УДК 519.21

Макушенко І.А., к. ф.-м. н.

Двокритеріальна задача керування напрямком вхідного потоку для багатоканальних мереж немарковського типу

Для багатоканальної мережі немарковського типу розглянуто задачу максимізації середнього прибутку та мінімізації величини ризику. В явному вигляді, через параметри моделі знайдені цільові функції оптимізаційної задачі.

Ключові слова: багатоканальна мережа, оптимальне керування, генератриса, інтегральне рівняння.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: iamak@ukr.net

I.A. Makushenko, Ph.D.

Two-criterion problem of controlling the direction of the input flow for multichannel networks of non Markov type

The problem of maximization of average income and risk minimization for the multichannel network of non Markov type is considered. The goal functions of optimization problem are found via system parameters in explicit form.

Key Words: multichannel network, optimal control, generating function, integral equaption.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: iamak@ukr.net

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

1. Вступ

На сьогоднішній день теорія стохастичних мереж є одним з основних перспективних напрямків моделювання систем мережевої структури. Важливим класом задач у дослідженні стохастичних мереж є оптимізаційні задачі пов'язані з розподілом інформаційних потоків. Розв'язки таких задач надають можливість вирішувати практичні задачі керування ресурсами інформаційно-обчислювальних мереж та мереж зв'язку. Сучасний стан досліджень в цій області представлено в роботах [1], [2].

Тема даної роботи пов'язана з проблемою оптимального поділу між вузлами мережі зовнішнього навантаження. У роботі для немарковських стохастичних мереж типу $[G\,I\,|\,G\,I\,|\,\infty]^r$ розглянуто задачу оптимального керування напрямком вхідного потоку. При цьому вибір стратегії керування базується на таких показниках якості функціонування мережі як середній прибуток від роботи всієї мережі та ризик досягнення певного прибутку.

Розглянемо мережу масового обслуговування, яка складається з r однотипних обслуговуючих вузлів. На обслуговуючі вузли іззовні надходить один загальний рекурентний потік вимог $\nu(t)$. Проміжок часу між моментами надходження вимог розподілений у відповідності з функцією розподілу $F(t)$. Вимога, що надійшла на вхід мережі, з імовірністю q_i, $i=1,2,...,r$, ($\sum_{i=1}^{r} q_i = 1$) спрямовується для обслуговування в i - ий вузол. Час обслуговування вимоги в i - ому вузлі має функцію розподілу $G_i(t)$, $i=1,2,...,r$. Через $P = \| p_{i\,j} \|_1^r$ будемо позначати матрицю маршрутизації мережі. Зручно ввести "$r+1$" вузол і інтерпрентувати його як вихід з мережі обслуговування, $p_{i\,r+1} = 1 - \sum_{j=1}^{r} p_{i\,j}$ - імовірність виходу з мережі після обслуговування в i - ому вузлі. Мережі такого типу використовуються при моделюванні інформаційно-обчислювальних мереж та мереж зв'язку ([3], [4]).

2. Постановка оптимізаційної задачі

На процесі обслуговування вимог у $[G\,I\,|\,G\,I\,|\,\infty]^r$ - мережі визначимо адитивний функціонал $S(t) = (S_1(t), S_2(t), ..., S_r(t))$, де $S_i(t)$, $i=1,2,...,r$ - число вимог, обслуговування яких завершилося в i - ому вузлі за час t. Якщо існують границі $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} M\; S_i(t)$, то будемо позначати їх через m_i, $i=1,2,...,r$. Очевидно, що m_i, $i=1,2,...,r$ залежать від параметрів

$[GI\,|\,GI\,|\,\infty]^r$ - мережі: $q'=(q_1,q_2,...,q_r)$, $F(t)$, $G_i(t)$, $i=1,2,...,r$, $P=\|p_{ij}\|_1^r$. У подальшому будемо вважати, що $F(t)$, $G_i(t)$, $i=1,2,...,r$, P є заданими, а вибір вектора q знаходиться у нашому розпорядженні. Таким чином $m_i=m_i(q)$, $i=1,2,...,r$. Аналогічно, якщо існують границі $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\operatorname{cov}(S_i(t),S_j(t))$, то будемо позначати їх через $V_{ij}=V_{ij}(q)$, $i,j=1,2,...,r$.

