УДК 517.9

Анікушин А.В.[1], к.ф.-м.н.

A.V. Anikushyn [1], PhD.

Узагальнена розв'язність гіперболічних інтегро-диференціальних рівнянь

Generalized solvability of hyperbolic integro-differential equations

Доведено апріорні оцінки в негативних нормах для інтегро-диференціального оператору гіперболічного типу. Сформульовано теорему узагальненої розв'язності.

Ключові слова: гіперболічне рівняння, інтегро-диференціальне рівняння, апріорні оцінки, узагальнена розв'язність.

We provide a priory inequalities for integro-differential operator of hyperbolic type. Moreover, we formulate the theorem about existence and uniqueness of generalized solution.

Key Words: hyperbolic equation, integro-differential equation, a priory inequalities, generalized solvability.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д,
e-mail: anik_andrii@ukr.net

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: anik_andrii@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Кудін В.І.

1. Вступ

Необхідність розвитку математичних моделей різних природних та соціально-економічних процесів, дослідження коректності їх постановок, існування оптимального керування, передбачає, зокрема, проведення дослідження нових класів інтегро-диференціальних рівнянь. Цей клас з одного боку дозволяє більш детально і точно побудувати математичну модель природного явища (напр. при наявності «пам'яті» матеріалу [1],[2]), а з іншого є менш дослідженим ніж диференціальні рівняння з частинними похідними.

Сучасні дослідження в фізиці, біології, хімії часто приводять до розгляду деяких інтегро-диференціальних рівнянь. Зокрема, у монографії [3], розглянуто нові математичні моделі, що зводяться до рівнянь еліптичного типу. Вони виникають при дослідженні електронно-іонних хвиль в холодній «замагніченій» плазмі, низькочастотних електронних магнітно-звукових хвиль, електронних хвиль в холодній плазмі у зовнішньому полі тощо.

У цитованій роботі показано, що наведені моделі можна звести до лінійних рівнянь соболєвського типу високого порядку. Слід зауважити, що таке зведення вдається зробити через специфіку ядер, присутніх в цих рівняннях. У загальному випадку такий метод не може бути застосований.

У 80-х рр. XX ст. С.І.Ляшко запропонував досліджувати існування та єдиність розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними, ґрунтуючись на теорії оснащених просторів та методі апріорних оцінок в негативних нормах [4],[5].

Зокрема, використовуючи цю методику у роботі [6] було доведено нові теореми узагальненої розв'язності для гіперболічного

© А.В. Анікушин, 2013

диференціального рівняння та досліджено питання керованості.

Методика апріорних оцінок в негативних нормах виявилася корисною і при дослідженні інтегро-диференціальних рівнянь. Зокрема за допомогою розроблених методів і прийомів рівняння, зазначені в [3], можна досліджувати безпосередньо і не зводити їх до диференціальних рівнянь високого порядку. Так у роботі [7] було досліджено інтегро-диференціальні оператори еліптичного типу, що узагальнюють рівняння з [3], а в роботі [8] – оператори параболічного типу.

У данній роботі за допомогою методики апріорних оцінок в негативних нормах досліджується існування та єдиність узагальненого розв'язку для інтегро-диференціального оператору гіперболічного типу.

2. Основні позначення

У циліндричній області $(t,x)\in Q=(0,T)\times\Omega$, де $\Omega\subset R^n$ — обмежена однозв'язна область з регулярною межею $\partial\Omega$, розглянемо функцію стану системи $u(t,x)$. Функція стану задовольняє інтегро-диференціальне рівняння

$$L_I u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+Au+Bu=f(t,x). \quad (1)$$

Оператор A не залежить від змінної t і задається диференціальним виразом другого порядку

$$Au\equiv-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a(x)u.$$

Будемо вважати, що $a_{ij}=a_{ji}$ і оператор A є рівномірно еліптичним в області $\overline{\Omega}$, тобто виконується нерівність

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j\ge\alpha\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \quad (2)$$

для довільних дійсних λ_i, де α — додатна стала, що не залежить від $x\in\overline{\Omega}$ і $\lambda_i\in R$. Інтегральна частина задається виразом

$$Bu=\int_0^t\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau)u_{x_ix_i}(x,\tau)d\tau. \quad (3)$$

