УДК 517.9

Капустян О.А., к. ф.-м. н.

Дослідження динаміки розв'язків задачі оптимального керування для параболічного рівняння

Досліджується неавтономна нескінченно-вимірна динамічна система, породжена розв'язками задачі оптимального керування для нелінійного параболічного рівняння. Доведено існування pullback атрактору відповідного процесу та досліджено його властивості.

Ключові слова: задача оптимального керування, нелінійне параболічне рівняння, pullback атрактор.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: olena.kap@gmail.com

O. Kapustian (PhD)

Investigation of solutions dynamics of optimal control problem for parabolic equation

We investigate non-autonomous infinite-dimensional dynamical system, generated by solutions of optimal control problem for nonlinear parabolic equation. We prove the existence of pullback attractor for corresponding process and we investigate its properties.

Key Words: optimal control problem, nonlinear parabolic equation, pullback attractor.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: *olena.kap@gmail.com*

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Хусаінов Д.Я.

Як відомо, задачі оптимального керування еволюційними системами є неавтономними і можуть бути описані в термінах динамічних процесів [1, 2]. Динаміку таких об'єктів описують у термінах pullback атракторів [3, 4]. Існування такого pullback атрактору для екстремальної задачі на розв'язках 3D системи Нав'є-Стокса було доведено в [5]. У даній роботі вивчається динаміка розв'язків задачі оптимального керування для нелінійного параболічного рівняння з квадратичним критерієм якості. Встановлюється, що за певних умов на множину допустимих керувань оптимальні розв'язки породжують динамічний процес, який має у фазовому просторі рівномірно обмежений pullback атрактор.

Постановка задачі

Розглядається задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} = \Delta y + f(y) + u(t,x),\ t>\tau,\ x\in\Omega, \\ y|_{\partial\Omega} = 0,\ y|_{t=\tau} = y_\tau(x), \end{cases} \quad (1)$$

$$u \in U_\tau \subset L^2(\tau,+\infty; L^2(\Omega)), \quad (2)$$

$$J_\tau(y,u) = \int_\tau^{+\infty}\int_\Omega \left(y^2(t,x) + u^2(t,x)\right) dxdt \to \inf . \quad (3)$$

Нехай при певних умовах $\forall\tau\in R$ $\forall y_\tau \in L^2(\Omega)$ задача оптимального керування (1)-(3) має принаймні один розв'язок $\{\tilde{y},\tilde{u}\}$. Тоді динаміка еволюційної задачі (1)-(3) визначається відображенням

$$U(t,\tau,y_\tau) = \{\tilde{y}(t) \mid \tilde{y} - \textit{оптимальна траєкторія}\ (1)-(3),\ \tilde{y}(\tau) = y_\tau\}. \quad (4)$$

В роботі доводиться, що за виконання принципу оптимальності Беллмана формула (4) породжує процес, який має у фазовому просторі $L^2(\Omega)$ рівномірно обмежений pullback атрактор.

Встановлення розв'язності задачі (1)-(3)

Вважаємо виконаними наступні умови:

$$f \in C(R),\ |f(y)| \le C_1|y|,\ \ f'(y) \ge -C_2, \quad (5)$$

$\forall\tau\in R, U_\tau$ - замкнена, опукла, $0\in U_\tau$,

$$\text{якщо } s>\tau \text{, то для } u\in U_\tau\ \ u|_{[s,+\infty)} \in U_s, \quad (6)$$

якщо $s>\tau$, $\tilde{u}\in U_\tau$, $\bar{u}\in U_s$, то

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t), t\in[\tau,s], \\ \bar{u}(t), t>s \end{cases} \in U_\tau . \quad (7)$$

За умов (5) відомо [6], що $\forall u\in U_\tau$, $\forall y_\tau \in L^2(\Omega)$ задача (1) має єдиний узагальнений розв'язок на

$[\tau,+\infty)$, причому $y\in C([\tau,+\infty);L^2(\Omega))$ і майже скрізь (м. с.) задовольняє енергетичну рівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2+\|y(t)\|^2_{H_0^1}=(f(y),y)+(u,y), \qquad (8)$$

де тут і надалі $\|\cdot\|$ і $(\cdot,\cdot)$ означають норму і скалярний добуток в $L^2(\Omega)$.

Лема 1. Нехай

$$C_1<\lambda_1, \qquad (9)$$

де $\lambda_1>0$ - перше власне число оператора $-\Delta$ у просторі $H_0^1(\Omega)$. Тоді задача (1) – (3) має розв'язок для $\forall y_\tau\in L^2(\Omega)$.

