УДК 519.6 531

Зуб С.С., к. т. н., Зуб С.І. н.сп.

Група одиничних кватерніонів S^3 і пов'язані з нею симплектична і пуассонова структури

В даній роботі розглядається канонічна пуассонова структура на кодотичному розшаруванні T^*S^3 групи одиничних кватерніонів $S^3 \subset H$. З'ясовано сенс алгебри дужок Пуассона з кватерніоними змінними та розкрито їх зв'язок з внутрішньою структурою групи.

Ключові слова: кватерніон, форма Ліувіля, пуассонові структури.

S. S. Zub, Ph.D., S. I. Zub, researcher

The group of unit quaternion S^3 and associated symplectic and Poisson structures

In this paper we consider the canonical Poisson structure on the cotangent bundle T^*S^3 of the unit quaternion group $S^3 \subset H$. We clarify the algebraic sense of the Poisson brackets with quaternion variables and expose there association with inner structure of the group.

Key Words: quaternion, Liouville one form, Poisson structure.

*E-mail: stah@univ.kiev.ua

Статтю представив д.т.н. Кудін В.І.

1. Вступ

У статті [1], що присвячена гамільтоновій динаміці твердого тіла було отримано пуассонову структуру для кватерніонів як динамічних змінних на групах $SE(3)$ ($SO(3)$).

Ця структура формально збігається з пуассоновою структурою, що була досліджена А.В. Борисовим та І.С. Мамаєвим [2,3]. Вони отримують дужки Пуассона з кватерніонами, виходячи з глибокого аналізу структури $e(4) = Lie(SO(4))$. При цьому відповідна пуассонова структура виступає як структура Лі-Пуассона на $e(4)^*$. Досліджуються орбіти дії цієї алгебри Лі. Одна з досліджених орбіт гомеоморфна многовиду T^*S^3. При цьому S^3 розглядається як многовид, а не як група.

Разом з тим, на T^*S^3 як на кодотичному розшаруванні до будь-якої групи Лі існують класичні симплектична і пуассонова (не Лі-Пуассона) структури [4,5]. Існування цих структур визначається 1-формою Ліувіля на кодотичних розшаруваннях та класичною дією групи Лі (*Cotangent Lift*) на своєму кодотичному розшаруванні.

Даний підхід дозволяє вивести дужки Пуассона з кватерніонами як прямий наслідок канонічної симплектичної структури на T^*S^3. Такий розгляд повністю вкладається в схему викладену в роботі [5] і принципово грунтується лише на внутрішній структурі групи S^3 на відміну від підходу робіт [2,3]. Це дозволяє більшою мірою залучати не лише методи алгебри, але й диференціально-геометричні методи дослідження таких систем [4].

2. Група Лі як конфігураційний простір

Приведемо деякі результати роботи [5], в якій загальна група Лі G розглядається як конфігураційний простір механічної системи.

Для опису кодотичного розшарування T^*G використовується представлення лівої тривіалізації, яке в механіці твердого тіла асоціюється з системою відліку, що пов'язана з тілом.

$$\begin{cases} \lambda_t = \tau_G \times \varepsilon : T(G) \mapsto G \times \mathbf{g}, \\ \lambda_{ct} = \pi_G \times \mathbf{J}_R : T^*(G) \mapsto G \times \mathbf{g}^*, \end{cases} \quad (2.1)$$

де ε - (векторозначна) 1-форма Маурера-Картана, а $\mathbf{J}_R$ - відображення моменту, що відповідає дії групи G на собі правими зсувами [4]

$$\mathbf{J}_R : T^*(G) \mapsto \mathbf{g}^*, \quad \mathbf{J}_R(\alpha_a) = T_e^* L_a \cdot \alpha_a. \quad (2.2)$$

Представлення лівої тривіалізації дозволяє записувати дотичний вектор $\xi \in T_{\alpha_a}(T^*(G))$ у вигляді пари

$$\begin{cases} \xi_{(h)} = \pi_G^* \varepsilon(\xi) \in \mathbf{g}, \\ \xi^{(v)} = T\mathbf{J}_R \cdot \xi \in \mathbf{g}^*, \end{cases} \quad (2.3)$$

де точка закріплення α_a в представленні лівої тривіалізації (2.1) сама є парою $(a,\alpha)\in G\times\mathbf{g}^*$.