Ядра $K_i(t,\tau)$ — неперервні на $[0,T]^2$ та неперервно-диференційовні за змінною τ. Через u' будемо позначати першу похідну функції $u(t,x)$ за змінною t. Введемо для диференціальної частини оператора L_I спеціальне позначення

$$Lu\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+Au. \quad (4)$$

Покладемо $\Gamma=(0,T)\times\partial\Omega$. Шукана функція $u(t,x)$ задовольняє початкові

$$u|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0 \quad (5)$$

та крайові умови

$$u|_{\Gamma}=0. \quad (6)$$

Через L_0 позначимо множину функцій $u(t,x)\in C^\infty(\overline{Q})$, що задовольняють умови (5) і (6). L_T — множина функцій $v(t,x)\in C^\infty(\overline{Q})$, що задовольняють умови

$$v|_{\Gamma}=0, \qquad v|_{t=T}=\frac{\partial v}{\partial t}|_{t=T}=0. \quad (7)$$

Як і в роботі [6] введемо до розгляду спеціальні простори. Нехай H_0^1, V_0^1, S_0^0 — поповнення множини L_0 за нормами

$$\|u\|^2_{H_0^1}=\int_Q(u')^2+\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2dQ,$$

$$\|u\|^2_{V_0^1}=\|u\|^2_{H_0^1}+\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega u_{x_i}^2|_{t=T}\,d\Omega,$$

$$\|u\|^2_{S_0^0}=\int_Q u^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^t u_{x_i}d\tau\right)^2dQ+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left(\int_0^T u_{x_i}d\tau\right)^2d\Omega+\int_\Omega u^2|_{t=T}\,d\Omega$$

відповідно, H_T^1, V_T^1, S_T^0 — поповнення множини L_T за нормами

$$\| v \|^2_{H^1_T} = \int_Q (v')^2 + \sum_{i=1}^{n} v^2_{x_i} dQ,$$

$$\| v \|^2_{V^1_T} = \| v \|^2_{H^1_T} + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v^2_{x_i} |_{t=0} \, d\Omega,$$

$$\| v \|^2_{S^0_T} = \int_Q v^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\int_t^T v_{x_i} d\tau \right)^2 dQ +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\int_0^T v_{x_i} d\tau \right)^2 d\Omega + \int_\Omega v^2 |_{t=0} \, d\Omega$$

відповідно.

Зауваження 1. Мають місце щільні та неперервні вкладення

1. $V^1_0 \subset H^1_0 \subset S^0_0$;
2. $V^1_T \subset H^1_T \subset S^0_T$.

Нехай $(H^1_0)^*$, $(V^1_0)^*$, $(S^0_0)^*$, $(H^1_T)^*$, $(V^1_T)^*$, $(S^0_T)^*$ відповідні спряжені простори, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1_0}$ — природна білінійна форма на $(H^1_0)^* \times H^1_0$. На інших парах просторів також задані відповідні білінійні форми.

Застосовуючи формулу інтегрування частинами, неважко впевнитися, що для довільних гладких в $\overline{Q}$ функцій $u(t,x) \in L_0$, $v(t,x) \in L_T$, f, що задовольняють рівність $L_I u = f$, має місце рівність

$$\begin{gathered} -(u_t, v_t)_{L_2(Q)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} u_{x_i}, v_{x_j} \right)_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n} \left(a_i u_{x_i}, v \right)_{L_2(Q)} + \\ + \left(au, v \right)_{L_2(Q)} - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^t K_i u_{x_i} d\tau, v_{x_i} \right)_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}. \end{gathered} \tag{8}$$

Будемо вважати, що коефіцієнти a_{ij}, a_i, a — неперервні в $\overline{\Omega}$ функції. Ліва частина рівності (8) визначена для довільних $u \in H^1_0$, $v \in H^1_T$. Це дає можливість розглядати ліву частину (8) як означення оператора $\overline{L}_I : H^1_0 \to (H^1_T)^*$, що визначений для всіх $u \in H^1_0$. Легко впевнитися, що $\overline{L}_I$ — лінійний оператор. Та сама ліва частина (8) визначає і лінійний спряжений оператор $\overline{L}^*_I : H^1_T \to (H^1_0)^*$. Аналогічно визначимо оператори $\overline{L}$, $\overline{L}^*$.