Нехай C_i, $i=1,2,...,r$ - прибуток від обслуговування однієї вимоги в i- ому вузлі. Тоді важливе значення має наступна двокритеріальна оптимізаційна задача:

$$M(q)=\sum_{i=1}^{r}C_i m_i(q)\to\max\,, \tag{1}$$

$$V(q)=\sum_{i,j=1}^{r}C_i V_{ij}(q)C_j\to\min\,, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{r}q_i=1\,,\ q_i\ge 0\,,\ i=1,2,...,r\,. \tag{3}$$

Розв’язок $q^{*}{}'=(q_1^*,q_2^*,...,q_r^*)$ оптимізаційної задачі (1) − (3) представляє собою таке керування вхідним потоком, яке одночасно максимізує середній прибуток від роботи мережі та мінімізує ризик досягнення цього прибутку.

3. Знаходження явного виду цільових функцій

Для того, щоб розв'язати оптимізаційну задачу (1) − (3), необхідно подати функціонали *M(q)* і *D(q)* через параметри мережі.

Перед тим, як шукати розв’язок оптимізаційних задач, вивчимо адитивний функціонал $S(t)=(S_1(t),S_2(t),...,S_r(t))$, $t\ge 0$.

Нехай $\Phi(t,z)$, $z'=(z_1,...,z_r)$, $|z|\le 1$ - генератриса вектора $S(t)$. Для $\Phi(t,z)$ справедливий такий результат.

Лема 1. Функція $\Phi(t,z)$ є єдиним розв’язком системи інтегральних рівнянь

$$\Phi(t,z)=1-F(t)+$$
$$+\int_0^t\Phi(t-u,z)\Big[\sum_{i=1}^{r}q_i\,\Phi^{(i)}(t-u,z)\Big]\,dF(u), \tag{4}$$
$$\Phi^{(i)}(t,z)=[1-G_i(t)]+$$
$$+\int_0^t\Big[z_i\sum_{j=1}^{r}p_{ij}\,\Phi^{(j)}(t-u,z)+p_{i\,r+1}\Big]\,dG_i(u), \tag{5}$$
$$i=1,2,...,r\,.$$

Доведення леми базується на моделюванні процесу обслуговування вимог у $[GI\,|\,GI\,|\,\infty]^r$ - мережі разом з введеним вище адитивним функціоналом гіллястим процесом Беллмана-Харріса ([5]) з $2r+1$ типами частинок.

За допомогою генератриси $\Phi(t,z)$ можна визначити моменти першого і другого порядку адитивного функціоналу $S(t)=(S_1(t),S_2(t),...,S_r(t))$.

Нехай

$$A_\alpha(t)=\frac{\partial\Phi(t,z)}{\partial z_\alpha}\Big|_{z=\bar 1}\,,\ B_{\alpha\beta}(t)=\frac{\partial^2\Phi(t,z)}{\partial z_\alpha\partial z_\beta}\Big|_{z=\bar 1}\,,$$
$$\alpha,\beta=1,2,...,r\,.$$

Тоді, очевидно,

$$M\ S_\alpha(t)=A_\alpha(t)\,,$$
$$\operatorname{cov}(S_\alpha(t),S_\beta(t))=B_{\alpha\beta}(t)+\delta_{\alpha\beta}A_\alpha(t)-A_\alpha(t)A_\beta(t)\,,$$
$$\alpha,\beta=1,2,...,r\,.$$

В свою чергу з (4), (5) випливає, що у визначенні $A_\alpha(t)$, $B_{\alpha\beta}(t)$, $\alpha,\beta=1,2,...,r$ приймають участь функції

$$A_\alpha^{(i)}(t)=\frac{\partial\Phi^{(i)}(t,z)}{\partial z_\alpha}\Big|_{z=\bar 1}\,,\ B_{\alpha\beta}^{(i)}(t)=\frac{\partial^2\Phi(t,z)}{\partial z_\alpha\partial z_\beta}\Big|_{z=\bar 1}\,,$$
$$i,\alpha,\beta=1,2,...,r\,.$$

З леми 1 випливає наступний результат.

