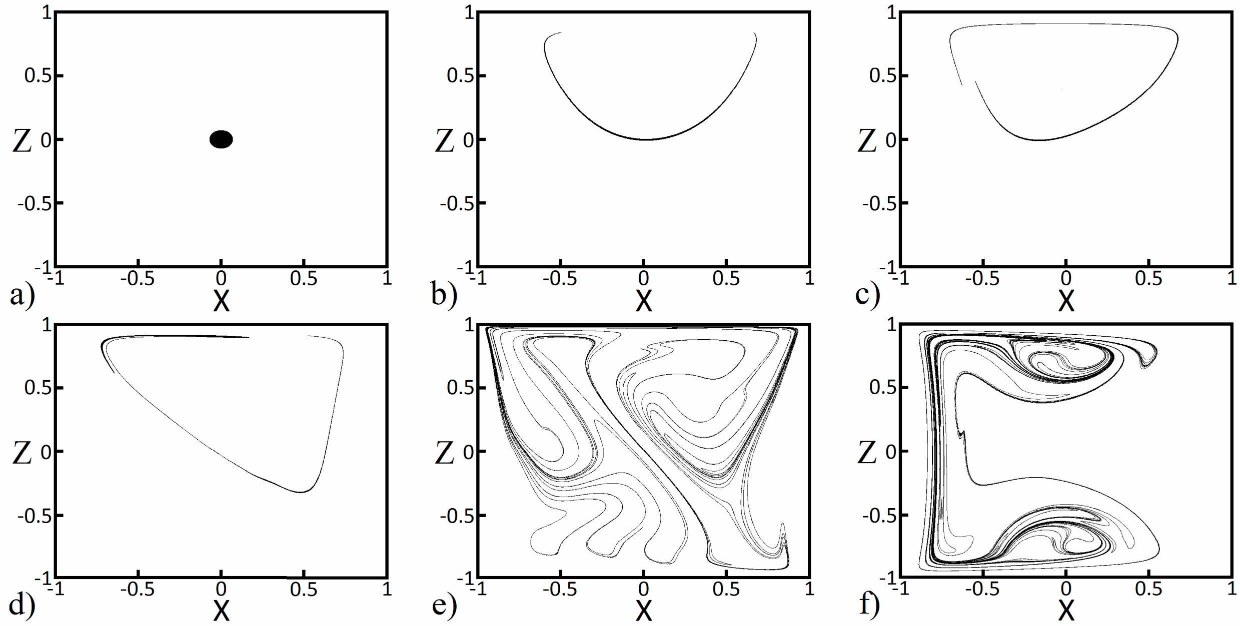

Рис. 8. Положення круглої плями a) в момент часу $t = 54$ для різних періодів переключення швидкості на границі T, в площині $y = 0$. b) $T = 0.1$; c) $T = 1$; d) $T = 2$; e) $T = 5$; f) $T = 10$.

Висновки

Одержані в роботі результати показують, що переключення швидкості на границях циліндру є ефективним механізмом перемішування рідини всередині циліндра, дозволяючи рідині змінювати стаціонарні лінії току. Показано, що при малих числах Рейнольдса зміну швидкості всередині циліндра можна вважати миттєвою. Доведено, що вибір періоду переключення швидкостей на границі суттєво впливає на процес перемішування рідини. При занадто малих періодах зміни швидкості, перемішування не є ефективним. При занадто великих періодах зміни швидкості, ефективне перемішування рідини потребує більше часу, ніж при оптимальних періодах.

Список використаних джерел

1. Tihonov A.N. The equation of mathematical physics/ A.N. Tihonov, A.A. Samarskiy – Moscow: Nauka, 1977 – 735
2. Golichenko O.L. Fluid flows in the finite circular cylinder/ O.L. Golichenko, V.S. Malyuga // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. Kyiv – 2013 – 2 – pp 61-64 (in Ukrainian)

Надійшла до редколегії 26.09.2013