УДК 551.24.02 : 624.131.66

Мартинюк П.М.[1], к.ф.-м.н., доц.
Гошко О.В.[2], магістр

Математична модель фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням багатофракційної суфозії

Розглянута задача консолідації ґрунтового масиву з врахуванням механічної суфозії на межі контакту двох пластів ґрунту різної фракції. Побудована математична модель досліджуваних процесів з урахуванням впливу тепло-солепереносу.

Ключові слова: математична модель, суфозія, консолідація

[1] Національний університет водного господарства та природокористування, 33000, м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: martinjuk@ukr.net

[2] Національний університет водного господарства та природокористування, 33000, м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: esteril@rambler.ru

Martyniuk P.M.[1], Candidate of physics and mathematics sciences
Hoshko A.V.[2], master

Mathematical model of soils filtration consolidation taking into account multi-grade suffosion

The layered soils consolidation problem has been considered. The mechanical suffusion on the contact of two layers of soil has been included. The mathematical model of the considered problem with taking into account heat and salt transfer has been build.

Key Words: mathematical model, suffusion, consolidation.

[1] National University of Water Management and Nature Resources Use, 33000, Rivne, Soborna str., 11, e-mail: martinjuk@ukr.net

[2] National University of Water Management and Nature Resources Use, 33000, Rivne, Soborna str., 11, e-mail esteril@rambler.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

1. Вступ.

В роботах [1, 2] побудовано математичні моделі консолідації ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів. Процес консолідації ґрунту супроводжується підвищеними надлишковими напорами в порах пористого середовища. Як результат, швидкість фільтрації порової рідини може перевищити критичне значення, при якому частинки ґрунту переходять в рухомий стан. Тому процеси консолідації можуть супроводжуватись процесами фільтраційного руйнування ґрунтів [3, 8].

В повідомленні [17] загалом виділено такі основні типи фільтраційного руйнування ґрунтів: 1) випір під дією висхідного фільтраційного потоку; 2) суфозія; 3) контактний випір; 4) контактний розмив.

В роботах [3, 8] побудовано математичні моделі фільтраційної консолідації ґрунтів та їх контактного розмиву. Контактний розмив – один із видів фільтраційного руйнування, який приводить до утворення зосереджених шляхів фільтрації в ґрунтових гідротехнічних спорудах та їх основах [9, 10, 16]. Інших типів фільтраційного руйнування там розглянуто не було. Процеси суфозії поділяються на два типи – механічна і хімічна. Вплив хімічної суфозії на фільтраційну консолідацію ґрунтів досліджено наприклад в роботі [11].

В свою чергу, процеси механічної суфозії в ґрунтах поділяють на внутрішню суфозію та зовнішню суфозію [4]. Про це також відмічено в роботах [12, 13].

Якщо ґрунт є неоднорідним і складається із шарів з різними гранулометричним складом, що, в свою чергу, впливає на їх фільтраційні властивості, то окрім контактного розмиву там можуть відбуватись процеси контактного суфозійного випору [5]. В науковій літературі такі процеси названі «контактною суфозією». В даній роботі ми будемо притримуватись такої ж термінології, розуміючи під контактною суфозією взаємопроникнення через межу контакту суфозійних частинок в інше пористе середовище.

Ціллю даної роботи є побудова математичної моделі фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням контактної суфозії в умовах впливу техногенних факторів.

2. Постановка задачі.

Розглянемо масив ґрунту в області Ω_1, який привантажений ґрунтом в області Ω_2 більш великої фракції. Під впливом висхідного фільтраційного потоку суфозійні частинки з області Ω_1 можуть проникати в область Ω_2. В результаті межа контакту двох ґрунтів $\Gamma_{12}\ \mathbf{X},t$ є рухомою і змінює своє положення в часі. Тому область Ω_2 – це ґрунт, який складається із «скелету» та суфозійних частинок з концентрацією $\sigma\ \mathbf{X},\mathrm{t}$. Під концентрацією $\sigma\ \mathbf{X},\mathrm{t}$ частинок в деякому виділеному об'ємі V пористого середовища будемо розуміти відношення об'єму суфозійних частинок до всього виділеного об'єму V. Тому $\sigma_{\max}\ \mathbf{X},\mathrm{t}\ =\ 1-\mathrm{n}_1\ \cdot \mathrm{n}_2$, де n_i – функції пористості «чистого» ґрунту в областях Ω_i, $\mathrm{i}=1,2$.

