УДК 517.98

Романенко В.М[1]., к.ф.-м.н.

Про обмежені розв'язки диференціального рівняння з G-секторіальним операторним коефіцієнтом.

В статті доведено умови існування та єдиності обмеженого розв`язку лінійного диференціального рівняння першого порядку з ***G****-секторіальним операторним коефіцієнтом для випадку локально-гельдерової відомої функції, які були відомі у випадку заданої гельдерової функції. Доведено можливість наближення цього розв'язку розв'язками відповідних крайових задач і знайдена оцінка точності наближення.*
Ключові слова: диференціальне рівняння, G-секторіальний оператор, апроксимація.

[1]Національний університет харчових технологій, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 68,
e-mail: romvik1@mail.ru

V. N. Romanenko[1], Dr.(Physics and Mathematics)

On the bounded solutions of a differential equation with the G-sectorial operator coefficient.

In the paper we prove existence and uniqueness of a limited deprivation linear first order differential equation with **G**-sectorial operator coefficient for locally-gelderovoi known function that were known in the case of a given gelderovoi function. Proved the feasibility of this approach decisions of the relevant solutions of boundary value problems and an estimate of the accuracy of approximation.
Key Words: differential equation, G-sectorial operator, approximation.

[1] National University of Food Technologies, 01601, Kyiv, Volodimirska str., 68,
e-mail: romvik1@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

Вступ. Нехай $\mathbf{B}$ – комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\vec{0}$. Наведемо потрібне надалі поняття G-секторіального оператора.

Означення 1 [1]. Будемо казати, що функція $G:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ належить до класу Ψ, якщо вона задовольняє такі умови:

a) функція G незростаюча на $[0,+\infty)$;

$b)G(t)\to 0, t\to+\infty$;

c) функція $\frac{1}{G}$ ліпшицева на $[0,+\infty)$.

Поряд з кожною функцією $G\in\Psi$ розглядатимемо функцію

$$H(t):=\frac{1}{t}G\left(\frac{1}{t}\right), t>0.$$

При цьому

$$G(t)=\frac{1}{t}H\left(\frac{1}{t}\right), t>0.$$

Означення 2 [1]. Нехай $G\in\Psi$. Лінійний оператор $T:D(T)\to\mathbf{B}$, де $D(T)\subset\mathbf{B}$, назвемо G-секторіальним, якщо існують такі сталі $a\in\mathbf{R}$ і $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, що для множини

$$S_{a,\varphi}:=\{z\in\mathbf{C}\,|\,z\neq a, |\arg(z-a)|<\varphi\}$$

виконуються умови:

1) $\sigma(T)\subset S_{a,\varphi}$;

2) $\exists M>0\ \forall\lambda\notin S_{a,\varphi}:\|(T-\lambda I)^{-1}\|\leqslant MG(|\lambda-a|)$.

Для G-секторіальних операторів в роботі [1] визначено операторну експоненту та дробові степені оператора для степенів, що належать множині

$$\Omega_0=\left\{\alpha>0\,|\int_0^1 t^{\alpha-1}H(t)dt<+\infty\right\}.$$

Надалі нехай T – G-секторіальний оператор, що діє в $\mathbf{B}$, з областю визначення $\mathrm{D}(T)$.

Зафіксуємо також функцію $f:\mathbf{R}\to\bigcup_{\beta\in\Omega_0} D\left(T^{\beta}\right)$, яка задовольняє такі умови:

α) $\| f\|_{\infty} :=\sup\left\{\| f(t)\| \;\middle|\; t\in\mathbf{R}\right\}<+\infty$;

β) для кожного t_0 існують такі залежні від t_0 сталі $\beta\in\Omega_0$, $M>0$, $\gamma>0$, що

$$\forall t,s\in\left[t_0-\gamma;t_0+\gamma\right]:\| f(t)-f(s)\|\le M|t-s|^{\beta} \quad (1)$$

Означення 3. Функція $x:\mathbf{R}\to\mathbf{B}$ називається відповідним f обмеженим розв'язком диференціального рівняння

$$x'(t)=Tx(t)+f(t),\; t\in\mathbf{R}, \qquad (2)$$

якщо $x\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{B})$, $\|x\|_{\infty}<+\infty$, для довільного $t\in\mathbf{R}$ $x(t)\in D(T)$ і виконується рівність (2).

