УДК 519.9

Паткін Є. Д. [1] , аспірант

Приклад побудови мартингальних мір

Для певного класу еквівалентних мартингальних мір доведено щільність множини еквівалентних мартингальних мір, у яких похідна Радона-Нікодима обмежена як згори, так і знизу

Ключові слова: мартингальна міра, мартингал, ризиковий актив.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е, e-mail: patkin88@mail.ru

I. D. Patkin[1], Postgraduate Student

Example of construction martingale measures

For some class of equivalent martingale measures were proved density of set equivalent martingale measures with bounded Radon-Nikodim densities.

Key words: martingale measure, martingale, risk asset.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4e, e-mail: patkin88@mail.ru

Статтю представив акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Перестюк М. О.

Вступ

Задача про те, чи є щільною є множина мартингальних мір з обмеженою похідною Радона-Нікодима виникла після того як у роботі Даланга-Мортона- Вілінгера [1] було доведено відсутність арбітражу. Лише в роботі Кабанова, Стрікера [2] вперше, використовуючи стохастичне числення, цей факт було встановлено. Доведення є занадто складним і непрозорим. В даній роботі таку щільність множини мартингальних мір з обмеженими похідними Радона-Нікодима встановлено для однієї простої моделі еволюції ризикового активу явною побудовою. В подальшому такими класами випадкових процесів апроксимуватимемо складні випадкові процеси.

На ймовірнісному просторі $\{\Omega, \Im, P_0\}$ розглядаємо еволюцію ризикового активу, заданого законом

$$S_n = (1+\rho_n)S_{n-1},\ n=\overline{1,N}, \qquad (*)$$

де ρ_n набуває значень з інтервалу $(-1,c], 0<c<\infty$ і є випадковою величиною, а неризиковий актив еволюціонує за законом $B_n \equiv 1,\ n=\overline{1,N}$. Тут

$$\Omega = \prod_{i=1}^{N} D_i,\ D_i = (-1,c],\ \omega = \{x_1,...,x_N\} \in \Omega.$$

$$P_0(A) = \int_A \prod_{i=1}^{N} dF_i(x_i),\ F_i(x) = P(\rho_i \le x), i=\overline{1,N}$$

Означимо потік подій $\Im_n = \Im\{\rho_1,...,\rho_n\}$, породжений випадковими величинами $\rho_1,...,\rho_n$. Нехай P - сукупність усіх мір, стосовно яких S_n є мартингал.

Теорема 1. Множина мартингальних мір непорожня, якщо існують борелеві функції $\varphi_i(x_i) \ge 0$ такі, що:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{c} \varphi_i(x_i)dF_i(x_i) = 1, & i = \overline{1,N} \quad (1) \\ \int_{-1}^{c} \varphi_i(x_i)x_i dF_i(x_i) = 0, & i = \overline{1,N} \quad (2) \end{cases}$$

$$Q(A) = \int_A f(\omega)dP_0, f(\omega) = \prod_{i=1}^{N} \varphi_i(\rho_i),$$

$$f(\omega) \geq 0, P_0(f(\omega) = 0) = 0.$$

Сім'я борелевих функцій $0 \leq \varphi_n(x), x \in (-1, c]$ є такою, що

$$E^{P_0}\varphi_n(\rho_n)\rho_n = 0, \quad (3)$$

$$E^{P_0}\varphi_n(\rho_n) = 1, \quad (4)$$

$$E^{P_0}\{f(\omega)|\rho_n\} = \varphi_n(\rho_n), n = \overline{1,N}. \quad (5)$$

Доведення: Нехай Q - мартингальна міра, еквівалентна до P_0, тоді існує така $f(\omega)$, що $P(f(\omega) = 0) = 0, E^{P_0}f(\omega) = 1$. З умови мартингальності випливає, що

$$0 = E^Q\{\rho_n S_{n-1}|\Im_{n-1}\} = E^Q\{\rho_n|\Im_{n-1}\}S_{n-1}. \quad (6)$$

Нехай $A \in \Im_{n-1}$, тоді

$$\int_A E^Q\{\rho_n|\Im_{n-1}\}dQ = \int_A \rho_n dQ = \int_A \rho_n f(\omega)dP_0 \quad (7)$$

З умов теореми випливає, що

$$f(\omega) = \prod_{i=1}^{N} \varphi_i(\rho_i), \quad (8)$$

де φ_i задовольняють умови 1) і 2). Тоді рівність (7) можна продовжити наступним чином:

$$\int_A \rho_n\varphi_n(\rho_n)\prod_{i=1}^{n-1}\varphi_i(\rho_i)dP_0 =$$

$$= \int_A E^{P_0}\{\rho_n\varphi_n(\rho_n)\prod_{i=1}^{n-1}\varphi_i(\rho_i)|\Im_{n-1}\}dP_0 =$$

$$= \int_A \prod_{i=1}^{n-1}\varphi_i(\rho_i)E^{P_0}\rho_n\varphi_n(\rho_n)dP_0 =$$

$$= E^{P_0}\rho_n\varphi_n(\rho_n)\int_A \prod_{i=1}^{n-1}\varphi_i(\rho_i)dP_0 =$$

$$= E^{P_0}\rho_n\varphi_n(\rho_n)\int_A dQ \quad (9)$$

Отже, з (7), (8), (9) отримаємо, що $E^Q\{\rho_n|\Im_{n-1}\} = E^{P_0}\rho_n\varphi_n(\rho_n) = 0$. Таким чином, рівність (6) у цьому випадку виконується.

Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай

$$\int_{-1}^{0} xdF_n(x) < 0, \int_{0}^{c} xdF_n(x) > 0, \quad (10)$$

Тоді множина усіх мартингальних мір Q таких, що

$$0 < l < \frac{dQ}{dP^0} < L < \infty \quad (11)$$

є щільною в загальній варіаційній топології [1] в множині розглядуванних мартингальних мір.

*Доведення***:** З умови (10) випливає, що сукупність мартингальних мір непорожня. Справді, означимо

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{a_n}{d} > 0, & -1 < x \leq 0 \\ \frac{b_n}{d} > 0, & 0 < x < c \end{cases}$$

визначивши a_n і b_n з умов

$$a_n \int_{-1}^{0} x dF_n(x) + b_n \int_{0}^{c} x dF_n(x) = 0,$$

$$a_n \int_{-1}^{0} dF_n(x) + b_n \int_{0}^{c} dF_n(x) = d.$$

Такі $a_n > 0$ і $b_n > 0$ існують, бо

$\int_{-1}^{0} x dF_n(x) < 0, \int_{0}^{c} x dF_n(x) > 0$. Тоді виконуються умови 1), 2) для введених функцій $\varphi_n(x), n = \overline{1,N}$. Тому на підставі Теореми 1 міра $Q(A) = \int_A \prod_{i=1}^{N} \varphi(\rho_i) dP_0$ є еквівалентною мартингальною мірою.

Отже, доведено щільність множини еквівалентних мартингальних мір з обмеженою похідною Радона-Никодима. Нехай тепер сукупність функцій $\varphi_n(x)$ задовольняють умови теореми 1. Тоді $Q(A) = \int_A \prod_{i=1}^{N} \varphi_i(\rho_i) dP_0$ – мартингальна міра. Покажемо, що існує послідовність мартингальних мір $Q^k(A)$ таких, що $0 < l < \dfrac{dQ^k(A)}{dP^0} < L < \infty$ і в рівномірній метриці $Q^k(A) \to Q(A),\ k \to \infty$, тобто $\rho(Q^k, Q) = \sup_{A \in \Im} \left| Q^k(A) - Q(A) \right| \to 0, k \to \infty$. Нехай

$$\varphi_i^k(x) = \begin{cases} \varphi_i(x), & при \quad \varphi_i(x) \le k, \\ k, & при \quad \varphi_i(x) > k. \end{cases}.$$

Тоді

$$\int_{-1}^{c} x\varphi_i^k(x) dF_i(x) = \int_{\varphi_i \le k} x\varphi_i(x) dF_i(x) +$$
$$+ k \int_{\varphi_i > k} x dF_i(x) =$$
$$= - \int_{\varphi_i > k} x\varphi_i(x) dF_i(x) + k \int_{\varphi_i > k} x dF_i(x) =$$
$$= \int_{\varphi_i > k} x[k - \varphi_i(x)] dF_i(x).$$

Визначимо додатні числа a_i^k і b_i^k з умови

$$a_i^k \int_{-1}^{0} x dF_n(x) + b_i^k \int_{0}^{c} x dF_n(x) =$$
$$= - \int_{\varphi_i > k} x[k - \varphi_i(x)] dF_i(x).$$

Звідси

$$b_i^k = \frac{-a_i^k \int_{-1}^{0} x dF_i(x) - \int_{\varphi_i(x) > k} x[k - \varphi_i(x)] dF_i(x)}{\int_{0}^{c} x dF_i(x)}.$$

Покладемо

$$a_i^k = \frac{\frac{1}{k} + \left| \int_{\varphi_i(x) > k} x[k - \varphi_i(x)] dF_i(x) \right|}{-\int_{-1}^{c} x dF_i(x)},$$

$$b_i^k = \frac{\frac{1}{k} + \left| \int_{\varphi_i(x) > k} x[k - \varphi_i(x)] dF_i(x) \right|}{\int_{0}^{c} x dF_i(x)} - \frac{\int_{\varphi_i(x) > k} x[k - \varphi_i(x)] dF_i(x)}{\int_{0}^{c} x dF_i(x)}.$$

Тоді

$$a_i^k \ge \frac{1}{k[-\int_{-1}^{0} x dF_i(x)]} > 0, \qquad b_i^k \ge \frac{1}{k \int_{1}^{c} x dF_i(x)} > 0.$$ Ро