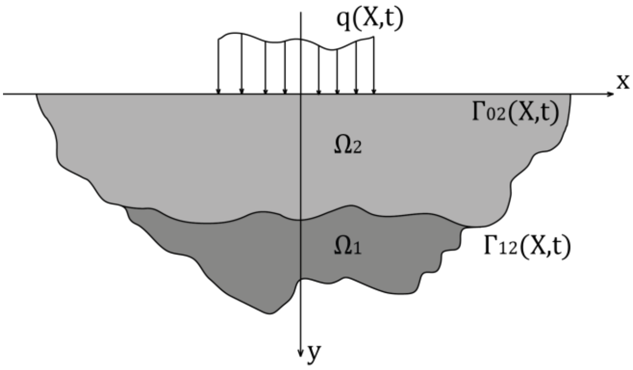

Рис. 1 Фільтраційна консолідація та контактна суфозія в неоднорідному масиві ґрунту

Задача полягає в: 1) виведені рівняння фільтраційної консолідації з урахуванням суфозії; 2) виведенні рівняння динаміки зміни концентрації $\sigma\ \mathbf{X},\mathrm{t}$ суфозійних частинок в області Ω_2; 3) виведені кінематичної граничної умови, якою описується зміна в часі положення рухомої межі $\Gamma_{12}\ \mathbf{X},\mathrm{t}$; 4) виведені кінематичної граничної умови, якою описується зміна в часі положення верхньої рухомої межі $\Gamma_{02}\ \mathbf{X},\mathrm{t}$ масиву ґрунту; 5) постановці крайової задачі, якою буде описуватись математична модель розглядуваної задачі.

3. Рівняння фільтраційної консолідації.

Виділимо елементарний фрагмент ґрунту загальним об'ємом V, який повністю насичений поровою рідиною (газоподібна складова відсутня, або її наявністю можна знехтувати). Виділений фрагмент ґрунту буде містити: 1) поровий розчин об'ємом V_n, який дорівнює об'єму пор; 2) тверді структурні частинки об'ємом $V_s^{(0)}$, які утворюють «скелет» пористого середовища; 3) тверді суфозійні частинки об'ємом $V_s^{(i)}$, $i=\overline{1,S}$, де номер i відповідає частинкам певної фракції. Відмітимо, що процеси механічної суфозії при $S=1$ досліджено в роботі [14]. В цій же роботі висловлена ідея розгляду багатофракційних суфозійних частинок.

Нехай $n=\dfrac{V_n}{V}$ - пористість ґрунту; $m^{(i)}=\dfrac{V_s^{(i)}}{V}$ - відносний вміст твердих частинок i -ї фракції, $i=\overline{0,S}$. Зважаючи на рівність $V_n+\sum_{i=0}^{S}V_s^{(i)}=V$, маємо

$$n+\sum_{i=0}^{S}m^{(i)}=1\,. \qquad (1)$$

Позначимо через $\mathbf{u}$ - швидкість фільтрації порової рідини (фіктивна швидкість руху); $\mathbf{v}^{(i)}$ - фіктивну швидкість руху твердих частинок ґрунту відповідної фракції, $i=\overline{0,S}$. Тоді, повторюючи міркування наведені в [6], маємо закон Дарсі-Герсеванова

$$\mathbf{u}-e^{(0)}\cdot\mathbf{v}^{(0)}=-\mathbf{K_h}\nabla h(\mathbf{X},t)\,, \qquad (2)$$

де $\mathbf{X}=(x,y,z)$ - точка пористого середовища; t - час; $\mathbf{K_h}$ - коефіцієнт (тензор) фільтрації, який залежить від фізико-хімічних властивостей пористого середовища; $h(\mathbf{X},t)$ - функція напору; $e^{(i)}=\dfrac{n}{m^{(i)}}$, $i=\overline{0,S}$.

Виведення рівняння фільтраційної консолідації повністю повторює етапи виведення в класичній теорії [6]. Маємо:
рівняння нерозривності рідкої фази

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{u}=0\,; \qquad (3)$$

рівняння нерозривності i -ї твердої фракції

$$\frac{\partial m^{(i)}}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{v}^{(i)}=0\,,\ \ i=\overline{0,S}\,. \qquad (4)$$

Додаючи рівняння (3) та (4) і враховуючи (1), отримаємо

$$\nabla\cdot\mathbf{u}+\sum_{i=0}^{S}\nabla\cdot\mathbf{v}^{(\mathbf{i})}=0. \tag{5}$$

Кожне із трьох співвідношень закону (2) диференціюємо відповідно по змінних x, y та z та додаємо. Маємо

$$\nabla\cdot\mathbf{u}-e^{(0)}\nabla\cdot\mathbf{v}^{(\mathbf{0})}-\mathbf{v}^{(\mathbf{0})}\nabla e=-\nabla\cdot(\mathbf{K_h}\nabla h(\mathbf{X},t)).$$

Нехтуємо третім доданком в лівій частині вищенаведеної рівності

$$\nabla\cdot\mathbf{u}-e^{(0)}\nabla\cdot\mathbf{v}^{(\mathbf{0})}=-\nabla\cdot(\mathbf{K_h}\nabla h(\mathbf{X},t)). \tag{6}$$

Враховуючи (5), з (6) отримуємо

$$\sum_{i=1}^{S}\nabla\cdot\mathbf{v}^{(i)}+(1+e^{(0)})\nabla\cdot\mathbf{v}^{(\mathbf{0})}=\nabla\cdot(\mathbf{K_h}\nabla h(\mathbf{X},t)). \tag{7}$$