Введемо координатні функції

$$\mu_i(\alpha_a)=\left\langle \mathbf{J}_R(\alpha_a),e_i\right\rangle. \qquad (2.4)$$

Тоді

$$d\mu_i(\xi)=\xi_i^{(v)}. \qquad (2.5)$$

Диференціал функції F на $T^*(G)$ слід розкласти відповідно до розкладання вектора дотичного до $T^*(G)$ розшарування.

Відповідно до розкладання (2.3) запишемо

$$\partial_\xi F=dF\cdot\xi=\delta_g F\cdot\xi_{(h)}+\delta_\mu F\cdot\xi^{(v)},\quad \xi\in T_{\alpha_a}(T^*(G)). \qquad (2.6)$$

Співвідношення (2.6), фактично, є визначенням "диференціалів" δ_g та δ_μ, причому останній є справжнім частинним диференціалом.

Група Лі діє на собі, як на конфігураційному просторі, лівими та правими зсувами. Ці перетворення розширюються (піднімаються) на кодотичне розшарування таким чином.

Cotangent Lift цих зсувів визначається при лівій тривіалізації так:

$$\begin{cases} T_*L_b\mapsto L_b\times id_{\mathbf{g}}^*, \\ T_*R_{b^{-1}}\mapsto R_{b^{-1}}\times Ad_{b^{-1}}^*. \end{cases} \qquad (2.7)$$

Тоді для лівоінваріантного поля на $T^*(G)\cong G\times\mathbf{g}^*$ маємо

$$\tilde{\xi}^L_{|(a,\mu)}=(\xi,ad_\xi^*\mu). \qquad (2.8)$$

Симплектична 2-форма Ω на $T^*(G)$ визначається наступним співвідношенням:

$$\Omega_{|(a,\mu)}(\xi,\eta)=\left\langle\eta^{(v)},\xi_{(h)}\right\rangle-\left\langle\xi^{(v)},\eta_{(h)}\right\rangle+ +\left\langle\mu,[\xi_{(h)},\eta_{(h)}]\right\rangle,\quad \xi\in T_{|(a,\mu)}(T^*(G)). \qquad (2.9)$$

Дужки Пуассона на $T^*(G)$, що відповідають канонічній симплектичній структурі (2.9), мають вигляд

$$\{F,H\}_{|(a,\mu)}=(\delta_g F\cdot\delta_\mu H-\delta_g H\cdot\delta_\mu F- -\left\langle\mu,[\delta_\mu F,\delta_\mu H]\right\rangle)_{|(a,\mu)}, \qquad (2.10)$$

де використано визначення диференціалів δ_g,δ_μ з (2.6).

3. Дотичне розшарування до групи $S^3\subset H$ та її алгебра Лі

Важливою особливістю групи $S^3\subset H$ є те, що вона вкладена в асоціативну алгебру. Це дозволяє розглядати елементи дотичного та кодотичного розшарування до групи, як елементи тієї ж алгебри. Таким чином, крива на групі є також кривою в лінійному просторі. Тому вектор "швидкості" ξ на цій кривій, тобто елемент $\xi\in T(S^3)$, можна вважати елементом H.

$$q(t)q(t)^\dagger=1\longrightarrow \dot{q}q^\dagger+q\dot{q}^\dagger=\left\langle q,\dot{q}\right\rangle=0 \qquad (3.1)$$

тобто дотичні вектори до S^3 в точці q можуть бути представлені, як кватерніони ξ, ортогональні до кватерніону q.