Наслідок 1. Функції $A_\alpha(t)$, $A_\alpha^{(i)}(t)$, $B_{\alpha\beta}(t)$, $B_{\alpha\beta}^{(i)}(t)$ є єдиним розв’язком систем інтегральних рівнянь:

1)

$$A_\alpha^{(i)}(t)=\int_0^t A_\alpha(t-u)\,dF(u)+$$
$$+\sum_{i=1}^{r}q_i\int_0^t A_\alpha^{(i)}(t-u)\,dF(u), \tag{6}$$
$$A_\alpha^{(i)}(t)=\delta_{i\alpha}(1-p_{i\,r+1})\,G_i(t)+$$
$$+\sum_{j=1}^{r}\int_0^t dG_i(u)\,p_{ij}\,A_\alpha^{(j)}(t-u), \tag{7}$$
$$i,\alpha=1,2,...,r\,;$$

2)

$$B_{\alpha\beta}(t) = \int_0^t B_{\alpha\beta}(t-u)\, d\,F(u) + \int_0^t A_\alpha(t-u)\Big[\sum_{i=1}^r q_i\, A_\beta^{(i)}(t-u)\Big]\, d\,F(u) + \int_0^t A_\beta(t-u)\Big[\sum_{i=1}^r q_i\, A_\alpha^{(i)}(t-u)\Big]\, d\,F(u) + \int_0^t \Big[\sum_{i=1}^r q_i\, B_{\alpha\beta}^{(i)}(t-u)\Big]\, d\,F(u)\,, \quad (8)$$

$$B_{\alpha\beta}^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^r \int_0^t d\,G_i(u)\, p_{ij}\, B_{\alpha\beta}^{(j)}(t-u) + \delta_{i\alpha} \sum_{j=1}^r \int_0^t d\,G_i(u)\, p_{ij}\, A_\beta^{(j)}(t-u) + \delta_{i\beta} \sum_{j=1}^r \int_0^t d\,G_i(u)\, p_{ij}\, A_\alpha^{(j)}(t-u)\,, \quad (9)$$

$$i, \alpha, \beta = 1, 2, ..., r\,.$$

Інтегральні рівняння 1), 2) є взаємозв'язаними. Розглянемо 1). Перше рівняння системи (6) є рівнянням відновлення, куди підставляється розв'язок системи рівнянь марковського відновлення (7). Система 2) має таку ж структуру, але є складнішою. До правих частин (8), (9) входять розв'язки системи 1). Отримані результати дозволяють звести проблему пошуку функціоналів *M(q)* і $D(q)$ до асимптотичного аналізу розв'язів систем 1), 2).

Спочатку розглянемо систему рівнянь марковського відновлення (7) і введемо перетворення Лапласа для функцій $A_\alpha^{(i)}(t)$, $G_i(t)$, $i, \alpha = 1,2,...,r$

$$A_\alpha^{(i)}(s) = \int_0^\infty e^{-st} A_\alpha^{(i)}(t)\, d\,t\,,$$

$$g_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\,G_i(t)\,, \quad \mathrm{Re}\, s \ge 0\,, \quad A(s) = \left\| A_\alpha^{(i)}(s) \right\|_1^r\,.$$

Справедливий такий результат.

Лема 2. Якщо спектральний радіус матриці маршрутизації P менший 1, то

$$\lim_{t\to\infty} \left\| A_\alpha^{(i)}(t) \right\|_1^r = A = \left\| A_\alpha^{(i)} \right\|_1^r = (I-P)^{-1} \Delta(1-p_{r+1})\,,$$

де $1 - p_{r+1} = (1 - p_{1\,r+1}, ..., 1 - p_{r\,r+1})$.

