УДК 517.929.4

Гаркуша Н.І., к. е. н., с.н.с.

Динаміка моделі Гудвіна з післядією

Розглянуто математичні моделі динаміки взаємовідношень підприємець-службовець Гудвіна. Наведено класичну модель, далі розглянуто модель з запізнюванням. Проведено дослідження стану рівноваги системі з післядією.

Ключові слова: математична модель, динамічна система, диференціальні рівняння, запізнювання, стійкість.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: ngarkusha@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н, проф. Хусаінов Д. Я.

Garkusha N.I, PhD

The dynamics of model Goodwin with delay

The mathematical model of the dynamics of relationships entrepreneur-agent Goodwin. First are the classic model. Next, consider a model with a delay. A study of equilibrium system with aftereffect.

Key words: mathematical model, dynamic system, differential equations, delay, stability.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: ngarkusha@gmail.com

Вступ

Запропонована робота є продовженням дослідження математичної моделі Гудвіна, яка була опублікована в статті [1]. В цій роботі описана взаємодія виробничих прошарків у суспільстві [2]. Розглядались два суспільних прошарки: службовці та підприємці. Їх взаємовідносини описані системою двох диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) = \left[\frac{1-y(t)}{k} - (g+n)\right]x(t),$$

$$\dot{y}(t) = \left[\frac{dw/dt}{w} - \frac{da/dt}{a}\right].$$

Лінійна апроксимація $w^{-1}\,dw/dt = -r + bx$ у другому рівнянні, приводить до співвідношення $y^{-1}\,dy/dt = -r + bx - g$. І модель Гудвіна взаємодії двох суспільних прошарків, має наступний вигляд

$$\dot{x}(t) = \left[\frac{1}{k} - (g+n) - \frac{y(t)}{k}\right]x(t),$$

$$\dot{y}(t) = \left[-(g+r) + bx(t)\right]y(t).$$

Дослідження динаміки системи Гудвіна з післядією.

Якщо враховувати час τ прийняття рішень (час після отримання інформації і прийняття рішення), то більш адекватною математичною моделлю є модель з післядією. Вона має вигляд

$$\dot{x}(t) = \left[\frac{1}{k} - (g+n) - \frac{y(t-\tau)}{k}\right]x(t),$$

$$\dot{y}(t) = \left[-(g+r) + bx(t-\tau)\right]y(t). \qquad (1)$$

Стани рівноваги цієї системи ті ж самі, що і в системі без післядії. Ними є дві точки спокою $M_0\left(x^0, y^0\right)$, $x^0 = 0$, $y^0 = 0$ і $M^*\left(x^*, y^*\right)$, $x^* = (g+r)/b$, $y^* = 1 - k(g+n)$. Нехай виконується умова

$$1 - k(g+n) > 0. \qquad (2)$$

Тоді друга особлива точка знаходиться в додатній чверті. Заміною змінних

$$x(t) = (g+r)/b + \xi(t), \; y(t) = 1 - k(g+n) + \eta(t) \qquad (3)$$

система (1) зводиться до вигляду «системи рівнянь збурень» у другій особливій точці. Вона буде мати вигляд

$$\dot{\xi}(t) = -\frac{1}{k}\left[\frac{g+r}{b} + \xi(t)\right]\eta(t-\tau),$$

$$\dot{\eta}(t) = b\left[1 + k(g+n) + \eta(t)\right]\xi(t-\tau). \qquad (4)$$

Проведемо дослідження стійкості другої з особливих точок $M^*\left(x^*, y^*\right)$. Система лінійного наближення для особливої точки $M^*\left(x^*, y^*\right)$ має вигляд

$$\dot{\xi}(t) = -\frac{g+r}{kb}\eta(t-\tau),$$

$$\dot{\eta}(t) = b[1 + k(g+n)]\xi(t-\tau).$$

Її характеристичним рівнянням буде

$$\lambda^2 + \frac{1}{k}(g+r)[1 + k(g+n)]e^{-2\lambda\tau} = 0.$$

Позначивши

$$\frac{1}{k}(g+r)[1 + k(g+n)] = \omega^2,$$

отримаємо, що рівняння має вигляд

$$\lambda^2 + \omega^2 e^{-2\lambda\tau} = 0. \qquad (5)$$

Його можна записати, як добуток

$$\left(\lambda + i\omega e^{-\lambda\tau}\right)\left(\lambda - i\omega e^{-\lambda\tau}\right) = 0$$

і розщепити на два окремих

$$\lambda + i\omega e^{-\lambda\tau} = 0, \quad \lambda - i\omega e^{-\lambda\tau} = 0.$$

В роботі [1] отримані наступні результати.