Лівий (правий) зсув дотичного вектору в цьому представленні збігається з множенням кватерніона, що представляє дотичний вектор, на кватерніон, що генерує лівий (правий) зсув.

Дійсно, нехай $q(t)_{|t=0}=a$

$$T_aL_b\cdot\dot{q}=\frac{d}{dt}(L_bq(t))_{|t=0}=\frac{d}{dt}(bq(t))_{|t=0}=b\dot{q} \qquad (3.2)$$

Пропозиція 1. Якщо $\mathbf{e}$ - чистий кватерніон, то $\xi=L_q\mathbf{e}=q\mathbf{e}\in T(S^3)$ і, навпаки, якщо $\xi\in T(S^3)$, то $q^{-1}\xi=q^\dagger\xi$ - чистий кватерніон ($q\in S^3$).

Аналогічні твердження справедливі також для правих зсувів.

□

Те, що $\mathbf{e}$ - чистий кватерніон, можна представити таким чином

$$\mathbf{e}+\mathbf{e}\ =0\longrightarrow \mathbf{e}e_0+e_0\mathbf{e}\ =0\longrightarrow$$
$$\left\langle e_0,\mathbf{e}\right\rangle=0\longrightarrow\left\langle L_qe_0,L_q\mathbf{e}\right\rangle=0$$

і, навпаки

$$\left\langle q,\xi\right\rangle=0\longrightarrow\left\langle L_{q^{-1}}q,L_{q^{-1}}\xi\right\rangle=0\longrightarrow$$
$$\left\langle e_0,q^{-1}\xi\right\rangle=0\longrightarrow q^{-1}\xi+(q^{-1}\xi)^\dagger=0 .$$

■

Наслідок. Дотичний простір в одиниці групи можна ототожнити з підпростором чистих кватерніонів.

Як показано в [1], довільний одиничний кватерніон (тобто довільний елемент S^3) може бути представлений у вигляді

$\cos(\varphi/2)e_0 + \sin(\varphi/2)\mathbf{e}$, де $\mathbf{e}$ - одиничний чистий кватерніон.

Вибір половинного кута в якості параметра однопараметричної підгрупи пов'язаний з інтерпретацією гомоморфізму $\Gamma : S^3 \mapsto SO(3)$, при якому $\mathbf{e}$ задає вісь обертання, а φ - відповідний кут повороту довкола цієї осі.

Для дослідження алгебри Лі $Lie(S^3)$ буде зручніше записуватиме однопараметричну підгрупу у вигляді

$$\exp(t\mathbf{e}) = \cos(t)e_0 + \sin(t)\mathbf{e}. \quad (3.3)$$

Відповідно, чистий одиничний кватерніон $\mathbf{e}$ можна вважати елементом алгебри $Lie(S^3)$.

Для нашого розгляду зручно вважати базисом $Lie(S^3)$ набір твірних e_i, $i = 1,2,3$.

Тоді структурні константи $c^t{}_{rs}$ даної алгебри Лі матимуть вигляд

$$[e_r, e_s] = e_r e_s - e_s e_r = 2\varepsilon_{rst} e_t = c^t{}_{rs} e_t \quad (3.4)$$

Отже, зі всього вищезазначеного випливає, що $Lie(S^3) = T_e(S^3)$ можна ототожнити з підпростором чистих кватерніонів.

Пропозиція 2. Підпростір чистих кватерніонів є евклідовим простором, причому оператор $\mathrm{Ad}_q \in SO(3)$.