Доведення:

В термінах перетворень Лапласа систему (7) можна записати так

$$A_\alpha^{(i)}(s) = \frac{1}{s}\, g_i(s)\, \delta_{i\alpha}\, (1 - p_{i\,r+1}) + \sum_{j=1}^r g_i(s)\, p_{ij}\, A_\alpha^{(j)}(s)\,,$$

$$i, \alpha = 1,2,...,r\,,$$

або, використовуючи матричні позначення для $A(s)$, маємо рівняння

$$A(s) = \frac{1}{s} \Delta[(1-p_{r+1})\, g(s)] + \Delta(g(s))\, PA(s)\,, \quad (10)$$

де $\Delta[(1-p_{r+1})\, g(s)] = \left\| \delta_{ij}\, (1 - p_{i\,r+1})\, g_i(s) \right\|_1^r$,

$$\Delta(g(s)) = \left\| \delta_{ij}\, g_i(s) \right\|_1^r.$$

Розв'язком (10) буде

$$A(s) = \frac{1}{s}[\, I - \Delta(g(s))\, P\,]^{-1} \Delta[\,(1-p_{r+1})\, g(s)\,]\,. \quad (11)$$

Функція $A_\alpha^{(i)}(t)$ представляє собою математичне сподівання числа відвідувань вузла "α" за час t вимогою, яка у початковий момент часу знаходилась в i - ому вузлі. Тому $A_\alpha^{(i)}(t)$ монотонно неспадна функція. З урахуванням (11) і тауберової теореми для перетвотень Лапласа ([6], стор. 211-212), знаходимо

$$\lim_{t\to\infty} \left\| A_\alpha^{(i)}(t) \right\|_1^r = \lim_{s\to 0+} s\, A(s) = (I-P)^{-1} \Delta(1-p_{r+1})\,.$$

Лема доведена.

В лемі 2 встановлено, що функції $A_\alpha^{(i)}(t)$, монотонно зростаючи, прямують до скінченних границь $A_\alpha^{(i)} < +\infty$, $i, \alpha = 1,2,...,r$. Наша найближча мета - проаналізувати порядок збіжності $A_\alpha^{(i)}(t)$ до $A_\alpha^{(i)}$.

Лема 3. Якщо спектральний радіус матриці P менший 1 і

$$\int_0^\infty t\, d\,G_i(t) = \frac{1}{\mu_i} < +\infty\,, \quad i = 1,2,...,r\,,$$

то

$$\left\| \int_0^\infty [A_\alpha^{(i)} - A_\alpha^{(i)}(t)]\, d\,t \right\|_1^r = (I-P)^{-1} \Delta^{-1}(\mu)(I-P)^{-1} \Delta((1-p_{r+1})) < +\infty\,. \quad (12)$$

Доведення:

Очевидно, що

$$\left\| \int_0^\infty [A_\alpha^{(i)} - A_\alpha^{(i)}(t)]\, d\,t \right\|_1^r =$$

$$= \lim_{s\to 0+} \left\| \int_0^\infty [A_\alpha^{(i)} - A_\alpha^{(i)}(t)]\, e^{-st} d\,t \right\|_1^r =$$

$$= \lim_{s\to 0+} \frac{A - s\,A(s)}{s}.$$

У правій частині виразу

$$\frac{1}{s}[A - s\,A(s)] = \frac{1}{s}(I-P)^{-1}\,\Delta[(1-p_{r+1})(1-g(s))] +$$

$$+\frac{1}{s}[\,(I-P)^{-1} - (\,I - \Delta(g(s))\,P\,)^{-1}]\,\Delta[(1-p_{r+1})\,g(s)]$$

розглянемо послідовно перший і другий доданки.

З умов леми випливає

$$\lim_{s\to 0+} \frac{1}{s}(I-P)^{-1}\,\Delta\,[(1-p_{r+1})\,(1-g(s))] = \qquad (13)$$

$$= (I-P)^{-1}\,\Delta^{-1}(\mu)\,\Delta((1-p_{r+1}))\,.$$

Для другого доданку знаходимо

$$\lim_{s\to 0+}\frac{1}{s}[\,(I-P)^{-1} - (I-\Delta(g(s))P)^{-1}\,]\Delta[(1-p_{r+1})\,g(s)] =$$

$$= \lim_{s\to 0+}\frac{1}{s}[\,\sum_{n=1}^{\infty}(\,P^n - [\Delta(g(s))P]^n\,)]\,\Delta((1-p_{r+1})) =$$

$$= \lim_{s\to 0+}\frac{1}{s}[\,\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} P^{n-1-k}\,(I-\Delta(g(s)))\times =$$