зглянемо сукупність функцій

$$\overline{\varphi}_i^k(x)=\frac{\varphi_i^k(x)+\varphi_i^{0,k}(x)}{\int_{-1}^{c}[\varphi_i^k(x)+\varphi_i^{0,k}(x)]dF_i(x)},\ i=\overline{1,N}\ ,$$

тут

$$\varphi_i^{0,k}(x)=\begin{cases}a_i^k, -1\le x\le 0,\\ b_i^k, 0<x\le c.\end{cases},$$

Причому

$$\frac{\min\{a_i^k,b_i^k\}}{\int_{-1}^{c}[\varphi_i^k(x)+\varphi_i^{0,k}(x)]dF_i(x)}\le\overline{\varphi}_i^k(x)\le$$

$$\le\frac{k+\max\{a_i^k,b_i^k\}}{\int_{-1}^{c}[\varphi_i^k(x)+\varphi_i^{0,k}(x)]dF_i(x)}.$$

Очевидно, що

$$1)E^{P_0}\overline{\varphi_i^k}(\rho_i)\rho_i=0,\quad 2)E^{P_0}\overline{\varphi_i^k}(\rho_i)=1,\ i=\overline{1,N}.$$

Міра

$$Q^k(A)=\int_A\prod_{i=1}^{N}\overline{\varphi}_i^k(\rho_i)dP_0$$

є такою, що $\prod_{i=1}^{N}l_i^k\le\frac{dQ^k(A)}{dP^0(A)}\le\prod_{i=1}^{N}L_i^k$,

$$l_i^k=\frac{\min\{a_i^k,b_i^k\}}{\int_{-1}^{c}[\varphi_i^k(x)+\varphi_i^{0,k}(x)]dF_i(x)},$$

$$L_i^k=\frac{\max\{a_i^k,b_i^k\}}{\int_{-1}^{c}[\varphi_i^k(x)+\varphi_i^{0,k}(x)]dF_i(x)}.$$

Далі

$$\sup_{A\in F}\left|\int_A\varphi_i(\rho_i)dP_o-\int_A\overline{\varphi}_i^k(\rho_i)dP_o\right|\le$$

$$\le\int_A\left|\varphi_i(\rho_i)-\overline{\varphi}_i^k(\rho_i)\right|dP_o\le\int_\Omega\left|\varphi_i(\rho_i)-\overline{\varphi}_i^k(\rho_i)\right|dP_o=$$

$$=\int_{-1}^{c}\left|\varphi_i(x)-\overline{\varphi}_i^k(x)\right|dF_i(x)\to 0$$

бо $\varphi_i(x)-\overline{\varphi}_i^k(x)\to 0,\ k\to\infty$ і існує інтегрована мажоранта

$$\left|\varphi_i(x)-\overline{\varphi}_i^k(x)\right|=\frac{\left|\varphi_i(x)\int_{-1}^{c}\varphi_i^k(x)dF_i(x)\right.}{\int_{-1}^{c}[\varphi_i^k(x)+\varphi_i^{0,k}(x)]dF_i(x)}+$$

$$+\frac{\left.\int_{-1}^{c}\varphi_i^{0,k}(x)dF_i(x)-\varphi_i^k(x)-\varphi_i^{0,k}(x)\right|}{\int_{-1}^{c}[\varphi_i^k(x)+\varphi_i^{0,k}(x)]dF_i(x)}\le$$

$$\le\frac{2\varphi_i(x)+\max\{a_i^k,b_i^k\}\varphi_i(x)+\varphi_i(x)+a_i^k+b_i^k}{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\frac{4\varphi_i(x)+2}{\frac{1}{2}}=2(4\varphi_i(x)+2)$$

Якщо $k>k_0$. Далі

$$\sup_{A\in F}\left|\int_A[\prod_{i=1}^{N}\varphi_i(\rho_i)-\prod_{i=1}^{N}\overline{\varphi}_i^k(\rho_i)]\right|dP_0\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{N}\sup_{A\in F}\int_A\left|\prod_{i=1}^{N}\varphi_i(\rho_i)-\overline{\varphi}_i^k(\rho_i)\right|dP_0\to 0.$$

Теорему доведено.

Зауваження: В доведенні ніде не використовувалось припущення $-1<\rho_n<c<\infty$, тобто можливо, що $c=\infty$.

Список використаних джерел

1. *Dalang R. C.,Morton A., Willinger W.*. Equivalent martingale measures and no-arbit-rage in stochastic sequrities market models. Stochastic and stochastic reports, 29 (1990), p. 185-201.
2. *Yu. Kabanov and C. Striker*. On equivalent martingale measures with bounded densities, UMR 6623, Laboratoire de Mathematiques, Universite de Franhe-Comte 16 Ronte de Gray, F-25030 Besancon Cedex, FRANCE.

Надійшла до редколегії 02.10.13