1. Рівняння (5) має злічену кількість коренів.

2. Якщо виконується умова $\omega = (-1)^k k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, то рівняння (5) має розв'язок $\lambda_0 = i\, k\pi/\tau$.

3. Існує хоча б один корінь з додатною дійсною частиною тобто $\lambda_0 = x_0 + iy_0$, $x_0 > 0$.

Таким чином модель Гудвіна має нестійкий ненульовий стан рівноваги.

Далі, розглянута модель, яка враховує взаємний вплив. Вона має вигляд

$$\dot{x}(t) = \left[\frac{1}{k} - (g+n) + R_1 x(t-\tau) - \frac{y(t-\tau)}{k}\right]x(t),$$
$$\dot{y}(t) = [-(g+r) + bx(t-\tau) + R_2 y(t-\tau)]y(t). \qquad (6)$$

В цій моделі сталі R_1, R_2 враховують взаємний вплив змінних. Система має вже чотири особливі точки:

$O_1(x_1, y_1)$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$,

$O_2(x_2, y_2)$, $x_2 = 0$, $y_2 = \dfrac{g+r}{R_1 k}$,

$O_3(x_3, y_3)$, $x_3 = \dfrac{1-(g+n)}{R_1 k}$, $y_3 = 0$,

$$O_4(x_4, y_4),\quad x_4 = \frac{R_2\left[\frac{1}{k} - (g+n)\right] + \frac{1}{k}(g+r)}{R_1 R_2 + \frac{b}{k}},$$

$$y_4 = \frac{R_1(g+r) - b\left[\frac{1}{k} - (g+n)\right]}{R_1 R_2 + \frac{b}{k}}. \qquad (7)$$

Інтерес являє стан рівноваги $O_4(x_4, y_4)$. При виконанні умов

$$R_1(g+r) > b\left[\frac{1}{k} - (g+n)\right],$$
$$(g+r) > R_2[k(g+n) - 1]$$

точка $O_4(x_4, y_4)$ буде знаходитися в першому квадранті. Лінеаризація нелінійної системи (6) в околі цієї точки дає наступну систему:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-\tau), \qquad (8)$$

де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},\ z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

$$a_{11} = \left[\frac{1}{k} - (g+n) + R_1 x_4 - \frac{1}{k}y_4\right],$$

$$a_{22} = [-(g+r) + bx_4 + R_2 y_4] \qquad (9)$$

$$b_{11} = R_1 x_4,\ b_{12} = -\frac{1}{k}x_4,\ b_{21} = y_4,\ b_{22} = R_2 y_4.$$

Відомо, що необхідною умовою стійкості лінійної стаціонарної системи з запізнюванням є асимптотична стійкість відповідної системи без запізнювання [3, 4]. Характеристичне рівняння системи без запізнювання

$$\dot{x}(t) = (A+B)x(t)$$

має вигляд

$$\det\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{21} & a_{22} + b_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$\lambda^2 - [(a_{11} + a_{22}) + (b_{11} + b_{22})]\lambda +$$
$$+ [(a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - b_{12}b_{21}] = 0.$$

Для рівняння другого порядку необхідною і достатньою умовою від'ємності дійсних частин коренів характеристичного рівняння є позитивні коефіцієнти, тобто

$$(a_{11}+a_{22})+(b_{11}+b_{22})>0,$$

$$(a_{11}+b_{11})(a_{22}+b_{22})-b_{12}b_{21}>0. \qquad (10)$$

Звідси, якщо виконується нерівність (10) з параметрами, визначеними в (9), то стан рівноваги буде асимптотично стійким.

Це означає, що встановлюється динамічна рівновага у взаємовідносинах між підприємцями і службовцями. В даній роботі проведена оцінка залежності коефіцієнтів взаємного впливу R_1 і R_2, а також запізнювання $\tau>0$ на стійкість стану рівноваги $O_4(x_4, y_4)$. Для дослідження будемо використовувати другий метод Ляпунова. Як відомо [3, 4], другий метод Ляпунова для систем з післядією використовується у двох напрямках: метод скінченновимірних функцій з умовою Разуміхіна і метод функціоналів Ляпунова-Красовського. Кожен з цих методів має свої сильні та слабкі сторони.