$$\times P\,(\Delta(g(s))P)^k\,]\,\Delta((1-p_{r+1})) =$$

$$= [\,\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} P^{n-1-k}\,\Delta^{-1}(\mu)\,P^{k+1}\,]\,\Delta((1-p_{r+1})) =$$

$$= [\,\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} P^{n-k}\,\Delta^{-1}(\mu)\,P^{k}\,]\,\Delta((1-p_{r+1})) =$$

$$= (I-P)^{-1}\,\Delta^{-1}(\mu)\,(I-P)^{-1}\,\Delta((1-p_{r+1})) -$$

$$-(I-P)^{-1}\,\Delta^{-1}(\mu)\,\Delta((1-p_{r+1}))\,.$$

Враховуючи (13), ми приходимо до (12).

Лема доведена.

Наслідок 2. Якщо виконуються умови леми 3, то для довільних $i,\alpha = 1,2,...,r$

$$\lim_{t\to\infty} t\;\,(A_\alpha^{(i)} - A_\alpha^{(i)}(t)) = 0\,.$$

За $A_\alpha^{(i)}(t)$ і $F(t)$ визначимо функції

$$\widetilde{A}_\alpha^{(i)}(t) = \int_0^t A_\alpha^{(i)}(t-u)\,d\,F(u)\,,\quad i,\alpha = 1,2,...,r\,.$$

З властивостей $A_\alpha^{(i)}(t)$ випливають наступні результати.

Лема 4. Функції $\widetilde{A}_\alpha^{(i)}(t)$ монотонно неспадні і, якщо спектральний радіус матриці P менший 1, то

$$\lim_{t\to\infty}\widetilde{A}_\alpha^{(i)}(t) = A_\alpha^{(i)} < +\infty\,,\quad i,\alpha = 1,2,...,r\,.$$

Лема 5. Якщо виконуються умови леми 3 і $\int_0^\infty t\,d\,F(t) = \frac{1}{\lambda} < +\infty$, то

$$\left\| \int_0^\infty [A_\alpha^{(i)} - \widetilde{A}_\alpha^{(i)}(t)]\,d\,t \right\|_1^r =$$

$$= \frac{1}{\lambda}A \;+ (I-P)^{-1}\Delta^{-1}(\mu)(I-P)^{-1}\Delta((1-p_{r+1})) < +\infty\,.$$

Розглянемо тепер для функцій $B_{\alpha\beta}^{(i)}(t)$, $i = 1,2,...,r$, систему рівнянь марковського відновлення (9).

Нехай $I_\alpha = \left\|\delta_{ij}\delta_{i\alpha}\right\|_{i,j=1}^r$ - діагональна матриця, e_i - r-вимірний вектор, i- та компонента якого дорівнює 1, а інші - нулю, $i = 1,2,...,r$. Асимптотичну поведінку розв'язку $B_{\alpha\beta}{}'(t) = (\,B_{\alpha\beta}^{(1)}(t), B_{\alpha\beta}^{(2)}(t), ..., B_{\alpha\beta}^{(r)}(t)\,)$ системи (9) вивчено у наступній лемі.

Лема 6. Якщо спектральний радіус матриці P менший 1, то

$$\lim_{t\to\infty} B_{\alpha\beta}(t) = (I-P)^{-1}\,I_\alpha\,P\,(I-P)^{-1}\,e_\beta\,(1-p_{\beta\,r+1}) +$$

$$+(I-P)^{-1}\,I_\beta\,P\,(I-P)^{-1}\,e_\alpha\,(1-p_{\alpha\,r+1})\,,\qquad (14)$$

$$\alpha,\beta = 1,...,r\,.$$

Доведення формули (14) базується на тауберовій теоремі для перетворень Лапласа і є аналогічним доведенню леми 2.

Введемо функції $\widetilde{B}_{\alpha\beta}^{(i)}(t)$ за допомогою співвідношень

$$\widetilde{B}_{\alpha\beta}^{(i)}(t) = \int_0^t B_{\alpha\beta}^{(i)}(t-u)\,d\,F(u)\,,\;\; i,\alpha,\beta = 1,2,...,r\,,$$

$$\widetilde{B}'_{\alpha\beta}(t) = (\,\widetilde{B}_{\alpha\beta}^{(1)}(t), \widetilde{B}_{\alpha\beta}^{(2)}(t), ..., \widetilde{B}_{\alpha\beta}^{(r)}(t)\,)\,.$$

Для них справедливі наступні результати.

