УДК 517.9

Константінов О. Ю.[1] к.ф.-м.н., доц.,
Грінік Ю. М.[2]

Істотний спектр однієї нееліптичної граничної задачі

Вивчається істотний спектр одного матричного диференціального оператора.

Ключові слова: істотний спектр, матричний диференціальний оператор

[1] *Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е, e-mail: konstant12@yahoo.com*

[2] *Київський національний університет технологій та дизайну, 01011, м. Київ, вул. Немировича-Данченка 2, e-mail: yura.grinyk@gmail.com*

O. Yu. Konstantinov[1], Ph. D., associate professor,
Yu. M. Grinyk[2]

The essential spectrum of one non-elliptic boundary value problem

We study the essential spectrum of one matrix differential operator.

Key words: essential spectrum, matrix differential operator

[1] *Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4e, e-mail: konstant12@yahoo.com*

[2] *Kyiv National University of Technologies and Design, 01011, Kyiv, Nemirovich-Danchenko st., 2, e-mail: yura.grinyk@gmail.com*

Статтю представив академік НАНУ, д. ф.-м. н., проф. Перестюк М.О.

1 Вступ

Робота продовжує і узагальнює дослідження [9, 10, 5, 2, 3] присвячені вивченню істотного спектру класу матричних диференціальних операторів змішаного порядку, пов'язаного з однією моделлю магнітогідродинаміки.

Нехай Ω обмежена ліпшицева область в $\mathbb{R}^N$, додатні функції a, ρ задовольняють умову Ліпшиця на $\overline{\Omega}$. Розглянемо в ваговому гільбертовому просторі $\mathcal{H}_N := (L_2(\Omega, \rho(x)dx))^N$ диференціальний оператор

$$Af = -\rho^{-1}\nabla\rho a \operatorname{div} f$$

з областю визначення

$$D(A) := \{ f \in \mathcal{H}_N \mid \operatorname{div} f \in H^1(\Omega), \nu\cdot f|_{\partial\Omega} = 0 \}.$$

Тут $H^1(\Omega)$ – соболівський простір, $\operatorname{div} f$ розуміється в сенсі узагальнених функцій, ν – вектор зовнішньої нормалі до границі області Ω. Зауважимо, що A невід'ємний самоспряжений оператор в $\mathcal{H}_N$. Позначимо через B оператор множення в $\mathcal{H}_N$ на діагональну матрицю з неперервними на $\overline{\Omega}$ комплекснозначними функціями b_1, b_2,..., b_N на діагоналі. Нехай $c_1, c_2 : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ — ліпшицеві функції на $\overline{\Omega}$, $d : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ неперервна на $\overline{\Omega}$. У просторі $\mathcal{H} := \mathcal{H}_N \times \mathcal{H}_1 = (L_2(\Omega, \rho(x)dx))^{N+1}$ розглянемо матричний диференціальний оператор

$$L^0 = \begin{pmatrix} A+B & -i\rho^{-1}\nabla\rho c_1 \\ -ic_2 \operatorname{div} & d \end{pmatrix}$$

з областю визначення $D(L^0) := D(A) \times H^1(\Omega)$. Оператор L^0 має замикання (див. [9]), яке позначатимемо через L. Через $\sigma(T)$ ($\sigma_{\text{ess}}(T)$) будемо позначати спектр (істотний спектр) оператора T. Позначимо

$$\mathcal{T} := \bigcup_{x\in\overline{\Omega}} \operatorname{conv}(\{b_1(x), b_2(x), ..., b_N(x)\}), \qquad (1)$$

де $\operatorname{conv}(F)$ опукла оболонка множини F. Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 1.

$$\sigma_{ess}(L) = \mathcal{T} \cup \left(d - \frac{c_1c_2}{a}\right)(\overline{\Omega}). \qquad (2)$$

Зауважимо, що у випадку $N = 2$ твердження Теореми 1 було отримано в [2], випадок загального N і дійсної діагональної матриці B розглянуто в [3]. В [5] для $N = 2$ висліджувався оператор L з недіагональною матрицею B.