Доведення. З рівності (8) для допустимого процесу $\{y,u\}$ маємо:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2+\|y(t)\|^2_{H_0^1}\le C_1\|y\|^2+\|u\|\cdot\|y\|. \qquad (10)$$

В силу (9) і нерівності Пуанкаре $\exists\delta>0\,\exists C_3>0$:

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2+\delta\|y(t)\|^2\le C_3\|u(t)\|^2. \qquad (11)$$

Звідси $\forall t\ge s\ge\tau$

$$\|y(t)\|^2\le\|y(s)\|^2e^{-\delta(t-s)}+C_3\int_s^t\|u(p)\|^2\cdot e^{-\delta(t-p)}dp, \qquad (12)$$

$$\int_s^t\|y(p)\|^2dp\le\frac{1}{\delta}\left(\|y(s)\|^2+C_3\int_s^t\|u(p)\|^2dp\right). \qquad (13)$$

Звідси, зокрема, маємо, що для довільного допустимого процесу $\{y,u\}$ функціонал $J_\tau(y,u)<\infty$.

Нехай J_τ - значення задачі (1) - (3), $\{y_n,u_n\}$ - мінімізуюча послідовність допустимих пар така, що

$$J_\tau(y_n,u_n)\le J_\tau+\frac{1}{n}. \qquad (14)$$

Тоді $\{u_n\}$ - обмежені в $L^2(\tau,+\infty;L^2(\Omega))$, $\{y_n\}$ - обмежені в $L^2(\tau,+\infty;H_0^1(\Omega))$, $\left\{\frac{\partial y_n}{\partial t}\right\}$ - обмежені в $L^2(\tau,+\infty;H^{-1}(\Omega))$. Отже, для деякої пари $\{\tilde y,\tilde u\}$ по підпослідовності

$$\begin{aligned}&u_n\xrightarrow{w}\tilde u \ \text{ в } L^2(\tau,+\infty;L^2(\Omega)),\\ &y_n\xrightarrow{w}\tilde y \ \text{ в } L^2(\tau,+\infty;H_0^1(\Omega)),\\ &\frac{\partial y_n}{\partial t}\xrightarrow{w}\frac{\partial\tilde y}{\partial t} \ \text{ в } L^2(\tau,+\infty;H^{-1}(\Omega)),\end{aligned} \qquad (15)$$

і за лемою про компактність [6] $\forall T>\tau$

$$\begin{aligned}&y_n\to\tilde y \ \text{ в } L^2(\tau,T;L^2(\Omega)),\\ &y_n(t,x)\to\tilde y(t,x) \ \text{ м.с.}\end{aligned} \qquad (16)$$

Тоді за теоремою Лебега $f(y_n)\to f(\tilde y)$ в $L^2(\tau,T;L^2(\Omega))$, отже, $\tilde y$ - розв'язок задачі (1) з керуванням $\tilde u$ і оскільки $\tilde u\in U_\tau$, то $\{\tilde y,\tilde u\}$ - допустимий процес у задачі (1) – (3). При цьому з нерівності (14) в силу слабкої збіжності

$$J_\tau(\tilde y,\tilde u)\le\underline{\lim}J_\tau(y_n,u_n)\le J_\tau,$$

що і означає оптимальність процесу $\{\tilde y,\tilde u\}$. Лему доведено.

Лема 2. Відображення (4) визначає неавтономну динамічну систему (процес), тобто $\forall\tau\in R\ \ \forall y_\tau\in L^2(\Omega)$:

1) $U(\tau,\tau,y_\tau)=y_\tau$;

2) $U(t,\tau,y_\tau)=U(t,s,U(s,\tau,y_\tau))\ \ \forall t\ge s\ge\tau$.

Доведення. Умова 1) очевидна. Нехай $\xi\in U(t,\tau,y_\tau)$. Тоді $\xi=\tilde y(t)$, де $\{\tilde y,\tilde u\}$ - оптимальний процес в (1) – (3) на $[\tau,+\infty)$, $\tilde y(\tau)=y_\tau$, $\tilde u\in U_\tau$. Тоді $\tilde y(s)\in U(s,\tau,y_\tau)\ \ \forall s\in(\tau,t)$. Доведемо включення

$$\tilde y(t)\in U(t,s,\tilde y(s)), \qquad (17)$$

що еквівалентне принципу оптимальності Беллмана. Запишемо рівність

$$\tilde J_\tau=J_\tau(\tilde y,\tilde u)=\int_\tau^s\left(\|\tilde y\|^2+\|\tilde u\|^2\right)dt+\int_s^{+\infty}\left(\|\tilde y\|^2+\|\tilde u\|^2\right)dt \qquad (18)$$