□

Дійсно [1,с. 5],

$$\mathrm{Ad}_q[\mathbf{e}] = \frac{d}{dt}(q\exp(t\mathbf{e})q^{-1})_{|t=0} = \\ = q\mathbf{e}q^{-1} = q\mathbf{e}q^{\dagger} = \Gamma(q)[\mathbf{e}]. \quad (3.5)$$

■

Тепер неважко вивести вираз для дужки Лі

$$\mathrm{ad}_\xi[\eta] = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)}[\eta]_{|t=0} = \\ = \frac{d}{dt}\left(\exp(t\xi)\eta\exp(-t\xi)\right) = \xi\eta - \eta\xi,$$

тобто

$$\mathrm{ad}_\xi[\eta] = \xi\eta - \eta\xi = [\xi, \eta] = 2\xi \times \eta. \quad (3.6)$$

Кватерніонозначна 1-форма dq може використовуватися для представлення векторів на $T(S^3)$, хоча диференціали dq^α і не є незалежними.

Розглянемо кватерніонозначну 1-форму ε

$$\varepsilon = q^{-1}dq. \quad (3.7)$$

Внаслідок Пропозиції 1 вона набуває значення в підпросторі чистих кватерніонів, тобто в алгебрі Лі $Lie(S^3)$ і, крім того, є лівоінваріантною.

Таким чином, ε є формою Маурера-Картана для групи S^3.

4. Дуальний до алгебри Лі простір та розшарування $T^*(S^3)$

На $T(S^3)$ з H індукується евклідова метрика, що інваріантна одночасно відносно лівих та правих зсувів. Зокрема, $T_e(S^3)$ є підпростором чистих кватерніонів і водночас 3-мірним евклідовим простором. Метрика на $Lie(S^3) = T_e(S^3)$ дозволяє ототожнити $Lie^*(S^3)$ та $Lie(S^3)$.

Дійсно, чистий кватерніон κ визначає лінійну форму на $Lie(S^3) = T_e(S^3)$ по формулі

$$\kappa[\xi] = \langle \kappa, \xi \rangle, \quad \forall \xi \in Lie(S^3). \quad (4.1)$$

Обчислимо оператор $\mathrm{Ad}_q^*[\mu]$

$$\langle \mathrm{Ad}_q^*[\mu], \xi \rangle = \langle \mu, \mathrm{Ad}_q[\xi] \rangle = \\ \langle \mu, q\xi q^{-1} \rangle = \langle q^{-1}\mu q, \xi \rangle = \langle q^{\dagger}\mu q, \xi \rangle$$

тобто

$$\mathrm{Ad}_q^*[\mu] = q^{-1}\mu q = q^{\dagger}\mu q. \quad (4.2)$$

Оператор ad_ξ^* можна знайти або як похідну по t для $\mathrm{Ad}_q^*[\mu]$ при $q(t) = \exp(t\xi)$, або як оператор, спряжений до ad_ξ. В будь-якому разі отримаємо наступний результат

$$\mathrm{ad}_\xi^*[\mu] = [\mu, \xi] = 2\mu \times \xi. \quad (4.3)$$

В світлі вищезазначеного, враховуючи існування двосторонньо інваріантної метрики на S^3, можна ототожнити $T^*(S^3)$ та $T(S^3)$.

Фундаментальна 1-форма Маурера-Картана, як вже було відзначено, має простий вигляд

$$\varepsilon : \xi \in T_q(S^3) \mapsto q^{-1}\xi \in Lie(S^3). \quad (4.4)$$

Для відображення моменту $\mathbf{J}_R$ маємо

$$\mathbf{J}_R = q^{-1}(\nabla - q\langle q, \nabla \rangle) = \\ = \mathrm{Im}(q^{-1}\nabla) = q^{\dagger}\nabla - q^{\alpha}\frac{\partial}{\partial q^{\alpha}}, \quad (4.5) \\ \nabla = e_\nu \frac{\partial}{\partial q^\nu}.$$

Відповідно, ліва тривіалізація дотичного та кодотичного розшарувань визначається стандартними співвідношеннями (2.1).

5. Елементи диференціального обчислення на $T\ \ (S\ \ )$

Можна переконатися, що дотичне відображення $T\mathbf{J}_R$, дійсно, переводить елемент з $T(T^*(S^3))$ в чистий кватерніон.