2 Доведення теореми 1

Нехай P — ортопроектор на підпростір

$$\mathcal{L} := \operatorname{Ker} A = \{ f \in \mathcal{H}_N \mid \operatorname{div} f = 0, \nu \cdot f|_{\partial\Omega} = 0\}$$

простору $\mathcal{H}_N$, а U —звуження оператора PBP на $\mathcal{L}$. З результатів [9, 2, 5] випливає, що

$$\sigma_{\text{ess}}(L) = \sigma_{\text{ess}}(U) \cup \left(d - \frac{c_1 c_2}{a}\right)(\overline{\Omega}). \tag{3}$$

Згідно з (2), (3) досить довести, що $\sigma_{\text{ess}}(U) = \mathcal{T}$. Зафіксуємо $x \in \overline{\Omega}$ і розглянемо сталу матрицю $B_x := B(x)$ та відповідний оператор $U_x := PB_xP$ в просторі $\mathcal{L}$. Зауважимо, що далі суттєво використовується компактність комутатора $[P, \alpha] = P\alpha - \alpha P$, де α оператор множення на довільну функцію $\alpha \in C(\overline{\Omega})$ (див. [9, 2]).

Спочатку розглянемо випадок сталої діагональної матриці B і покажемо, що

$$\sigma(U) = \sigma_{\text{ess}}(U) = \text{conv}(\{b_1, b_2, ..., b_N\}). \tag{4}$$

Нагадаємо [4], що для обмеженого в гільбертовому просторі H оператора T виконується $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$, де

$$W(T) := \{\, (Tf, f) \mid f \in H,\ \|f\| = 1 \,\}$$

– числовий образ оператора T. Очевидно, що

$$W(U) = \{\, (Uf, f) \mid f \in \mathcal{L},\ \|f\| = 1 \,\} =$$
$$= \{\, (Bf, f) \mid f \in \mathcal{L},\ \|f\| = 1 \,\} \subset W(B) =$$
$$= \text{conv}(\{b_1, b_2, ..., b_N\}).$$

Звідси випливає, що

$$\sigma(U) \subset \text{conv}(\{b_1, b_2, ..., b_N\}). \tag{5}$$

Доведемо обернене включення. Припустимо спочатку, що область Ω є N - вимірним кубом з ребром рівним τ і $\rho \equiv 1$

$$\Omega = [A_1, B_1] \times [A_2, B_2] \times ... \times [A_N, B_N] \tag{6}$$

($B_i = A_i + \tau$, $i = 1, ..., N$). Нехай λ власне число оператора U і f відповідна власна векторфункція. Тоді $f \in \mathcal{L}$ та $(B - \lambda)f \in \mathcal{L}^{\perp}$. Використовуючи означення $\mathcal{L}$ та явний опис його ортогонального доповнення [6]

$$\mathcal{L}^{\perp} = \{\nabla g \mid g \in H^1(\Omega)\},$$

отримаємо систему диференціальних рівнянь для знаходження власних чисел і власних функцій оператора U

$$\begin{cases} \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + ... + \partial_N f_N = 0 \\ (\nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 + ... + \nu_N f_N)|_{\partial\Omega} = 0 \\ (b_1 - \lambda) f_1 = \partial_1 h \\ (b_2 - \lambda) f_2 = \partial_2 h \\ \cdots\cdots\cdots \\ (b_N - \lambda) f_N = \partial_N h. \end{cases}$$

Звідси маємо, що

$$f_i = \frac{\partial_i h}{b_i - \lambda}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{7}$$

та

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} (b_i - \lambda)^{-1} \partial_i^2 h = 0, \\ \sum_{i=1}^{N} (b_i - \lambda)^{-1} \nu_i \partial_i h|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Будемо шукати розв'язок (8) у вигляді

$$h_n(x) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{N} \cos \frac{\pi k_i n (x_i - A_i)}{\tau}. \tag{9}$$