і розглянемо задачу (1) – (13) на проміжку $[s,+\infty)$ з початковими даними $(s,\tilde y(s))$, допустимою множиною керувань U_s і функціоналом J_s. Якщо звуження $\{\tilde y,\tilde u\}$ на $[s,+\infty)$ не є оптимальним процесом в такій задачі, то для її розв'язку $\{\bar y,\bar u\}$ (існування якого гарантує Лема 1) маємо нерівність

$$\int_s^{+\infty}\left(\|\bar y\|^2+\|\bar u\|^2\right)dt<\int_s^{+\infty}\left(\|\tilde y\|^2+\|\tilde u\|^2\right)dt. \qquad (19)$$

Розглянемо керування

$$u(t)=\begin{cases}\tilde u(t), t\in[\tau,s],\\ \bar u(t), t\ge s,\end{cases}$$

що в силу (6) належить U_τ. Тоді

$$y(t)=\begin{cases}\tilde y(t), t\in[\tau,s],\\ \bar y(t), t\ge s\end{cases}$$

є розв'язком задачі (1), який відповідає керуванню u. Отже,

$$J_\tau=\int_\tau^s\left(\|\tilde y\|^2+\|\tilde u\|^2\right)dt+\int_s^{+\infty}\left(\|\bar y\|^2+\|\bar u\|^2\right)dt\ge\tilde J_\tau,$$

тобто в силу $\int_s^{+\infty}\left(\|\bar y\|^2+\|\bar u\|^2\right)dt\ge\int_s^{+\infty}\left(\|\tilde y\|^2+\|\tilde u\|^2\right)dt$, що суперечить нерівності (19).

Таким чином, одержуємо (17), звідки маємо, що $U(t,\tau,y_\tau)\subset U(t,s,U(s,\tau,y_\tau))$.

Тепер нехай $\xi\in U(t,s,U(s,\tau,y_\tau))$. Тоді $\xi=\tilde{y}_2(t)$, $\{\tilde{y}_2,\tilde{u}_2\}$ є оптимальним процесом в задачі (1) - (3) на $[s,+\infty)$ з $\tilde{y}_2(s)=y_s$, $\tilde{u}_2\in U_s$ і $y_s=\tilde{y}_1(s)$, де $\{\tilde{y}_1,\tilde{u}_1\}$ - оптимальний процес в задачі (1) - (3) на $[\tau,+\infty)$ з $\tilde{y}_1(\tau)=y_\tau$. Розглянемо керування

$$u(t)=\begin{cases}\tilde{u}_1(t), t\in[\tau,s],\\ \tilde{u}_2(t), t\ge s\end{cases}\in U_\tau$$

і відповідну траєкторію

$$y(t)=\begin{cases}\tilde{y}_1(t), t\in[\tau,s],\\ \tilde{y}_2(t), t\ge s,\end{cases}$$

що є розв'язком задачі (1) - (3) на $[\tau,+\infty)$ з керуванням u. Крім того, оскільки звуження $\{\tilde{y}_1,\tilde{u}_1\}$ на $[s,+\infty)$ є допустимим процесом в задачі (1) - (3) на $[s,+\infty)$ внаслідок умови (6), то

$$J_\tau(y,u)=\int_\tau^s\left(\|\tilde{y}_1\|^2+\|\tilde{u}_1\|^2\right)dt+$$
$$+\int_s^{+\infty}\left(\|\tilde{y}_2\|^2+\|\tilde{u}_2\|^2\right)dt\ge J_\tau(y_1,u_1).$$

Отже, $\{y,u\}$ - оптимальний процес в задачі (1) - (3). Лему доведено.

Доведення існування pullback атрактору

Означення [4]. Pullback-атрактором процесу U називається сім'я компактних множин $\{\Theta(t)\}_{t\in R}$ така, що:

1) $\forall t\in R$ $\forall$ обмеженої $B\subset L^2(\Omega)$

$$dist(U(t,s,B),\Theta(t))\to 0,\ s\to-\infty;\qquad(20)$$

2) $U(t,s,\Theta(s))=\Theta(t)$ $\forall t\ge s$;

3) $\Theta(t)$ є мінімальною замкненою множиною, яка задовольняє умову (20).