Розглянемо деяку криву

$$(q(t),\kappa(t)):|q(t)|=1,\langle q(t),\kappa(t)\rangle=0 \quad (5.1)$$

Співвідношення $\langle q(t),\kappa(t)\rangle=0$ можна записати у вигляді

$$\begin{gathered}\langle q(t),\kappa(t)\rangle=0\longrightarrow\\ q(t)^{\dagger}\kappa(t)+\kappa(t)^{\dagger}q(t)=0\longrightarrow\\ \dot{q}^{\dagger}\kappa+q^{\dagger}\dot{\kappa}+\dot{\kappa}^{\dagger}q+\kappa^{\dagger}\dot{q}=0\,.\end{gathered} \quad (5.2)$$

Маємо

$$T\mathbf{J}_R(\dot{\kappa})=\dot{q}^{\dagger}\kappa+q^{\dagger}\dot{\kappa} \quad (5.3)$$

Тоді

$$\begin{gathered}T\mathbf{J}_R(\dot{\kappa})+(T\mathbf{J}_R(\dot{\kappa}))^{\dagger}=\\ =\dot{q}^{\dagger}\kappa+q^{\dagger}\dot{\kappa}+\dot{\kappa}^{\dagger}q+\kappa^{\dagger}\dot{q}=0\end{gathered} \quad (5.4)$$

тобто $T\mathbf{J}_R(\dot{\kappa})$ - чистий кватерніон, і можна вважати, що $T\mathbf{J}_R(\dot{\kappa})\in Lie^*(S^3)$.

Отже, якщо вектор $\xi\in T(T^*(S^3))$, то в представленні лівої тривіалізації він має вигляд

$$\begin{cases}\xi_{(h)}=\pi^*\varepsilon(\xi)\in Lie(S^3),\\ \xi^{(v)}=T\mathbf{J}_R\cdot\xi\in Lie^*(S^3).\end{cases} \quad (5.5)$$

Розглянемо деяку криву $(q(t),\kappa(t))$ на $T^*(S^3)$. Її проекцією на S^3 буде $q(t)$. Якщо крива $(q(t),\kappa(t))$ повністю розташована в одному шарі $T^*(S^3)$, тобто $q(t)=const$, то 1-й рядок (5.5) дає $\xi_{(h)}=0$.

Якщо ж $\mathbf{J}_R(\kappa(t))=\mu=const$, то $\kappa(t)=q(t)\mu$, тобто крива $\kappa(t)$ повністю визначається своєю проекцією $q(t)$ на G. В цьому випадку $\xi^{(v)}=0$.

Введемо координатні функції

$$\mu_i(\kappa_q)=\langle\mathbf{J}_R(\kappa_q),e_i\rangle=\langle e_i,q^{-1}\kappa_q\rangle. \quad (5.6)$$

Тоді

$$d\mu_i(\xi)=\xi_i^{(v)}. \quad (5.7)$$

Розглянемо деяку функцію $F(q,\mu)$.

Диференціал функції на $T^*(S^3)$ слід розкласти відповідно до розкладання вектора, дотичного до $T^*(S^3)$ розшарування.

Відповідно до розкладання (5.5) запишемо

$$\begin{gathered}\partial_{\xi}F=dF\cdot\xi=\delta_qF\cdot\xi_{(h)}+\delta_{\mu}F\cdot\xi^{(v)},\\ \xi\in T_{\kappa_q}(T^*(S^3)).\end{gathered} \quad (5.8)$$

Співвідношення (5.8), фактично, є визначенням "диференціалів" δ_q і δ_{μ}, причому останній є справжнім частинним диференціалом.

З (5.8) також витікає, що

$$\delta_qF\in Lie^*(S^3),\quad \delta_{\mu}F\in Lie(S^3)\,. \quad (5.9)$$

Розберемо 2 частинні випадки.