2. Допоміжні твердження

Лема 1. Існує деяка стала $c_B > 0$, що для довільних функцій $u \in S^0_0$, $v \in V^1_T$ і для довільної сталої $M > 0$ має місце нерівність

$$\begin{gathered} |(Bu, v)_{L_2(Q)}| \le c_B \sum_{i=1}^{n} \int_Q e^{Mt} v^2_{x_i}(x,t) + \\ + e^{-Mt} \left(\int_0^t u_{x_i}(x,s) ds \right)^2 dQ. \end{gathered} \tag{9}$$

Доведення. Нехай, спочатку, u, v — гладкі функції. Інтегруючи частинами та враховуючи умови (6),(7) маємо:

$$|(Bu, v)_{L_2(Q)}| = \left| \int_Q \int_0^t \sum_{i=1}^{n} K_i(t,\tau) u_{x_i x_i}(x,\tau) d\tau v(x,t) dQ \right| =$$

$$= \left| \int_Q \int_0^t \sum_{i=1}^{n} K_i(t,\tau) u_{x_i}(x,\tau) d\tau v_{x_i}(x,t) dQ \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \int_0^T \int_0^t K_i(t,\tau) u_{x_i}(x,\tau) d\tau v_{x_i}(x,t) dt d\Omega \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left| \int_\Omega \int_0^T \int_0^t K_i(t,\tau) u_{x_i}(x,\tau) d\tau v_{x_i}(x,t) dt d\Omega \right|.$$

Розглянемо підінтегральну функцію

$$\int_0^T \int_0^t K_i(t,\tau) u_{x_i}(x,\tau) d\tau v_{x_i}(x,t) dt =$$

$$= \int_0^T \int_\tau^T K_i(t,\tau) u_{x_i}(x,\tau) v_{x_i}(x,t) dt d\tau =$$

$$= \int_0^T \int_t^T K_i(\tau,t) u_{x_i}(x,t) v_{x_i}(x,\tau) d\tau dt =$$

$$= \int_0^T \int_t^T K_i(\tau,t) v_{x_i}(x,\tau) d\tau u_{x_i}(x,t) dt.$$

Проінтегруємо частинами

$$\int_0^T \int_t^T K_i(\tau,t) v_{x_i}(x,\tau) d\tau u_{x_i}(x,t) dt =$$

$$= \int_t^T K_i(\tau,t) v_{x_i}(x,\tau) d\tau \int_0^t u_{x_i}(x,s) ds \Big|_0^T -$$

$$- \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_t^T K_i(\tau,t) v_{x_i}(x,\tau) d\tau \right) \int_0^t u_{x_i}(x,s) ds dt.$$

Зауважимо, що

$$\int_t^T K_i(\tau,t)v_{x_i}(x,\tau)d\tau\int_0^t u_{x_i}(x,s)ds\Big|_0^T =$$

$$=\int_T^T K_i(\tau,T)v_{x_i}(x,\tau)d\tau\int_0^T u_{x_i}(x,s)ds-$$

$$-\int_0^T K_i(\tau,0)v_{x_i}(x,\tau)d\tau\int_0^0 u_{x_i}(x,s)ds=0.$$

Згідно з нерівністю Коші маємо

$$\left|\int_\Omega\int_0^T\int_0^t K_i(t,\tau)u_{x_i}(x,\tau)d\tau v_{x_i}(x,t)dtd\Omega\right|=$$

$$=\left|\int_\Omega\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_t^T K_i(\tau,t)v_{x_i}(x,\tau)d\tau\right)\int_0^t u_{x_i}(x,s)dsdtd\Omega\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int_Q e^{Mt}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_t^T K_i(\tau,t)v_{x_i}(x,\tau)d\tau\right)\right)^2 dQ+$$

$$+\frac{1}{2}\int_Q e^{-Mt}\left(\int_0^t u_{x_i}(x,s)ds\right)^2 dQ.$$

Розглянемо перший доданок. Підінтегральна функція $K_i(\tau,t)v_{x_i}(x,\tau)$ неперевна і має неперервну частинну похідну за змінної t, тому інтеграл

$$\int_t^T K_i(\tau,t)v_{x_i}(x,\tau)d\tau$$

можна продиференціювати за параметром t.