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема. *Нехай виконані умови (5)–(7), (9) і*

$$\exists\alpha>0\ \forall\tau\in R\ \ \forall u\in U_\tau$$
$$\|u(t)\|\le\alpha\ \textit{для майже всіх } t\ge\tau.\qquad(21)$$

Тоді процес (4) має pullback-атрактор $\{\Theta(t)\}_{t\in R}$, *причому* $\exists R_0>0\ \ \forall t\in R$

$$\Theta(t)\subset B_{R_0}=\{y\in L^2(\Omega)\mid \|y\|\le R_0\}.\qquad(22)$$

Доведення. Покладемо $V_\tau=U_\tau\bigcap\{u\in L^2(\tau,+\infty;L^2(\Omega))\mid \|u(t)\|\le\alpha\ \textit{для м. в. } t>\tau\}$ Легко показати, що V_τ замкнена, опукла і задовольняє умови (6), (7). Тож надалі будемо розглядати задачу (1) - (3) з множиною допустимих керувань V_τ. При цьому слід зауважити, що V_τ не є обмеженою в $L^2(\tau,+\infty;L^2(\Omega))$.

Нехай $\tilde{y}(t)\in U(t,\tau,y_\tau)$, $\tilde{u}\in V_\tau$ - відповідне оптимальне керування. З оцінки (12) для $\|y_\tau\|\le R$ маємо:

$$\|\tilde{y}(t)\|^2\le R^2e^{-\delta(t-\tau)}+C_3\cdot\frac{\alpha^2}{\delta}.\qquad(23)$$

Таким чином, для $R_0^2:=1+C_3\dfrac{\alpha^2}{\delta}$ маємо: $\forall R>0\ \ \exists s=s(R)>0\ \ \forall\tau\in R$

$$U(s+\tau,\tau,B_R)\subset B_{R_0}\quad\forall s\ge s(R).\qquad(24)$$

З (24) випливає, якщо $\Theta(t)$ задовольняє умову (20), то $\Theta(t)\subset B_{R_0}$. Оскільки $\forall\tau\le\tau(R)$ $\forall t\in R$

$$U(t,\tau,B_R)\subset U(t,t-1,U(t-1,\tau,B_R))\subset$$
$$\subset U(t,t-1,B_{R_0}),\qquad(25)$$

то набір множин $\left\{K(t)=\overline{U(t,t-1,B_{R_0})}\right\}_{t\in R}$ задовольняє (20). Тоді з [4] для доведення теореми достатньо встановити компактність $K(t)$ та замкненість графіка відображення $y\mapsto U(t,\tau,y)$.

Отже, нехай $\{\eta_n\}\subset B_{R_0}$ і $\xi_n\in U(t,\tau,\eta_n)$. Тоді $\xi_n=\tilde{y}_n(t)$, $\tilde{y}_n(\tau)=\eta_n$, $\{\tilde{y}_n,\tilde{u}_n\}$ - оптимальний процес в задачі (1) - (3), $\tilde{u}\in V_\tau$.

В силу оптимальності

$$J_\tau(\tilde{y}_n,\tilde{u}_n)\le J_\tau(y_n,0)=\int_\tau^{+\infty}\|y_n(t)\|^2dt,\qquad(26)$$

де y_n - розв'язок задачі (1), $y_n(\tau)=\eta_n$, з керуванням $u=0$. З нерівності (13) одержимо

$$\int_\tau^{+\infty}\|y_n(t)\|^2dt\le\frac{1}{\delta}\|\eta_n\|^2\le\frac{R_0^2}{\delta},$$

тож для деякої допустимої пари $\{\tilde{y},\tilde{u}\}$ виконуються збіжності (15), (16), що, зокрема, в силу [6] означає, що

$$\forall t>\tau\quad\tilde{y}_n(t)\to y(t)\ \ \textit{в}\ \ L^2(\Omega).\qquad(27)$$

Отже, $\{\xi_n\}$ - предкомпактна і компактність $K(t)$ доведена.

Тепер нехай $\xi_n\in U(t,\tau,\eta_n)$, $\eta_n\to\eta$, $\xi_n\to\xi$. Доведемо, що $\xi\in U(t,\tau,\eta)$. Аналогічно попереднім міркуванням для послідовності $\xi_n=\tilde{y}_n(t)$ з керуванням $\tilde{u}_n$, існує допустима пара $\{\tilde{y},\tilde{u}\}$ така, що виконуються збіжності (15), (16), (27), причому $\tilde{y}_n(\tau)=\eta_n \to \tilde{y}(\tau)=\eta$ в $L^2(\Omega)$.