1. Розглянемо функції вигляду $F(q)$. Зазначимо, що диференціал функції $F(q)$, будучи лінійною формою на дотичних до S^3 векторах, тим самим є елементом $T^*(S^3)$, тобто $d_{|\kappa}(F\circ\pi_G)\in T^*_{|\kappa}(G)$. Тоді

$$\begin{cases}\delta_{\mu}F=0,\\ \delta_qF=\mathbf{J}_R(dF_{|q})=(q^{\dagger}\nabla-q^{\alpha}\frac{\partial}{\partial q^{\alpha}})F,\end{cases} \quad (5.10)$$

$$\nabla=e_{\nu}\frac{\partial}{\partial q^{\nu}}.$$

2. Розглянемо функції, що в представленні лівої тривіалізації залежні лише від змінних μ на $Lie\ \ (S\ \ )$. Множина таких функцій, вочевидь, збігається з множиною лівоінваріантних функцій.

$$\begin{cases}\delta_{\mu}F=\partial_{\mu}F,\quad \partial_{\mu}=e_i\frac{\partial}{\partial\mu_i},\\ \delta_qF=0.\end{cases} \quad (5.11)$$

6. Дужки Пуассона на $T\ \ (S\ \ )$

Загальна формула (2.10) для дужок Пуассона на групі в нашому випадку $T\ \ (S\ \ )$ має вигляд

$$\begin{gathered}\{F,G\}=\langle\delta_qF,\delta_{\mu}G\rangle-\langle\delta_qG,\delta_{\mu}F\rangle-\\ -\langle\mu,[\delta_{\mu}F,\delta_{\mu}G]\rangle.\end{gathered} \quad (6.1)$$

З (5.10) ясно, що

$$\{F(q),G(q)\}=0\,. \quad (6.2)$$

Також легко бачити з (5.11), що

$$\{F(\mu),G(\mu)\}=-\langle\mu,[\delta_{\mu}F,\delta_{\mu}G]\rangle. \quad (6.3)$$

Нехай, зокрема, $F(\mu)=\mu_i,G(\mu)=\mu_j$.

Маємо

$$\delta_\mu(\mu_i) = e_r \frac{\partial \mu_i}{\partial \mu_r} = e_i\,. \tag{6.4}$$

$$\begin{gathered}\{\mu_i, \mu_j\} = -\langle \mu, [e_i, e_j] \rangle = \\ -2\varepsilon_{ijk} \langle \mu, e_k \rangle = -2\varepsilon_{ijk}\mu_k\end{gathered}\,. \tag{6.5}$$

Нехай тепер $F(\mu) = \mu_i, G(\mu) = q_j$.

Тоді з (6.1) отримуємо

$\{\mu_i, q_j\} = -\langle \delta_q(q_j), \delta_\mu(\mu_i) \rangle.$

При цьому

$$\delta_q(q_j) = \left(q^\dagger \nabla - q^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right) q_j =$$

$$= \left((q^0 - q^s e_s) \left(e_\nu \frac{\partial}{\partial q^\nu} \right) - q^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right) q_j =$$

$$\begin{aligned}&= (q^0 - q^s e_s) e_j - q_j = \\ &= q^0 e_j - q^s e_s e_j - q_j = \\ &= q^0 e_j - q^s(-\delta_{sj} e_0 + \varepsilon_{sjt}) e_t - q_j = \\ &= q^0 e_j + q^j - q^s \varepsilon_{sjt} e_t - q_j = \\ &q^0 e_j - q^s \varepsilon_{sjt} e_t\end{aligned}\,.$$

Таким чином

$$\delta_q(q_j) = q^0 e_j - q^s \varepsilon_{sjt} e_t \tag{6.6}$$

Отже

$$\{\mu_i, q_j\} = -\langle (q^0 e_j - q^s \varepsilon_{sjt} e_t), e_i \rangle = -q^0 \delta_{ij} + q^s \varepsilon_{sji}$$

