УДК 519.852:519.876

Кудін В.І.[1], д.т.н., п.н.с.

Про аналіз властивостей чистих стратегій матричної гри у змішаних стратегіях методом базисних матриць

Проаналізовано властивості прямої задачі лінійного програмування, як аналог матричної гри у змішаних стратегіях. Застосовано положення методу допустимих базисних матриць модифікованого сімплекс-методу при встановленні властивостей чистих стратегій-платіжної матриці.

Ключові слова: базисна матриця, оптимальна стратегія, оптимальний розв'язок, змішана стратегія.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: V_I_Kudin@mail.ru

V.I.Kudin[1], Dr. Sci.

The analysis of strategies matrix game with application methods of basic matrix

Analysis of matrix game with mix strategies as prime and dual linear programming problems of basic matrix methods is research.

Key Words: basic matrix, optimal solution, optimal strategy, mix strategy .

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: V_I_Kudin@mail.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Вступ

В загальному випадку знаходження оптимальних стратегій гравців матричної гри є лише однією із задач [1-3]. Не менш цікавою і важливоє є також задача по дослідженню властивості несуттєвості чистих стратегій гравців [1]. Саме дослідженню цього питання присвячена дана робота.

Постановка задачі.

Введемо в розгляд двоїсту пару задач лінійного програмування [4], де *пряма задача*:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad (1)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \quad \left(\sum_{j=1}^{n} A_j x_j \le B\right) \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \ . \qquad (3)$$

Або в матричному вигляді введемо в розгляд задачу [4] лінійного програмування вигляду:

$$\min Cx, \ \ Ax \le B^T, \ x \ge 0,$$

де $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Вважаємо, що модель виду (1)−(3) має матрицю обмежень A в якій кількість стовпців більш ніж рядків ("довга").

Двоїста задача:

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \ , \qquad (4)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + \ldots + a_{m1}u_m \ge c_1; \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + \ldots + a_{m2}u_m \ge c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + \ldots + a_{mn}u_m \ge c_n; \end{cases} \qquad (5)$$

$$u_i \ge 0, \quad (i = \overline{1, m}) \qquad (6)$$

Двоїста до (1)−(3) може бути записана у вигляді:

$$\min Bu,\ A^T u \ge C^T,\ u \ge 0,\ u = (u_1, u_2, ..., u_m)^T).$$

Матрична гра у змішаних стратегіях подається як двоїста пара задач лінійного програмування [1-3],

де $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n},\ c_j = 1,\ j = \overline{1,n}$.

Задача (4)-(6) є двоїстою до задачі (1)-(3), яку називають прямою. Поняття двоїстості є взаємним.

Перетворимо задачі до канонічного вигляду введенням додаткових обмежень та поставимо обмеженням кожної задачі у відповідність змінні її двоїстої задачі, а саме:

$$A_x^{'} x^{'} = B^T,$$

$$x^{'} \ge 0,$$

де $x^{'} = (\underbrace{x_1, x_2, ..., x_n}_{x}, x_{n+1}, ..., x_{n+m})^T$,

$$A_x^{'} = \left\{ \begin{matrix} a_{11}\ a_{12}\ ...\ a_{1n}\ 1 \\ a_{21}\ a_{22}\ ...\ a_{2n}\quad 1 \\ .... \\ \underbrace{a_{m1}\ a_{m2} ...\ a_{mn}}_{A} \quad \underbrace{\qquad\quad 1}_{E} \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \left| \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ u_m \end{matrix} \right.$$

Аналогічно:

$$A_u^{'T} u^{'} = C^T,$$

$$u^{'} \ge 0,$$

$$u^{'} = (\underbrace{u_1, u_2, ..., u_m}_{x}, u_{m+1}, ..., u_{n+m})^T,$$

$$A_u^{'} = \left\{ \begin{matrix} a_{11}\ a_{21}\ ...\ a_{m1}\ -1 \\ a_{12}\ a_{22}\ ...\ a_{m2}\quad -1 \\ .... \\ \underbrace{a_{1n}\ a_{2n} ...\ a_{mn}}_{A^T} \quad \underbrace{\qquad\quad -1}_{E_n} \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{m1}u_m - u_{m+1} = c_1; \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{m2}u_m - u_{m+2} = c_2; \\ .... \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{mn}u_m - u_{m+n} = c_n. \end{cases} \left| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{matrix} \right.$$

$$u \ge 0$$

Пасивність та неактивність стовпців моделі лінійного програмування (1)-(3).

Нехай

$$X = \left\{ x / \sum_{j=1}^{n} A_j x_j \le B,\ x \ge 0 \right\}$$

$$X_r = \left\{ x / \sum_{j=1, j \ne r}^{n} A_j x_j \le B,\ x \ge 0 \right\}$$

Визначення 1. Стовпець A_r $(x_r = 0)$ задачі (1)-(3) пасивний , якщо $X = X_r$.