Будемо використовувати метод функцій Ляпунова квадратичного вигляду

$$V(z)=z^T Hz,\ H=\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22}\end{bmatrix},$$

$$h_{11}>0,\ h_{11}h_{22}-h_{12}^2>0. \qquad (11)$$

Повна похідна квадратичної функції Ляпунова в силу системи (8) має вигляд

$$\frac{d}{dt}V(z(t))=\dot z^T(t)Hz(t)+z^T(t)H\dot z(t)=$$
$$=[Az(t)+Bz(t-\tau)]Hz(t)+$$
$$+z^T(t)H[Az(t)+Bz(t-\tau)]$$

Або

$$\frac{d}{dt}V(z(t))=z^T(t)\left[(A+B)^T H+H(A+B)\right]z(t)+.$$
$$+2z^T(t)HB[z(t-\tau)-z(t)]. \qquad (12)$$

Загальна ідеологія доведення теорем про стійкість за допомогою функцій Ляпунова складається в наступному. Нехай початкові умови знаходяться в досить малому $\delta-$околі U_δ нульового стану рівноваги. Розглядається розв'язок, який починається в цьому околі. Цей окіл розташований всередині області

$$V^\alpha=\{x\in R^n : V(x)<\alpha\},$$

яка знаходиться всередині $\varepsilon-$околу U_ε стану рівноваги. Нехай, від супротивного, розв'язок виходить з $\varepsilon-$околу. Але тоді перша точка виходу повинна перетнути поверхню рівня функції Ляпунова

$$\partial V^\alpha=\{x\in R^n : V(x)=\alpha\}.$$

А це неможливо, оскільки повна похідна функції Ляпунова від'ємно визначена, що еквівалентно тому, що векторне поле системи направлено всередину поверхні рівня.

Умова Разуміхіна стосовно до системи з (8) означає, що повна похідна (12) обчислюється при виконанні умови

$$\lambda_{\min}(H)|z(t-\tau)|^2\le V(z(t-\tau))<V(z(t))\le$$
$$\le\lambda_{\max}(H)|z(t)|^2,\ t>0.$$

Або

$$|z(t-\tau)|<\sqrt{\varphi(H)}|z(t)|,\ \varphi(H)=\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}, \qquad (13)$$

$\lambda_{\min}(H),\ \lambda_{\max}(H)-$ екстремальні власні числа симетричної позитивно визначеної матриці H, під векторною та матричною нормами розуміються наступні

$$|z(t)|=\{x^2(t)+y^2(t)\}^{1/2},\ |A|=\{\lambda_{\max}(A^T A)\}^{1/2}.$$

Нехай виконуються необхідні умови стійкості і матриця $A+B$ асимптотично стійка. Тоді при довільній позитивно визначеній матриці C матричне рівняння Ляпунова

$$(A+B)^T H+H(A+B)=-C \qquad (14)$$

має єдиний розв'язок – позитивно визначену матрицю H [5]. І для повної похідної функції Ляпунова (12) можна провести наступну оцінку

$$\frac{d}{dt}V(z(t))\le-\lambda_{\min}(C)|z(t)|^2+2|HB|\left[|z(t)|+|z(t-\tau)|\right]\le$$
$$\le-\left\{\lambda_{\min}(C)-2|HB|\left[1+\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}\right]\right\}|z(t)|^2.$$

Таким чином, якщо знайдеться позитивно визначена матриця H, при якій буде виконуватись нерівність

$$\lambda_{\min}(C) - 2|HB|\left[1+\sqrt{\varphi(H)}\right] > 0\,, \qquad (15)$$

то стан рівноваги буде асимптотично стійким рівномірно (тобто незалежно) за $\tau > 0$.

Умову (15) можна інтерпретувати наступним чином. Якщо «основна» матриця A є «сильно стійкою», а матриця запізнювань B в якомусь сенсі «малою», то запізнювання на динаміку системи впливу не має.