Наслідок 3. Якщо виконуються умови леми 6, то

$$\lim_{t\to\infty}\widetilde{B}_{\alpha\beta}(t) = (I-P)^{-1}\,I_\alpha\,P\,(I-P)^{-1}\,e_\beta\,(1-p_{\beta\,r+1}) +$$

$$+(I-P)^{-1}\,I_\beta\,P\,(I-P)^{-1}\,e_\alpha\,(1-p_{\alpha\,r+1})\,,\qquad (15)$$

$$\alpha,\beta = 1,...,r\,.$$

Нехай $H(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\bullet}(t)$ - функція відновлення, яка відповідає функції розподілу $F(t)$, і

$$\int_0^t d\,H(u)\,\widetilde{B}_{\alpha\beta}(t-u) =$$

$$= (\int_0^t d\,H(u)\,\widetilde{B}^{(1)}_{\alpha\,\beta}(t-u),..., \int_0^t d\,H(u)\,\widetilde{B}^{(r)}_{\alpha\beta}(t-u)\,)\,.$$

Наслідок 4. Якщо $\int_0^\infty t\,d\,F(t) = \dfrac{1}{\lambda} < +\infty$ і спектральний радіус матриці P менший 1, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\mathrm{t}} \int_0^t d\,H(u)\,\widetilde{B}_{\alpha\,\beta}(t-u) =$$

$$= \lambda\,(I-P)^{-1}\,I_\alpha\,P\,(I-P)^{-1}\,e_\beta\,(1-p_{\beta\,r+1}) + \qquad (16)$$

$$+ \lambda\,(I-P)^{-1}\,I_\beta\,P\,(I-P)^{-1}\,e_\alpha\,(1-p_{\alpha\,r+1})\,,$$

$$\alpha,\beta = 1,...,r\,.$$

Формула (16) є наслідком (15) і теореми 7 ([8], стор. 271).

Підсумуємо попередній аналіз системи інтегральних рівнянь (6) - (9) і доведемо основний результат.

Теорема. Якщо спектральний радіус матриці P менший 1, $\int_0^\infty t^2\,d\,F(t) < +\infty$, $\int_0^\infty t\,d\,G_i(t) < +\infty$, $i = 1, 2, ..., r$, і функція $F(t)$ негратчаста, то:

1)
$$M(q) = \lambda\,q'\,A\,C\,, \quad C' = (C_1,...,C_r)\,; \qquad (17)$$

2)
$$D(q) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} C_\alpha V_{\alpha\,\beta}(q)\,C_\beta\,,$$

$$V_{\alpha\,\beta}(q) = \lambda\,(\rho^2-1) \sum_{i,j=1}^{r} q_i\,q_j\,A^{(i)}_\alpha\,A^{(j)}_\beta + \qquad (18)$$

$$+ \lambda\,q'\,\,(I-P)^{-1}\,I_\alpha\,P\,(I-P)^{-1}\,e_\beta\,(1-p_{\beta\,r+1}) +$$

$$+ \lambda\,q'\,\,(I-P)^{-1}\,I_\beta\,P\,(I-P)^{-1}\,e_\alpha\,(1-p_{\alpha\,r+1}) +$$

$$+ \lambda\,\delta_{\alpha\,\beta} \sum_{i=1}^{r} q_i\,A^{(i)}_\alpha\,,$$

де $\rho = \lambda\,\sigma$ - коефіцієнт варіації для випадкового проміжку часу між моментами надходження вимог, σ^2 - дисперсія цього проміжку.

Доведення теореми.

З рівняння (6) знаходимо

$$A_\alpha(t) = \sum_{i=1}^{r} q_i \int_0^t d\,H(u)\,\widetilde{A}^{(i)}_\alpha(t-u)\,, \qquad (19)$$

$$\alpha = 1, 2, ..., r\,.$$

Таким чином (17) є наслідком леми 4 і того, що

$$\int_0^\infty t\,d\,F(t) = \frac{1}{\lambda} < +\infty\,.$$

Зупинимось на пункті 2).