$$\int_Q e^{Mt}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_t^T K_i(\tau,t)v_{x_i}(x,\tau)d\tau\right)\right)^2 dQ=$$

$$=\int_Q e^{Mt}\left(\int_t^T \frac{\partial K_i(\tau,t)}{\partial t}v_{x_i}(x,\tau)d\tau-K_i(t,t)v_{x_i}(x,t)\right)^2 dQ\le$$

$$\le 2\int_Q e^{Mt}\left(\int_t^T \frac{\partial K_i(\tau,t)}{\partial t}v_{x_i}(x,\tau)d\tau\right)^2+$$

$$+e^{Mt}\left(K_i(t,t)v_{x_i}(x,t)\right)^2 dQ\le$$

$$\le 2\int_Q e^{Mt}\int_t^T\left(\frac{\partial K_i(\tau,t)}{\partial t}\right)^2 d\tau\int_t^T v_{x_i}^2(x,\tau)d\tau+$$

$$+e^{Mt}K_i^2(t,t)v_{x_i}^2(x,t)dQ.$$

Оскільки функції $K_i(t,t),\frac{\partial K_i(\tau,t)}{\partial t}$ — неперервні на $[0,T]^2$, то вони обмежені. Нехай

$$c_K=\max\left\{\max_{i=1..n,t\in[0,T]}K_i(t,t),\ \max_{i=1..n,t,\tau\in[0,T]}\frac{\partial K_i(\tau,t)}{\partial t}\right\}.$$

Таким чином

$$2\int_Q e^{Mt}\int_0^T\left(\frac{\partial K_i(\tau,t)}{\partial t}\right)^2 d\tau\int_t^T v_{x_i}^2(x,\tau)d\tau+$$

$$+e^{Mt}K^2(t,t)v_{x_i}^2(x,t)dQ\le$$

$$\le 2\int_Q e^{Mt}c_K^2T\int_t^T v_{x_i}^2(x,\tau)d\tau+e^{Mt}c_K^2v_{x_i}^2(x,t)dQ=$$

$$=2c_K^2T\int_Q\int_t^T e^{Mt}v_{x_i}^2(x,\tau)d\tau dQ+2c_K^2\int_Q e^{Mt}v_{x_i}^2(x,t)dQ.$$

Зауважимо, що

$$\int_0^T\int_t^T e^{Mt}v_{x_i}^2(x,\tau)d\tau dt=\int_0^T\int_0^\tau e^{Mt}v_{x_i}^2(x,\tau)dtd\tau=$$

$$=\int_0^T v_{x_i}^2(x,\tau)\int_0^\tau e^{Mt}dtd\tau=$$

$$=\int_0^T v_{x_i}^2(x,\tau)\frac{1}{M}e^{Mt}\Big|_0^\tau d\tau=\int_0^T v_{x_i}^2(x,\tau)\frac{e^{M\tau}-1}{M}d\tau\le$$

$$\le\frac{1}{M}\int_0^T e^{M\tau}v_{x_i}^2(x,\tau)d\tau.$$

Отже,

$$2c_K^2T\int_Q\int_t^T e^{Mt}v_{x_i}^2(x,\tau)d\tau dQ+2c_K^2\int_Q e^{Mt}v_{x_i}^2(x,t)dQ\le$$

$$\le\frac{2c_K^2T}{M}\int_Q e^{Mt}v_{x_i}^2(x,t)dQ+2c_K^2\int_Q e^{Mt}v_{x_i}^2(x,t)dQ=$$

$$=2c_K^2\left(\frac{T}{M}+1\right)\int_Q e^{Mt}v_{x_i}^2(x,t)dQ.$$

Підсумовуючи зазначене вище, отримаємо

$$|(Bu,v)_{L_2(Q)}|\le\sum_{i=1}^n c_K^2\left(\frac{T}{M}+1\right)\int_Q e^{Mt}v_{x_i}^2(x,t)dQ+$$

$$+\frac{1}{2}\int_Q e^{-Mt}\left(\int_0^t u_{x_i}(x,s)ds\right)^2 dQ.$$

Для довільних функцій $u\in S_0^0, v\in V_T^1$ нерівність (14) отримуємо граничним переходом. □