Відзначимо, що абстрактне рівняння (2) має численні застосування, деякі з яких описані в [2].

У даній статті досліджується питання про існування та єдиність обмеженого розв'язку диференціального рівняння (2) та питання про апроксимацію цього розв'язку розв'язками відповідних задач Коші.

Відзначимо, що у випадку обмеженого оператора T та неперервної і обмеженої на $\mathbf{R}$ функції f відповідь на питання про існування і єдиність обмеженого розв'язку рівняння (2) містить відома теорема М. Г. Крейна [3, с.119]. У роботах [4-6] ця теорема узагальнювалася на випадок секторіального оператора T і обмеженої на $\mathbf{R}$ функції f, яка задовольняє глобальну умову Гельдера, в роботі [7] – на випадок секторіального оператора T і обмеженої на $\mathbf{R}$ функції f, яка задовольняє локальну умову Гельдера. Питання про апроксимацію єдиного обмеженого розв'язку диференціального рівняння (2) у випадку, коли f задовольняє глобальну умову Гельдера, досліджується в роботі [8], локальну умову Гельдера – в роботі [7].

Нехай спектр $\sigma(T)$ оператора T не перетинається з уявною віссю $i\mathbf{R}:=\left\{ it \;\middle|\; t\in\mathbf{R}\right\}$. Нехай $\sigma_+(T)$, $\sigma_-(T)$ – частини спектра $\sigma(T)$, які містяться відповідно у правій та лівій півплощинах $\boldsymbol{C}$, причому $\sigma_{\pm}(T)$ – непорожні множини. Тоді $\sigma_-(T)$ – компактна, $\sigma_+(T)$ – замкнена множина; простір B розкладається в пряму суму інваріантних відносно оператора T підпросторів $\mathrm{B}_{\pm}$; звуження $T_{\pm}$ оператора T на $\mathrm{B}_{\pm}$ мають відповідно спектри $\sigma_{\pm}(T)$; T_- – лінійний обмежений, T_+ – G-секторіальний оператори. Якщо $P_{\pm}$ – проектори в B відповідно на підпростори $\mathrm{B}_{\pm}$, $f_{\pm}(t):=P_{\pm}f(t)$, $t\in\mathrm{R}$, то відповідний функції f єдиний обмежений розв'язок x рівняння (2), зображується у вигляді

$$x(t)=x_+(t)+x_-(t),\; t\in\mathrm{R} ,$$

де $x_{\pm}$ – відповідні функціям $f_{\pm}$ єдині обмежені розв'язки диферен-ціальних рівнянь

$$x_-'(t)=T_-x_-(t)+f_-(t),\quad t\in\mathrm{R}, \qquad (3)$$

$$x_+'(t)=T_+x_+(t)+f_+(t),\quad t\in\mathrm{R}. \qquad (4)$$

Отже, поставлена задача відшукання та апроксимації обмеженого розв'язку зводиться до двох окремих задач для диференціальних рівнянь з обмеженим та G-секторіальним оператором відповідно. Розв'язок першої задачі добре відомий, тому не зменшуючи загальності в подальшому вважатимемо, що множина $\sigma(T)$ міститься у правій півплощині:

$$\sigma(T)\subset\left\{ z\in\mathbf{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}\,z>0\right\}.$$

Основні результати. Наведемо теорему, що узагальнює твердження з роботи [7].