Аналогічно означення пасивності стовпця можна ввести і для задачі (4)-(6).

Теорема 1. (друга теорема двоїстості для канонічної задачі [4]). Для того, щоб плани X^* та U^* відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості:

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* - c_j \right) = 0,\ j = \overline{1,n}$$

$$u_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Очевидніший взаємозв’язок між оптимальними планами прямої та двоїстої задач встановлює наслідок другої теореми двоїстості.

Наслідок 1. Якщо в результаті підстановки оптимального плану однієї із задач (прямої чи двоїстої) в систему обмежень цієї задачі *i*-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідна *i*-та компонента оптимального плану (відповідна стовпцю A_i) спряженої задачі дорівнює нулю.

Якщо *i*-та компонента оптимального плану однієї із задач додатна (при стовпцю A_i), то відповідне *i*-те обмеження спряженої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Оскільки оптимальні стратегії матричної гри визначаються через компоненти розв‘язки задач (1)-(3) та (4)-(6) [1], саме складові оптимальних стратегій $u_i^{'}$ та $w_i^{'}$ ігри пов'язані з компонентами u_i та x_j оптимальних планів двоїстих задач лінійного програмування формулами

$$w_j^{'} = x_j / \sum_{j=1}^{n} x_j, \; u_i^{'} = u_i / \sum_{i=1}^{m} u_i ,$$

то наведені вище умови пасивності тісно пов‘язані з категорією суттєвості чистої стратегії матричної гри.

Означення 4. Чиста стратегія $e_k = \left(\underbrace{\overbrace{0,0,...,0,1}^{k},0,...0}_{m} \right)$ першого гравця називається *істотною (суттєвою)*, якщо існує така оптимальна змішана стратегія $u' = \left(u_1, u_2, ..., u_{k-1}, \underbrace{u_k}_{k}, u_{k+1}, ..., u_m \right)$, в якій k-а її складова u_k додатня. В іншому випадку стратегія e_k *неістотна (несуттєва)*.

Аналогічно визначаються чисті $e_k = \left(\underbrace{\overbrace{0,0,...,0,1}^{k},0,...,0}_{n} \right)$ суттєві і несуттєві стратегії другого гравця $w^{'} = \left(w_1, w_2, ..., w_{k-1}, \underbrace{w_k}_{k}, w_{k+1}, ..., w_n \right)$.

Мають місце такі властивості оптимальних стратегій матричної гри:

Чиста стратегія e_k гравця є суттєвою в тому і тільки в тому випадку, якщо на ній досягається ціна гри при довільній оптимальній стратегії противника. Іншими словами, необхідною і достатньою умовою того, щоб чиста стратегія e_k першого гравця була суттєвою, є виконання рівності $e_k A w = v$ для всіх оптимальних стратегій другого гравця, де v ціна ігри.

Якщо стратегія e_k не є істотною, то завжди знайдеться оптимальна стратегія $w^{'}$ другого гравця, яка гарантує строгу нерівність $e_k A w < v$

Це вказує на потребу проведення аналізу структурних властивостей системи обмежень (2)-(3) задачі. Наприклад, для розв’язування задачі сімплекс-методом [5-6] необхідно звести задачі до канонічної форми, для чого в системи обмежень задач необхідно ввести m невід’ємних змінних.

Введемо згідно [4] основні означення.

Означення 5. Квадратну матрицю $A_б$, утворену перетином r лінійно незалежних рядків $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_r}$ $\left(i_1, i_2, ..., i_r\right) = I_б \subset I$ та стовпців $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_r}$ $\left(i_1, i_2, ..., i_r\right) = J_б \subset J$ (1), будемо називати базисною, а розв′язок $x_0 = \left(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r}\right)$ відповідної їм системи рівнянь $A_б x_б = B_б$ базисним.

Означення 6. Дві базисні матриці з одним відмінним рядком чи стовпцем будемо називати суміжними.

Базисні матриці в ході ітерацій МБМ [5] послідовно змінюються заміщенням рядків, а модифікований сімплекс-метод (МСМ) [4] – заміщенням стовпців. Нехай - $e_{ri,}$ - елементи матриці $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$ $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ - вектор розвинення a_r за рядками базисної матриці $A_б$, $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{mj})$ вектор розвинення стовпця A_r, $r \in J$ за стовпцями базисної матриці $A_б$. Введені вектори та їх елементи для МДБМ та МСМ (коефіцієнти розвинення нормалей обмежень, коефіцієнти оберненої матриці для суміжної “наступної” базисної матриці будемо позначати рискою зверху, тобто $\overline{A}_б$, $\overline{\alpha}_r$, $\overline{e}_{ri}$, $\overline{\alpha}_0$.