тобто

$$\{\mu_i, q_j\} = -q^0 \delta_{ij} - q^s \varepsilon_{ijs}\,. \tag{6.7}$$

Аналогічні обчислення для q^0 дають

$$\{\mu_i, q_0\} = q_i\,. \tag{6.8}$$

В результаті отримуємо

$$\begin{cases} \{\mu_i, \mu_j\} = -2\varepsilon_{ijk}\mu_k, \\ \{\mu_i, q_0\} = q_i, \\ \{\mu_i, q_j\} = -q^0 \delta_{ij} - q^s \varepsilon_{ijs}. \end{cases} \tag{6.9}$$

Стандартний базис ε_i для $Lie(SO(3))$ відрізняється від вибраного для зручності роботи з кватерніонами базисом e_i, тому

$$\begin{cases} e_i = 2\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_i = \frac{1}{2} e_i, \\ e^i = \frac{1}{2}\varepsilon^i \leftrightarrow \varepsilon^i = 2e^i, \\ \mu_i e^i = \frac{\mu_i}{2}\varepsilon^i = m_i \varepsilon^i \longrightarrow \end{cases} \tag{6.10}$$

$$m_i = \tfrac{\mu_i}{2} \leftrightarrow \mu_i = 2m_i.$$

Підставляючи останнє співвідношення в (6.9), маємо

$$\begin{cases} \{m_i, m_j\} = -\varepsilon_{ijk} m_k, \\ \{m_i, q_0\} = \frac{1}{2} q_i, \\ \{m_i, q_j\} = -\frac{1}{2}(q^0 \delta_{ij} + q^s \varepsilon_{ijs}). \end{cases} \tag{6.11}$$

Це збігається з виразом, що наведений в книзі [3, (2.7), с.103].

В нашій роботі [1] співвідношення аналогічні (6.11) виведені іншим способом в *інерційній* системі відліку, що відповідає *правій* тривіалізації.

.

7. Алгебраїчний сенс дужок Пуассона на $T^*(S^3)$

В попередньому розділі були отримані дужки Пуассона для кватерніонних змінних, що повністю визначають канонічну пуассонову структуру на $T^*(S^3)$

$$\begin{cases} \{\mu_i, \mu_j\} = -2\varepsilon_{ijk}\mu_k, \\ \{\mu_i, q_0\} = q_i, \\ \{\mu_i, q_j\} = -q^0 \delta_{ij} - q^s \varepsilon_{ijs}, \\ \{q_\mu, q_\nu\} = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Цим співвідношенням можна надати більш компактний вигляд, що прояснює алгебраїчний сенс цих співвідношень.

Для цього треба домовитись про те, що постійні кватерніони можна вносити під знак дужки Пуассона.

Тоді, домножаючи 2-й та 3-й рядки в (7.1) на елементи $e_0, e_j, j = 1..3$ і складаючи їх, отримаємо

$$\begin{aligned}&\{\mu_i, q_0 e_0 + q_j e_j\} = \\ &= q_i e_0 - (q^0 \delta_{ij} + q^s \varepsilon_{ijs}) e_j = \\ &= q_i e_0 - q^0 e_i - \varepsilon_{ijs} q^s e_j.\end{aligned}$$

Маємо також

$$\begin{aligned}&(q_0 e_0 + q_j e_j) e_i = q^0 e_i + q_j e_j e_i = \\ &= q^0 e_i + q_j(-\delta_{ji} e_0 + \varepsilon_{jir} e_r) = \\ &= q^0 e_i - q_i e_0 + \varepsilon_{jir} q_j e_r = \\ &= q^0 e_i - q_i e_0 + \varepsilon_{rij} q_r e_j.\end{aligned}$$