Тут $n \geqslant 1$, k_1, k_2,...,k_N — деякі натуральні числа. Безпосередньо перевіряється, що h_n задовольняє (9) якщо

$$\frac{k_1^2}{b_1 - \lambda} + \frac{k_2^2}{b_2 - \lambda} + ... + \frac{k_N^2}{b_N - \lambda} = 0. \tag{10}$$

Позначимо через W множину тих λ, що для деяких натуральних k_1, k_2,...,k_N виконано (10). Неважко показати, що W щільна в $\text{conv}(\{b_1, b_2, ..., b_N\})$. Для $\lambda \in W$ послідовність функцій $\{f^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$, побудована з послідовності (9) за допомогою формули (7) утворює ортогональну послідовність власних функцій оператора U. Звідси випливає твердження теореми в цьому частинному випадку.

Далі розглядаємо довільну ліпшицеву область Ω. Для $\lambda \in W$ і $x_0 \in \Omega$ побудуємо сингулярну послідовність функцій $\{g_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{L}$ (див. [8]) таку, що
i) $g_n \xrightarrow{w} 0$, $n \to \infty$;
ii$'$) для довільної кулі $\omega_{x_0} \subset \Omega$, що містить точку x_0

$$\int\limits_{\omega_{x_0}} |g^n|^2 dx \nrightarrow 0, \quad n \to \infty;$$

iii) $Ug_n - \lambda g_n \to 0$, $n \to \infty$.

Для побудови такої послідовності $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ розглянемо деякий гіперкуб Q вигляду (6), що лежить всередині області Ω і містить точку x_0 як внутрішню. У просторі $(L_2(Q, \rho(x)dx))^N$ розглянемо відповідний підпростір $\mathcal{L}_Q$. Зафіксуємо $\lambda \in W$. Згідно формул (7) та (9), побудуємо у гіперкубі Q для оператора U_Q ортогональну послідовність власних функцій $\{f^n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{L}_Q$ та відповідну їй послідовність $\{h^n\}_{n\geqslant 1} \subset H^1(Q)$. Для всіх $n \geqslant 1$ отримаємо

$$(B-\lambda)f^n = \nabla h^n.$$

Згідно [7, с. 22, Теорема 1.4] множина

$$\mathcal{D} := \{ \, v \in C_0^\infty(Q) \mid \operatorname{div} f = 0 \, \}$$

є щільною у просторі $\mathcal{L}_Q$. Побудуємо послідовність функцій $\{g^n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{D}$ таку, що

$$\|g^n - f^n\| \to 0, \text{ при } n \to 0. \tag{11}$$

Тоді

$$(B-\lambda)g^n - \nabla h^n \to 0, \text{ при } n \to \infty$$

у просторі $(L_2(Q,dx))^N$.

Позначимо через u^n продовження функцій h^n на всю область Ω побудоване наступним чином. Кожен з множників виду $\cos\frac{\pi k_i n(x_i - A_i)}{\tau}$ дорівнює або 1 або -1 на кінцях відрізка $[A_i, B_i]$. Зліва від точки A_i та справа від точки B_i продовжимо ці множники за тією ж формулою до першого перетину з віссю Ox_i, а далі покладемо їх рівними нулю. Ясно, що $\{u^n\}_{n\geqslant 1} \subset H^1(\Omega)$, та

$$\|\nabla u^n\|_{(L_2(\Omega\setminus Q,dx))^N} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Звідси випливає, що

$$(B-\lambda)g^n - \nabla u^n \to 0, \text{ при } n \to \infty$$

в просторі $(L_2(\Omega,dx))^N$. Зокрема,

$$P(B-\lambda)g^n \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Таким чином послідовність $\{g^n\}_{n\geqslant 1}$ сингулярна для оператора PBP в точці λ. Звідси легко випливає,що $\operatorname{conv}(\{b_1, b_2, ..., b_N\}) \subset \sigma_{\text{ess}}(U)$. Враховуючи (5), маємо (4).