Теорема 1. Нехай $1\in\Omega_0(T)$. Тоді рівняння (2) має єдиний обмежений розв'язок x, який зображується у вигляді

$$x(t)=-\int_t^{+\infty} e^{T(t-s)}f(s)\,ds,\; t\in\mathbf{R}. \qquad (5)$$

Доведення. Інтеграли в (5) збігаються абсолютно, бо експоненти від оператора T коректно визначені при $t>0$ і задовольняють такі умови (див. [1]):

$$\exists\varepsilon>0\;\; \exists C>0 \quad \forall t>0: \left\|e^{-Tt}\right\|\le CH(t)e^{-\varepsilon t}. \quad (6)$$

Зафіксуємо довільну точку $t_0\in\mathbf{R}$ і число $\delta\in(0,1)$. Тоді функцію, визначену рівністю (5) можна перетворити так:

$$x(t) = -\int_t^{t_0} e^{T(t-s)} f(s)\,ds - e^{T(t-t_0)} \int_{t_0}^{+\infty} e^{T(t_0-s)} f(s)\,ds,$$

$$t \in U_\delta := (t_0 - 1 - \delta, t_0 - 1 + \delta).$$

Позначимо

$$x_0(t) := -\int_t^{t_0} e^{T(t-s)} f(s)\,ds,\ t \in U_\delta,$$

$$f_0 := -\int_{t_0}^{+\infty} e^{T(t_0-s)} f(s)\,ds.$$

Тоді

$$x(t) = x_0(t) + e^{T(t-t_0)} f_0,\ t \in U_\delta .$$

При цьому внаслідок теореми 8 [1] функція x_0 задовольняє рівняння

$$x_0'(t) = Tx_0(t) + f(t),\ t \in U_\delta .$$

Крім того, за властивостями операторної експоненти

$$\left(e^{T(t-t_0)}\right)' = Te^{T(t-t_0)},\ t < t_0,$$

отже $x(t) \in D(T),\ t \in U_\delta$ і

$$x'(t) = x_0'(t) + Te^{T(t-t_0)} f_0 = Tx_0(t) + f(t) +$$
$$+Te^{T(t-t_0)} f_0 = Tx(t) + f(t),\ t \in U_\delta .$$

Враховуючи довільність точки $t_0 \in \mathbf{R}$, отримаємо, що функція (5) є розв'язком рівняння (2).

Крім того, внаслідок (6)

$$\|x(t)\| \le \int_t^{+\infty} CH(s-t) e^{-\delta(s-t)} ds \cdot \|f\|_\infty = C_0 \cdot \|f\|_\infty ,$$

звідки випливає обмеженість розв'язку (5).

Нарешті, єдиність розв'язку випливає зі звичайних міркувань (див. [3]).

Теорему 1 доведено.

Відзначимо, що доведена теорема узагальнює аналогічне твердження з роботи [9], отримане для випадку глобально гельдерових функцій.

Зафіксуємо $t_1 < t_2$. Рівнянню (3) відповідає задача Коші

$$\begin{cases} v_-'(t) = T_- v_-(t) + f_-(t),\ t \ge t_1, \\ v_-(t_1) = \bar{0}, \end{cases} \tag{7}$$

в просторі $\mathbf{B}_-$, а рівнянню (4) – задача Коші

$$\begin{cases} v_+'(t) = T_+ v_+(t) + f_+(t),\ t \le t_2, \\ v_+(t_2) = \bar{0}, \end{cases} \tag{8}$$

в просторі $\mathbf{B}_+$.

Неважко перевірити, що розв'язки задач Коші (7), (8) мають вигляд

$$v_-(t) = \int_{t_1}^{t} e^{T_-(t-s)} P_- f(s)\,ds,\quad t \ge t_1, \tag{9}$$

$$v_+(t) = -\int_t^{t_2} e^{T_+(t-s)} P_+ f(s)\,ds,\quad t \le t_2. \tag{10}$$

Покладемо

$$v(t) := v_+(t) + v_-(t),\ t \in [t_1, t_2], \tag{11}$$

тоді справджується

Теорема 2. Нехай $1 \in \Omega_0(T)$, $\sigma(T) \cap i\mathbf{R} = \varnothing$. Тоді існують такі сталі $c > 0, \delta > 0$, що для довільної функції $f : \mathbf{R} \to \mathbf{B}$, яка задовільняє умову (1), та відповідного їй розв'язку x рівняння (2) виконується оцінка

$$\forall t \in [t_1; t_2] : \|x(t) - v(t)\| \le$$
$$\le \left(\frac{c\|P_-\|}{\delta} e^{-\delta(t-t_1)} + \frac{c\|P_+\|}{\delta} e^{-\delta(t_2-t)} \right) \|f(t)\|_\infty , \tag{12}$$