3. Апріорні оцінки

Теорема 1. Існує така стала $c>0$, що для довільної функції $u \in H_0^1$ має місце нерівність

$$\| \bar{L}_I u \|_{(H_T^1)^*} \le c \| u \|_{H_0^1},$$

Доведення. Нехай u, v — гладкі функції. Застосовуючи нерівність Коші-Буняковського, отримаємо

$$| (Bu,v)_{L_2(Q)} | \le \sum_{i=1}^{n} \left| \int_Q \int_0^t K_i(t,\tau) u_{x_i}(x,\tau) d\tau v_{x_i}(x,t) dQ \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left(\int_Q \left(\int_0^t K_i(t,\tau) u_{x_i}(x,\tau) d\tau \right)^2 dQ \int_Q v_{x_i}^2(x,t) dQ \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left(\int_Q \int_0^t K_i^2(t,\tau) d\tau \int_0^t u_{x_i}^2(x,\tau) d\tau dQ \int_Q v_{x_i}^2(x,t) dQ \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left(\int_Q T c_K^2 \int_0^T u_{x_i}^2(x,\tau) d\tau dQ \int_Q v_{x_i}^2(x,t) dQ \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left(\int_Q T^2 c_K^2 u_{x_i}^2(x,t) dQ \int_Q v_{x_i}^2(x,t) dQ \right)^{\frac{1}{2}} \le c \| u \|_{H_0^1} \| v \|_{H_T^1}.$$

Таким чином

$$\frac{| (Bu,v)_{L_2(Q)} |}{\| v \|_{H_T^1}} \le c \| u \|_{H_0^1}.$$

Переходячи до супремуму за гладкими функціями v та зважаючи на щільність останнніх в просторі H_T^1, отримаємо

$$\| Bu \|_{(H_T^1)^*} \le c \| u \|_{H_0^1}.$$

З допомогою граничного переходу отримуємо, що остання нерівність справедлива для всіх функції $u \in H_0^1$.

У роботі [6] доведено, що для диференціальної частини оператора L має місце нерівність

$$\| \bar{L} u \|_{(H_T^1)^*} \le c \| u \|_{H_0^1}.$$

З двох останніх нерівностей випливає справедливість теореми. □

Теорема 2. Існує така стала $c > 0$, що для довільної функції $u \in H_0^1$ має місце нерівність

$$c^{-1} \| u \|_{S_0^0} \le \| \bar{L}_I u \|_{(V_T^1)^*}. \tag{10}$$

Доведення. Для доведення нерівності (10) розглянемо значення функціоналу $\bar{L}_I u \in (H_T^1)^* \subset (V_T^1)^*$ на елементі $v(t,x)$, де $v(t,x)$ — розв'язок задачі Коші

$$e^{Mt}\left(-v_t + v\right) = u(t,x), \qquad v|_{t=T} = 0.$$

У роботі [6] доведено, що для довільного $d > 0$ можна підібрати сталу M таким чином, щоб для диференціальної частини $\bar{L}$ оператора $\bar{L}_I$ мала місце нерівність

$$\left\langle \bar{L}u, v \right\rangle_{V_T^1} \ge d \int_Q e^{Mt} v_t^2 dQ + d \int_Q e^{Mt} v^2 dQ +$$

$$+ d \int_Q e^{-Mt} u^2 dQ + \frac{1}{4} \int_\Omega e^{-MT} u^2 |_{t=T} \, d\Omega +$$

$$+ \frac{\alpha}{8} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v_{x_i}^2 |_{t=0} \, d\Omega + d \sum_{i=1}^{n} \int_Q e^{Mt} v_{x_i}^2 dQ +$$

$$+ \frac{\alpha}{4} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega e^{-MT} \bar{u}_{x_i}^2 |_{t=T} \, d\Omega + d \sum_{i=1}^{n} \int_Q e^{-Mt} \bar{u}_{x_i}^2 dQ,$$

де $\bar{u}(t,x) = \int_0^t u(\tau,x) d\tau.$

Зважаючи на лему 1, маємо, що

$$| (Bu,v)_{L_2(Q)} | \le c_B \sum_{i=1}^{n} \int_Q e^{Mt} v_{x_i}^2 + e^{-Mt} \bar{u}_{x_i}^2 dQ.$$