Використовуємо викладені умови стійкості стосовно до системи Гудвіна (6), лінеаризованої в точці $O_4(x_4, y_4)$. Матричне рівняння Ляпунова (14) має вигляд

$$2[(a_{11}+b_{11})h_{11} + b_{21}h_{12}] = -c_{11}$$

$$b_{12}h_{11} + [(a_{11}+a_{22}) + (b_{11}+b_{22})]h_{12} + b_{21}h_{22} = -c_{12}$$

$$2[b_{12}h_{12} + (a_{22}+b_{22})h_{22}] = -c_{22}\,, \qquad (16)$$

Його розв'язками будуть

$$h_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta},\; h_{12} = \frac{\Delta_2}{\Delta},\; h_{22} = \frac{\Delta_3}{\Delta}\,,$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a_{11}+b_{11}) & b_{21} & 0 \\ b_{12} & (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) & b_{21} \\ 0 & b_{12} & (a_{22}+b_{22}) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -c_{11}/2 & b_{21} & 0 \\ -c_{12} & (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) & b_{21} \\ -c_{22}/2 & b_{12} & (a_{22}+b_{22}) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (a_{11}+b_{11}) & -c_{11}/2 & 0 \\ b_{12} & -c_{12} & b_{21} \\ 0 & -c_{22}/2 & (a_{22}+b_{22}) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} (a_{11}+b_{11}) & b_{21} & -c_{11}/2 \\ b_{12} & (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) & -c_{12} \\ 0 & b_{12} & -c_{22}/2 \end{vmatrix}$$

Поклавши (для простоти) $c_{11} = c_{22} = 2c > 0$, $c_{12} = 0$, отримаємо

$$\Delta = = [(a_{11}+b_{11})(a_{22}+b_{22})][a_{11}a_{22} + a_{11}b_{11} + a_{22}b_{11}]$$

$$\Delta_1 = -c(a_{22}+b_{22})[(a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) - b_{21}],$$

$$\Delta_2 = c(a_{11}+b_{11})(b_{12}+b_{21}), \qquad (17)$$

$$\Delta_3 = -c(a_{11}+b_{11})[(a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) - b_{12}].$$

Оскільки при вибраній матриці C для симетричних матриць H і C власні числа мають вигляд

$$\lambda_{\max}(H) = \frac{1}{2}\left\{(h_{11}+h_{22}) + \sqrt{(h_{11}-h_{12})^2 + 4h_{12}^2}\right\},$$

$$\lambda_{\max}(H) = \frac{1}{2}\left\{(h_{11}+h_{22}) - \sqrt{(h_{11}-h_{12})^2 + 4h_{12}^2}\right\},$$

$$\lambda_{\min}(C) = 2c\,, \qquad (18)$$

$$|HB| \le |H||B| = \lambda_{\max}(H)|B|\,,$$

$$|B| = \left\{b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{21}^2 + b_{22}^2\right\}^{1/2}, \qquad (19)$$

то при виконанні нерівності

$$c - \lambda_{\max}(H)|B|\left[1 + \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}\right] > 0\,, \qquad (20)$$

де величини $\lambda_{\max}(H)$, $\lambda_{\min}(H)$, $|B|$ визначені в (18), (19), стан рівноваги $O_4(x_4, y_4)$ лінеаризованої системи (8) з параметрами, визначеними в (10) і функцією Ляпунова (11) з коефіцієнтами, визначеними в (16), (17), буде асимптотично стійким при довільному запізнюванні $\tau > 0$.

Зауваження. Як випливає з теореми про стійкість за лінійним наближенням, асимптотично стійким буде і стан рівноваги $O_4(x_4, y_4)$ вихідної нелінійної системи (6). Але тут виникає питання про оцінку області стійкості. Оцінку області стійкості можна отримати за допомогою запропонованої функції Ляпунова.

Список використаної літератури

1. Garkusha N.I. The proximity of Models of the Dynamics of Voltaire and Goodwin // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics&Mathematics, -2013. -№2.– P.131-134. (in Ukrainian).
2. Zang V.V. Synergetic Economics. Time and changes in the nonlinear economictheory. M.: Mir, 1999. - 335 p. (in Russian).
3. Elsgoltz L. E., Norkin S.B. Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument. M: Nauka, 1970. - 240 p. (in Russian).
4. Heil J. The Theory of Functional Differential Equations. M.: Mir, 1984. – 421 p. (in Russian).
5. Barbashin E.A. The Method of Lyapunov's functions. M.: Nauka, 1970. – 240 p.(in Russian).

Подано до редколегії 20.05.2013