З (19) і теореми відновлення (теорема 12.8, [7], стор. 205) випливає, що

$$A_\alpha(t) = \sum_{i=1}^{r} q_i \int_0^t d\,H(u)\,\widetilde{A}^{(i)}_\alpha(t-u) =$$

$$= H(t) \sum_{i=1}^{r} q_i\,A^{(i)}_\alpha(t) - \lambda \sum_{i=1}^{r} q_i \int_0^\infty [A^{(i)}_\alpha - \widetilde{A}^{(i)}_\alpha(u)]\,d\,u + o(1)\,.$$

Таким чином

$$\frac{1}{t}\,A_\alpha(t)\,A_\beta(t) = \frac{1}{t}\,H^2(t) \sum_{i,j=1}^{r} q_i\,q_j\,A^{(i)}_\alpha\,A^{(j)}_\beta -$$

$$- \lambda \frac{1}{t}\,H(t) \sum_{i,j=1}^{r} q_i\,q_j\,(\int_0^\infty [A^{(i)}_\alpha - \widetilde{A}^{(i)}_\alpha(u)]\,d\,u\,)\,A^{(j)}_\beta -$$

$$- \lambda \frac{1}{t}\,H(t) \sum_{i,j=1}^{r} q_i\,q_j\,A^{(i)}_\alpha\,(\int_0^\infty [A^{(j)}_\beta - \widetilde{A}^{(j)}_\beta(u)]\,d\,u\,) + o(1)\,.$$

З наслідку 2 випливає, що

$$\lim_{t\to\infty} A_\alpha(t) \sum_{j=1}^{r} q_j\,(A^{(j)}_\beta - A^{(j)}_\beta(t)) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} A_\beta(t) \sum_{j=1}^{r} q_j\,(A^{(j)}_\alpha - A^{(j)}_\alpha(t)) = 0\,.$$

Тому для функцій

$$\varphi_{\alpha\,\beta}(t) = \int_0^t A_\alpha(t-u)\,[\,\sum_{j=1}^{r} q_j\,A^{(j)}_\beta(t-u)\,]\,d\,F(u)$$

справедлива рівність

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t d\,H(u)[\varphi_{\alpha\,\beta}(t-u) + \varphi_{\beta\,\alpha}(t-u)] = \qquad (20)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \{ \frac{1}{t} (\int_0^t d\,H(u)\,\widetilde{A}_\alpha(t-u)\,)\,(\sum_{j=1}^{r} q_j\,A^{(j)}_\beta\,) +$$

$$+ \frac{1}{t} (\sum_{i=1}^{r} q_i\,A^{(i)}_\alpha\,)\,(\int_0^t d\,H(u)\,\widetilde{A}_\beta(t-u)\,)\,\}\,,$$

де

$$\widetilde{A}_\alpha(t) = \int_0^t d\,F(u)\,A_\alpha(t-u) = A_\alpha(t) - \sum_{i=1}^{r} q_i\,\widetilde{A}^{(i)}_\alpha(t)\,.$$

Розглянемо праву частину (20)

$$\frac{1}{t} (\int_0^t d\,H(u)\,\widetilde{A}_\alpha(t-u)\,)\,(\sum_{j=1}^{r} q_j\,A^{(j)}_\beta\,) = \qquad (21)$$

$$= \frac{1}{t} [\int_0^t d\,H(u)\,H(t-u) - H(t)\,] \sum_{i,j=1}^{r} q_i\,q_j\,A^{(i)}_\alpha\,A^{(j)}_\beta -$$

$$- \lambda^2 \sum_{i,j=1}^{r} q_i\,q_j\,(\int_0^\infty [\,A^{(i)}_\alpha - \widetilde{A}^{(i)}_\alpha(u)\,]\,d\,u\,)\,A^{(j)}_\beta + o(1)\,.$$