Доведемо, що $\{y,u\}$ - оптимальний процес в задачі (1) - (3). Візьмемо довільне $u\in V_\tau$. Нехай y_n - розв'язок задачі (1) з керуванням u і $y_n(\tau)=\eta_n$. Тоді y_n збігається до деякого y у сенсі збіжностей (15), (16), (27), причому $y(\tau)=\eta$, і $\{y,u\}$ - допустима пара в задачі (1) - (3). З принципу оптимальності Беллмана випливає, що $\forall T>\tau$ процес $\{\tilde{y}_n,\tilde{u}_n\}$ є оптимальним в (1) – (3) з початковими даними $(T,\tilde{y}_n(T))$, отже,

$$\int_T^{+\infty}\left(\|\tilde{y}_n(t)\|^2+\|\tilde{u}_n(t)\|^2\right)dt \le \int_T^{+\infty}\|p_n(t)\|^2dt, \qquad (28)$$

де p_n - розв'язок задачі (1) з з початковими даними $(T,\tilde{y}_n(T))$ і керуванням $u=0$. Тоді внаслідок нерівності (13)

$$\int_T^{+\infty}\|p_n(t)\|^2dt \le \frac{1}{\delta}\|\tilde{y}_n(T)\|^2. \qquad (29)$$

Також з нерівності (13)

$$\int_T^{+\infty}\|y_n(t)\|^2dt \le \frac{1}{\delta}\left(\|y_n(T)\|^2+C_3\int_T^{+\infty}\|u(t)\|^2dt\right). \qquad (30)$$

Тоді з нерівності $J_\tau(\tilde{y}_n,\tilde{u}_n)\le J_\tau(y_n,u)$ матимемо

$$\int_\tau^T\left(\|\tilde{y}_n(t)\|^2+\|\tilde{u}_n(t)\|^2\right)dt \le \int_\tau^T\|y_n(t)\|^2dt+\int_\tau^{+\infty}\|u(t)\|^2dt+$$

$$+\frac{1}{\delta}\left(\|y_n(T)\|^2+C_3\int_T^{+\infty}\|u(t)\|^2dt\right). \qquad (31)$$

Отже,

$$\int_\tau^T\left(\|\tilde{y}(t)\|^2+\|\tilde{u}(t)\|^2\right)dt \le \int_\tau^T\|y(t)\|^2dt+\int_\tau^{+\infty}\|u(t)\|^2dt+$$

$$+\frac{1}{\delta}\left(\|y(T)\|^2+C_3\int_T^{+\infty}\|u(t)\|^2dt\right),$$

і при $T\to\infty$ $J_\tau(\tilde{y},\tilde{u})\le J_\tau(y,u)$.

Таким чином, $\{\tilde{y},\tilde{u}\}$ - оптимальний процес в задачі (1) - (3) і $\xi_n=\tilde{y}_n(\tau)\to\tilde{y}(\tau)=\xi\in U(t,\tau,\eta)$. Теорему доведено.

Висновки

У даній роботі вивчена динаміка розв'язків задачі оптимального керування для нелінійного параболічного рівняння з квадратичним критерієм якості. Встановлено, що за певних умов на множину допустимих керувань оптимальні розв'язки породжують динамічний процес, який має у фазовому просторі рівномірно обмежений pullback атрактор.

Список використаних джерел

1. *Hale J.K.* Asymptotic behavior of dissipative systems. – AMS, Providence, 1988. - 224p.
2. *Zgurovsky M.Z., Mel'nik V.S.* Nonlinear analysis and control of physical processes. - Springer, Berlin, 2004. - 304p.
3. *Haraux A.* Attractors of asymptotically compact processes and applications to nonlinear PDE // Partial Differential Equations. - 1988. Volume 13. - PP. 1383 – 1414.
4. *Karaballo T., Langa J.A., Mel'nik V.S., Valero J.* Pullback attractors of nonautonomous and stochastic multivalued dynamical systems // Set-Valued Analysis. - 2003. - № 11. – PP.153-201.
5. *Kapustyan O.V., Kasyanov P.O., Valero J.* Pullback attractors for a class of extremal solutions of the 3D Navier-Stokes system // Journal of Math. Analysis and Applications. – 2011. – 373. – PP. 535 – 547.
6. *Kapustyan O.V., Kapustian O.A.,Sukretna A.V.* Approximate bounded synthesis for distributed systems. - LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbrücken, Germany, 2013. – 223 p. (electronic version ISBN 978-3-659-32021-7).

Надійшла до редколегії 01.11.13