Зауважимо, що завдяки ii$'$) завжди можна вважати, що виконується умова
ii) $\|g^n\| = 1$, $n \geqslant 1$.

Ясно, що наведена побудова сингуляриної послідовності працює для довільного гіперкуба, що містить точку x_0 (як внутрішню). Зокрема (зменшуючи відповідні гіперкуби), можна побудувати нову послідовність $\{g^n\}_{n\geqslant 1} \subset C_0^\infty(\Omega)$, що буде задовольняти умови i), ii), iii), а також умови

iv) $\operatorname{div} g^n = 0$,

v) $\operatorname{supp} g^n \subset B(x_0, \frac{1}{n})$.

Ясно, що така послідовність буде сингулярною і у випадку загальної неперервної матриці B. Більш того це залишиться в силі і для загального неперервної функції ρ. Останнє твердження випливає з компактності оператора $(P - P^1)\alpha$ в $\mathcal{H}_N$. Тут $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$, P та P^1 — ортопроектори на $\mathcal{L}$ у просторах $\mathcal{H}_N = (L_2(\Omega, \rho(x)dx))^N$ та $(L_2(\Omega, dx))^N$ відповідно (ці простори мають еквівалентні норми, проте P відмінно від P^1 за рахунок різних скалярних добутків).

Таким чином для довільного $x \in \Omega$ маємо

$$\sigma_{\text{ess}}(U_x) = \operatorname{conv}(\{b_1(x), b_2(x), ..., b_N(x)\}) \subset \sigma_{\text{ess}}(U).$$

Звідси випливає, що

$$\mathcal{T} = \bigcup_{x\in\overline{\Omega}} \sigma_{\text{ess}}(U_x) \subset \sigma_{\text{ess}}(U),$$

що зводить обчислення спектру оператора U до випадку сталої матриці B.

Покажемо, що насправді справедливий наступний принцип локалізації

$$\bigcup_{x\in\overline{\Omega}} \sigma_{\text{ess}}(U_x) = \sigma_{\text{ess}}(U). \tag{12}$$

Для цього потрібно довести обернене включення

$$\sigma_{\text{ess}}(U) \subset \bigcup_{x\in\overline{\Omega}} \sigma_{\text{ess}}(U_x). \tag{13}$$

Припустимо, що $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(U)$, тоді існує послідовність $\{f^n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{L}$, така, що
1) $\inf\limits_{n\geqslant 1} \|f^n\|_\rho > 0$;
2) $f^n \xrightarrow{w} 0$, $n \to \infty$;
3) $Uf^n - \lambda f^n \to 0$, $n \to \infty$, або
$U^* f^n - \overline{\lambda} f^n \to 0$, $n \to \infty$.

Тобто $\{f^n\}$ сингулярна для U в точці λ, або $\{f^n\}$ сингулярна для в U^* точці $\overline{\lambda}$. Покажемо, що для $\{f^n\}$ існує точка $x_0 \in \overline{\Omega}$ така, що для довільної відкритої кулі $\omega_{x_0} \subset \mathbb{R}^N$, що містить точку x_0 виконується

$$\int\limits_{\omega_{x_0}\cap\Omega} |f^n(x)|^2 \rho dx \nrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Справді, припустимо, що для кожної точки $x_0 \in \overline{\Omega}$ існує деяка відкрита куля ω_{x_0} для якої $x_0 \in \omega_{x_0} \subset \mathbb{R}^N$ і

$$\int\limits_{\omega_{x_0}\cap\Omega} |f^n(x)|^2 \rho dx \to 0, \, n \to \infty.$$

$\overline{\Omega}$ є компактом і $\overline{\Omega} \subset \bigcup\limits_{x_0 \in \overline{\Omega}} \omega_{x_0}$. З кожного відкритого покриття компактної множини можна вибрати скінчене підпокриття, отже існують $\{x_1, .., x_p\} \subset \overline{\Omega}$ такі, що $\overline{\Omega} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{p} \omega_{x_k}$, але тоді

$$\|f^n\|_\rho^2 = \int\limits_\Omega |f^n(x)|^2 \rho dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{\omega_{x_k} \cap \Omega} |f^n(x)|^2 \rho dx \to 0,\ n \to \infty,$$

отримаємо протиріччя. Далі для визначенності вважаємо, що $\{f^n\}$ сингулярна для U в точці λ (інший випадок розглядається аналогічно).