Аналогічно

$$\frac{1}{t}\left(\sum_{i=1}^{r} q_i A_\alpha^{(i)}\right)\left(\int_0^t d\,H(u)\,\widetilde{A}_\beta(t-u)\right)= \tag{22}$$

$$=\frac{1}{t}\left[\int_0^t d\,H(u)\,H(t-u)-H(t)\right]\sum_{i,j=1}^{r} q_i\,q_j\,A_\alpha^{(i)}\,A_\beta^{(j)}-$$

$$-\lambda^2\sum_{i,j=1}^{r} q_i\,q_j\,A_\alpha^{(i)}\left(\int_0^\infty\left[A_\beta^{(j)}-\widetilde{A}_\beta^{(j)}(u)\right]d\,u\right)+o(1)\,.$$

По'єднуючи (20), (21) і (22), знаходимо

$$\frac{1}{t}\int_0^t d\,H(u)\left[\varphi_{\alpha\beta}(t-u)+\varphi_{\beta\alpha}(t-u)\right]=$$

$$=\frac{1}{t}\left[2\int_0^t d\,H(u)\,H(t-u)-2\,H(t)\right]\sum_{i,j=1}^{r} q_i\,q_j\,A_\alpha^{(i)}\,A_\beta^{(j)}-$$

$$-\lambda^2\sum_{i,j=1}^{r} q_i\,q_j\left(\int_0^\infty\left[A_\alpha^{(i)}-\widetilde{A}_\alpha^{(i)}(u)\right]d\,u\right)A_\beta^{(j)}-$$

$$-\lambda^2\sum_{i,j=1}^{r} q_i\,q_j\,\mathrm{A}_\alpha^{(\mathrm{i})}\left(\int_0^\infty\left[A_\beta^{(j)}-\widetilde{A}_\beta^{(j)}(u)\right]d\,u\right)+o(1)\,.$$

Враховуючи (16), і те, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left[2\int_0^t d\,H(u)\,H(t-u)-2H(t)-H^2(t)\right]=\lambda\,(\rho^2-1)\,,$$

приходимо до (18).

Теорема доведена.

4. Висновок

З теореми можна зробити висновок, що цільова функція $M(q)$ оптимізаційної задачі (1) – (3) є лінійною відносно контрольованих параметрів, а $V(q)$ – квадратичною, якщо коефіцієнт варіації для випадкового проміжку часу між моментами надходження вимог $\rho\neq 1$. Таким чином двокритеріальна оптимізаційна задача максимізації середнього прибутку та мінімізації величини ризику може бути розв'язана стандартними методами багатокритеріальної оптимізації (див., наприклад, [9]). Розв'язок задачі (1) − (3) $q^*=(q_1^*,q_2^*,...,q_r^*)$ є таким керуванням вхідним потоком, що максимізує прибуток від роботи мережі та мінімізує величину ризику.

Список використаних джерел

1. *Lebedev E.A., Makushenko I.A.* Optimal distribution of external load for multihannel stochastic networks. − Kyiv: National Library of Ukraine, 2012. – 90 p. (Ukrainian)
2. *Vishnevsky M.V.* The theoretical basis of the design of computer networks. - Moscow: Technosphere, 2003. - 512 p. (Russian)
3. *Wolrend J.* Telecommunications and Computer Networks. - Moscow: Postmarket, 2001. - 480 p.
4. *Massey W.A. and Whitt W.* A stochastic model to capture space and time dynamics in wireless communication systems // Probability in the Engineering and Information Sciences. – 1994. – Vol. 8. – P. 541-569.
5. *Vatutin V.A.* The critical Bellman-Harris branching processes with immigration and several types of particles. Probability theory and its applications. - 1976. - V. 21, № 2. - P. 447-454. (Russian)
6. *Klimov G.P.* Stochastic service system. - Moscow: Nauka, 1966. - 244 p. (Russian)
7. *Kovalenko I.N., Kuznetsov N.Y., Shurenkov V.M.* Random processes. - Kyiv: Naukova dumka, 1983. - 366 p. (Russian)
8. *Sevastyanov B.A.* Branching processes. Moscow: Nauka, 1971. - 436 p. (Russian)
9. *Volkovich V.L., Voloshin A.F., Zaslavsky V.A., Ushakov I.A.* Models and methods of optimization of reliability of complex systems / Pod red. Mikhalevicha V.S. - Kiev: Naukova dumka, 1993. - 312 p. (Russian)

Надійшла до редколегії 17.09.13