Інакше кажучи

$$\{\mu_i, q_0 e_0 + q_j e_j\} = -(q_0 e_0 + q_j e_j) e_i\,,$$

тобто

$$\{\mu_i, q\} = -q e_i\,. \tag{7.2}$$

Візьмемо тепер лінійну комбінацію (7.2) з числовими коефіцієнтами ξ_i :

$$\{q, \langle \mu, \xi \rangle\} = q\xi. \qquad (7.3)$$

Виконаємо аналогічні перетворення з 1-м рядком (7.1). Отримаємо

$$\{\mu, \langle \mu, \xi \rangle\} = 2\varepsilon_{ijk}\xi_i\mu_k e_j = -2\varepsilon_{ikj}\xi_i\mu_k e_j = -2\xi \times \mu = = \mathrm{ad}^*_\xi[\mu].$$

Отже

$$\begin{cases} \{\mu, \langle \mu, \xi \rangle\} = \mathrm{ad}^*_\xi[\mu], \\ \{q, \langle \mu, \xi \rangle\} = q\xi = L_q\xi, \end{cases} \qquad (7.4)$$

$$\{F(q), G(q)\} = 0. \qquad (7.5)$$

Співвідношення (7.4) означають, що динамічна змінна $\langle \mu, \xi \rangle$ є гамільтоніаном-генератором лівоінваріантного поля (2.8)

$$\begin{cases} \xi_{(h)} = \xi, \\ \xi_{(v)} = \mathrm{ad}^*_\xi[\mu], \end{cases} \qquad (7.6)$$

причому гамільтоніан визначається виразом (див. [6, доб. 5] та [4, 5])

$$H_\xi(q, \mu) = \langle \mu, \xi \rangle = = \theta_{|(q,\mu)}(\xi^L) = \mathbf{J}_R(q, \mu)[\xi], \qquad (7.7)$$

де θ - канонічна 1-форма Ліувіля на $T^*(S^3)$, яка в карті λ_{ct} (2.1) має вигляд

$$\theta_{|(q,\mu)} = \mu_i(q^{-1}dq)^i = \langle \mu, (q^{-1}dq) \rangle. \qquad (7.8)$$

Відповідна до наведеної вище пуассонової структури (6.1) симплектична 2-форма виражається через θ стандартним чином

$$\omega = -d\theta. \qquad (7.9)$$

Примітка: Цікаво відзначити, що дужка Пуассона $\{q, \langle \mu, \xi \rangle\} = q\xi$ (7.4) повністю визначає закон множення кватерніонів в алгебрі H.

Література

1. *Zub S .S.* Canonical Poisson structure on T*SE(3) in the quaternion variables/ S.S. Zub, S.I. Zub // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics — 2013. — №2. — P. 17–24.
2. *Borisov A. V.* Nonlinear Poisson Brackets and Isomorphisms in dynamics / A.V. Borisov, I.S. Mamaev // Reg. and chaotic dynamics — 1997. — V. 2, № 3/4. — P. 72–89. (in Russian).
3. *Borisov A. V.* Poisson Structures and Lie Algebras in Hamiltonian Mechanics / A. V. Borisov, I.S. Mamaev. — Izhevsk: Reg. and chaotic dynamics, 1999. — 464 p. (in Russian)
4. *Marsden J.* Introduction to mechanics and symmetry. A basic exposition of classical mechanical systems / J. Marsden, T. Ratiu. — Texts in Applied Mathematics 17, Springer-Verlag, New York, 1994. — 553 p.
5. *Zub S.S.* Lie group as a configuration space for the simple mechanical system system / S.S. Zub // J. Num. Appl. Math. — 2013. — V. 109, — №2. — P. 89–94. (in Russian)
6. *Arnold V.I.* Mathematical Methods of Classical Mechanics / V.I. Arnold. — Second Edition. — New York: Springer-Verlag, 1989. — 516 p.

Надійшла до редколегії 15.06.13