Теорема 2. [5] Між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (5) за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць в двох суміжних базисних матрицях мають місце такі співвідношення

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \; \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li,},$$

$$r = \overline{0,n}; \; i = \overline{1,m}; \; i \neq k; \tag{7}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \; \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li,},$$

$$r = \overline{1,m}; \; i = \overline{1,m}; \; i \neq k; \tag{8}$$

причому умовою невиродженості базисної матриці при заміщенні нормаллю a_l k-го рядка базисної матриці $A_б$ є виконання $\alpha_{lk} \neq 0$.

Теорема 3. [4] Між коефіцієнтами розвинення стовпців (2) за стовпцями базисної матриці, елементами обернених матриць в двох суміжних базисних матрицях мають місце такі співвідношення

$$\bar{x}_{ij} = \frac{x_{rj}}{x_{rs}},\ \bar{x}_{kj} = x_{kj} - \frac{x_{rj}}{x_{rs}} x_{ks}, \quad k = \overline{1,m};$$
$$j = \overline{1,m};\ r \neq k; \tag{8}$$
$$\bar{e}_{rj} = \frac{e_{rj}}{x_{rs}},\ \bar{e}_{kj} = e_{kj} - \frac{e_{rj}}{x_{rs}} x_{ks}, \quad k = \overline{1,m};$$
$$j = \overline{1,m};\ r \neq k; \tag{9}$$

причому умовою: невиродженості базисної матриці при заміщенні стовпцем A_s r-го стовпця базисної матриці $A_б$ є виконання $x_{rs} \neq 0$.

Умови наведених теорем є фрагментами більш загальних положень МДБМ, МСМ з якими можна ознайомитись в [4,5], причому $A_б^T$ задачі (1)-(3) є $A_б$ задачі (4)-(6).

Нехай відомі ранг матриці А та базисна матриця $A_б$ (5).

Теорема 4. Для того, щоб обмеження $a_r u^T \leq c_r$ було пасивним, необхідно і достатньо існування базисної матриці $A_б$, відносно якої компоненти вектору розвинення $\alpha_{rk} \geq 0$ для всіх k ($x_{rs} \geq 0,\ s = \overline{1,m}$ для $A_б^T$).

Теорема 6. Для того, чиста стратегія r другого гравця при платіжній матриці A була несуттєвою $x_r = 0$, необхідно і достатньо щоб обмеження $a_r u^T \leq c_r$ було пасивним (щоб існувала базисна матриця $A_б$, відносно якої компоненти вектору розвинення $\alpha_{rk} \geq 0$ для всіх k).

Доведення. Згідно умов теорем 1 про доповнюючу нежорсткість виконуються співвідношення $x_j^* \times \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1,n}$ та $u_i^* \times \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1,m}$. При виконанні умови пасивності для обмження (4) двоїстої задачі (4)-(6) буде виконання $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* - c_j < 0$, $\forall u \in U\ (u^* = (u_1^*, u_2^*, ..., u_m^*) \in U)$. Звідки витікає, що $x_j^* = 0$. При виконанні умови пасивнос ті для обмеження (2) прямої задачі (1)-(3) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i < 0$, $\forall x \in X\ (x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in X)$. Звідки витікає, що $u_i^* = 0$. Навпаки з рівності $x_j^* = 0$ чи $u_i^* = 0$ (при оптимальності та виконанні умов (2)-(3) та (5)-(6)) витікає з теореми, що $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i < 0$ та $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* - c_j < 0$ та пасивніть.

Висновок

Умови пасивності та необмеженості обмежнь (5) задачі (4)-(6) встановлені в середовищі МБМ дозволяють застосуванням теореми про доповнюючу нежорсткість визначати неактивні та пасивні стовпці (2)задачі (1)-(3.

Враховуючи зв'язок компонент розвязків двоїстої та прямої задач з компонентами оптимальних стратегій гравців можна встановлювати несуттєвість чистих стратегій гравців, тобто про структурні властивості платіжної матриці гри.

Список використаних джерел

1. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* New directions in linear programming. − M. − Sovetskoe radio, − 1969. − 524p. (in Russian).
2. *Dantzig G.B* Linear programming and application. M.: Progress, − 1966. − 356 p. (in Russian).
3. *Dantzig G.B., Thapa M.N.* Linear Programming 1: introduction, Springer, − 1997. − 435p.
4. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* Linear programming/.Theory and methods. −M.: Nauka, − 1963. – 776p. (in Russian).
5. Kudin V. I., Lyashko S.I., Khritonenko N.V., Yatsenko Yu.P. Analysis of the properties of a linear system using the method of artificial basis matrices // Kibernetika i sistemny analiz. — 2007. — N 4. —.P. 119–127 (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 19.04.13