Тому, обираючи $d > c_B$, маємо, що для деякої сталої $c > 0$ виконується нерівність

$$\left\langle \bar{L}_I u, v \right\rangle_{V_T^1} \ge \left\langle \bar{L}u, v \right\rangle_{V_T^1} - | \left\langle Bu, v \right\rangle_{V_T^1} | \ge$$

$$\ge c^{-1} (\| u \|_{S_0^0}^2 + \| v \|_{V_T^1}^2).$$

Застосовуючи до лівої частини нерівність Шварца, а до правої нерівність Коші, дістаємо

$$\| \bar{L}_I u \|_{(V_T^1)^*} \| v \|_{V_T^1} \ge \left\langle \bar{L}u, v \right\rangle_{V_T^1} \ge 2c^{-1} \| u \|_{S_0^0} \| v \|_{V_T^1}.$$

Звідки і випливає твердження теореми. □

Наслідок 1. Таким чином, доведено, що для всіх $u \in H_0^1$ мають місце нерівності

$$\| u \|_{S_0^0} \le c_1 \| \bar{L}_I u \|_{(V_T^1)^*} \le c_2 \| \bar{L}_I u \|_{(H_T^1)^*} \le c_3 \| u \|_{H_0^1}.$$

Теорема 3. Для всіх $v \in H_T^1$ мають місце нерівності

$$\| u \|_{S_T^0} \le c_1 \| \bar{L}_I u \|_{(V_0^1)^*} \le c_2 \| \bar{L}_I u \|_{(H_0^1)^*} \le c_3 \| u \|_{H_T^1} .$$

Доведення. Аналогічно доведенню теорем 1,2.

4.Узагальнена розв'язність

Зважаючи на отримані нерівності, використовуючи метод апріорних оцінок в негативних нормах [4],[5] та аналогічно роботі [6] можна довести такі теореми

Теорема 4. Для довільних $f \in (V_T^1)^* \subset (H_T^1)^*$ існує єдиний розв'язок $u \in V_0^1$ рівняння $\bar{L}_I u = f$.

*Означення***.** Узагальненим розв'язком рівняння $\bar{L}_I u = f$ будемо називати елемент $u \in S_0^0$, для якого існує послідовність $u_i \in L_0$, що

$$\| u_i - u \|_{S_0^0} \to 0, \qquad \| \bar{L}_I u_i - f \|_{(V_T^1)^*} \to 0$$

при $i \to \infty$.

Теорема 5. Для всіх $f \in (V_T^1)^*$ існує єдиний узагальнений розв'язок $u \in S_0^0$ рівняння $\bar{L}_I u = f$.

Теорема 6. Існує така стала $c_1 > 0$, що для всіх елементів $f \in (V_T^1)^*$ має місце нерівність $\| u \|_{S_0^0} \le c_1 \| f \|_{(V_T^1)^*}$, де $u \in S_0^0$ — узагальнений розв'язок рівняння $\bar{L}_I u = f$.

З а у в а ж е н н я 2. Враховуючи отримані апріорні нерівності, аналогічно до роботи [6], можна сформулювати теореми про керованість та асимптотичну керованість системами, що описуються інтегро-диференціальними рівняннями гіперболічного типу.

Список використаних джерел

1. *Duvant G., Lions J. L.* Inequalities in Mechanics and Physics. – Springer, 1976. – 397 p.

2. *Falaleev M.V., Orlov S.S.* Integro-differential equations with degeneration in banach spaces and it's applications in mathematical theory of elasticit // News of Irkutsk State University, Series «Mathematics», 2011**.** **-** №1. - P.118-134 (in Russian).

3. *Sveshnikov A.G., Alshin A.B., Korpusov M.O., Pletner Ju.D.* Linear and non-linear equations of Sobolev type. – Moscow.: Fizmatlit, 2007. – 734 p. (in Russian).

4. *Lyashko S. I.* Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters. - Boston / Dordrecht / London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 466 p.

5. *Lyashko S.I., Nomirovskii D.A., Petunin Ju.I., Semenov V.V.* Twentieh Hilbert problem. Generalized solutions of operator equations. – Dealektika, 2009. – 192 p. (in Russian).

6. *Anikushyn A.V., Nomirovskii D.A.* Trajectory and final controllability of hyperbolic system for some classes of distributions. – Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2008. – N 3. – P. 119-124 (in Ukrainian).

7. *Anikushyn A.V.* Generalized solvability of linear elliptic-like integro-differential equation // – Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2010. – N 3. – P. 163-168 (in Ukrainian).
8. *Anikushyn A.V.* Optimal control of integro-differential systems of parabolic type // Journ. of comp. and appl. math., 2010. — №3. — P. 3–16. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 30.08.13