де $v(t),\ t \in [t_1; t_2]$ визначається за допомогою формул (9)-(11) .

Доведення. Внаслідок (6)

$$\begin{aligned} &\exists C_+ > 0\ \forall t \le t_2 : \|x_+(t) - v_+(t)\| \le \\ &\le C\|P_+\|\,\|f\|_\infty \int_{t_2}^{+\infty} e^{-\delta(s-t)} H(s-t)\,ds \le \\ &\le C\|P_+\|\,\|f\|_\infty \int_t^{+\infty} e^{-\delta(s-t)} H(s-t)\,ds = \\ &= \frac{C_+\|P_-\|\,e^{-\delta(t_2-t)}}{\delta} \|f\|_\infty . \end{aligned} \tag{13}$$

Аналогічно, скориставшись властивостями операторної експоненти для обмежених операторів матимемо:

$$\forall t \geq t_1 \ : \ \left\| x_-(t) - v_-(t) \right\| \leq \frac{c\,\|P_+\|\, e^{-\delta(t-t_1)}}{\delta} \| f \|_\infty . \quad (14)$$

З (13),(14) випливає оцінка (12).

Теорему 2 доведено.

Висновок:

У даній статті досліджено питання про існування та єдиність обмеженого розв'язку диференціального рівняння (2) з G-секторіальним операторним коефіцієнтом та питання про апроксимацію цього розв'язку розв'язками відповідних задач Коші.

Список використаних джерел

1. Gorodnii M. F. A generalization of the concept of sectorial operator / M. F. Gorodnii, A.V. Chaikovskiy // Sbornik:Mathematics. – 2006 . – V.197, No. 7. – P. 29-46.
2. Chaikovskiy A. V. About application of the theory of G-sectorial operators to the differential equations with partial derivatives / A.V. Chaikovskiy // Nonlinear oscillations. - 2012 . - V.15, No. 1. - P. 139-148.
3. Daletskiy Yu. L. Stability of solutions of the differential equations in Banach space / Yu.L. Daletskiy, M. G. Krain. – M.: Nauka, 1970. – 534 p.
4. Gorodnii M. F. Stability of bounded solutions of the differential equations with small parameter in Banach space / / Ukr. Mat. Zhurn. - 2003 . - 55, No. 7. - P. 889 - 900.
5. Dorogovtsev A. Ya. Bounded and periodic solutions of the operator equation of Rikkaty with unbounded operator / A.Ya. Dorogovtsev, T.A. Petrova // Differ. equations. – 1997 . – V. 33, No. 3. – P. 309 – 315.
6. Henri D. Geometrical theory of the semi-linear parabolic equations. – M: Mir, 1985. – 376 p.
7. Gorodnii M. F. About bounded solutions of the differential equation with sectorial operator coefficient / M. F. Gorodnii, V. N. Romanenko // Visnyk of the Kiev university, series physical and mathematical sciences. - 2004 . - V. 2. - P. 97-106.
8. Romanenko V. N. Approximation of bounded solutions of the differential and differential equations by solutions of the corresponding Cauchy problems // Visnyk of the Kiev university. - 2002. - Series: techn. sciences, No. 2. - P. 142 - 147.
9. Chaikovskiy A.V. Generalization of the theorem of Krain for G-sectorial operators / A.V. Chaikovskiy // Visnyk of the Kiev university. Series: physical and mathematical sciences. - 2009 . - V. 3 . – P. 49-50.

Надійшла до редколегії 21.05.13