Нехай $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \leqslant \alpha(x) \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}^N$. Припустимо, що $\operatorname{supp} \alpha \subset B(x_0, R)$, $\alpha(x) = 1$, $x \in \overline{B}(x_0, r)$ для деяких $0 < r < R < +\infty$.

Легко бачити, що принаймні для деякої підпослідовності

$$\inf_{k \geqslant 1} \int\limits_\Omega |\alpha f^{n(k)}|^2 \rho dx > 0.$$

Не обмежуючи загальності вважаємо, що

$$\inf_{n \geqslant 1} \int\limits_\Omega |\alpha f^n|^2 \rho dx > 0,$$

і розглянемо

$$h^n := \frac{\alpha f^n}{\|\alpha f^n\|}, \qquad n \geqslant 1.$$

Зрозуміло, що $\operatorname{supp} h^n \subset B(x_0, R)$. Більш того з компактності комутатора $[U, \alpha]$ випливає, що h^n сингулярна для U в точці λ. Зауважимо, що така послідовність побудована для довільного додатного R. Останнє дозволяє використати діагональну процедуру Кантора і побудувати послідовність g^n сингулярну для U в точці λ таку, що $\operatorname{supp} g^n \subset B(x_0, 1/n)$. Враховуючи неперервність матричної функції B та компактність комутатора $[P, \beta]$ для довільної неперервної функції β тепер неважко показати, що g^n буде сингулярною і для оператора U_{x_0}. Звідси випливає (13), що і завершує доведення теореми.

3 Висновки

Знайдено істотний спектр класу матричних нееліптичних диференціальних оператора пов'язаного з моделями магнітогідродинаміки.

Список використаних джерел

1. *Birman M. S., Solomyak M. Z.* Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space. - Leningrad: Izdat. Leningrad. Univ., 1980. - 264 p. (in Russian)

2. *Grinyk Yu. M., Konstantinov A. Yu.* On the essential spectrum of one boundary problem // Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. - 2002. - № 7. - P. 12–16. (in Russian)

3. *Grinyk Yu.M.* The essential spectrum of one matrix differential operator // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. - 2003. - № 9. - P. 9–13. (in Ukrainian)

4. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators. - Moscow: Mir, - 1972. - 739 p. (in Russian)

5. *Konstantinov A. Yu.* On the Essential Spectrum of a Class of Matrix Differential Operators // Functional Analysis and Its Applications - 2002. - № 3 **36**. - P. 76–78.

6. *Kopachevsky N. D., Krein S. G., Ngo Zuy Kan* Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems. - Moscow: Nauka, - 1989. - 416 p. (in Russian)

7. *Temam R.* Navier-Stokes equations. – Moscow: Mir, - 1981. - 408 p. (in Russian)

8. Faierman M., Mennicken R., Möller M., The essential spectrum of a system of singular ordinary differential operators of mixed order; Part II: The generalization of Kako's problem // Math. Nachr. - 2000. - no. 209. - P. 55–81.

9. Langer H., Möller M. The essential spectrum of a non-elliptic boundary value problem // Math. Nachr. - 1996. - no. 178. - P. 233–248.

10. Raikov G. D. The spectrum of an ideal magnetohydrodynamic model with translational symmetry // Asymptotic Analysis. - 1990. - no. 3. - P. 1–35.

Надійшла до редколегії 20.08.2013