Приймаючи до уваги рівняння нерозривності (4), з (7) маємо

$$-\sum_{i=1}^{S}\frac{\partial m^{(i)}}{\partial t}-(1+e^{(0)})\frac{\partial m^{(0)}}{\partial t}=\nabla\cdot(\mathbf{K_h}\nabla h(\mathbf{X},t)). \tag{8}$$

Далі

$$m^{(0)}=\frac{V_s^{(0)}}{V}=\frac{V_s^{(0)}}{V_s^{(0)}+V_n+\sum_{i=1}^{S}V_s^{(i)}}=$$

$$=\frac{1}{1+e^{(0)}+\sum_{i=1}^{S}\frac{V_s^{(i)}}{V_s^{(0)}}}=\frac{1}{1+e^{(0)}+\frac{1}{m^{(0)}}\sum_{i=1}^{S}m^{(i)}},$$

$$(1+e^{(0)})m^{(0)}+\sum_{i=1}^{S}m^{(i)}=1,$$

$$m^{(0)}=\frac{1}{1+e^{(0)}}\left(1-\sum_{i=1}^{S}m^{(i)}\right).$$

Диференціюючи останню рівність по часу, отримуємо

$$\frac{\partial m^{(0)}}{\partial t}=-\frac{1}{1+e^{(0)}\;^{2}}\left(1-\sum_{i=1}^{S}m^{(i)}\right)\frac{\partial e^{(0)}}{\partial t}-$$

$$-\frac{1}{1+e^{(0)}}\sum_{i=1}^{S}\frac{\partial m^{(i)}}{\partial t}. \tag{9}$$

Підставляємо (9) в (8)

$$-\sum_{i=1}^{S}\frac{\partial m^{(i)}}{\partial t}+\frac{1-\sum_{i=1}^{S}m^{(i)}}{1+e^{(0)}}\frac{\partial e^{(0)}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{S}\frac{\partial m^{(i)}}{\partial t}=$$

$$=\nabla\cdot(\mathbf{K_h}\nabla h(\mathbf{X},t)),$$

$$\frac{1-\sum_{i=1}^{S}m^{(i)}}{1+e^{(0)}}\frac{\partial e^{(0)}}{\partial t}=\nabla\cdot(\mathbf{K_h}\nabla h(\mathbf{X},t)). \tag{10}$$

Далі, як і в класичній теорії фільтраційної консолідації, використовуючи принцип гідроємності Герсеванова та основну розрахункову модель Флоріна, з рівняння (10) маємо

$$\frac{\partial h(\mathbf{X},t)}{\partial t}=\frac{1+e^{(0)}\quad 1+(\bar{r}-1)\xi}{\bar{r}\gamma a\left(1-\sum_{i=1}^{S}m^{(i)}\right)}\times$$

$$\times\nabla\cdot(\mathbf{K_h}\nabla h(\mathbf{X},t))+\frac{\partial h^*}{\partial t}+\frac{1}{\bar{r}\gamma}\frac{\partial\Theta^*}{\partial t}. \tag{11}$$

Тут: $\bar{r}$ - розмірність задачі; a - коефіцієнт стисливості ґрунту; ξ - коефіцієнт бічного тиску ґрунту; γ - питома вага порової рідини; h^*, Θ^* - напори в поровій рідині та сума головних напружень в скелеті ґрунту в умовах повної стабілізації. При виведенні рівняння (11) використовується лінійна компресійна залежність

$$e^{(0)}=-\frac{a\Theta}{1+(\bar{r}-1)\xi}+b.$$

За формою рівняння (11) відрізняється від класичного рівняння фільтраційної консолідації лише наявністю в правій частині в знаменнику множника $\left(1-\sum_{i=1}^{S}m^{(i)}\right)$. При відсутності суфозійних частинок $\sum_{i=1}^{S}m^{(i)}=0$ і рівняння (11) повністю співпадає з класичним.

В законі (2) врахуємо вплив тепло-солепереносу [1, 3]

$$\begin{aligned}\mathbf{u}-e^{(0)}\cdot\mathbf{v}^{(\mathbf{0})}&=-\mathbf{K_h}\nabla h(\mathbf{X},t)+\\&+\mathbf{K_c}\nabla c(\mathbf{X},t)+\mathbf{K_T}\nabla T(\mathbf{X},t),\end{aligned} \tag{12}$$

де $c(\mathbf{X},t)$ - концентрація солей в поровій рідині; $T(\mathbf{X},t)$ - температура ґрунтового середовища; $\mathbf{K_c}$, $\mathbf{K_T}$ - коефіцієнти хімічного та термічного осмосів, які, як і коефіцієнт фільтрації, можуть мати тензорний характер. Тоді рівняння (11) набуває вигляду

$$\frac{\partial h(\mathbf{X},t)}{\partial t}=\frac{1+e^{(0)}\quad 1+(\bar{r}-1)\xi}{\bar{r}\gamma a\left(1-\sum_{i=1}^{S}m^{(i)}\right)}\times$$

$$\times\nabla\cdot(\mathbf{K_h}\nabla h(\mathbf{X},t)-\mathbf{K_c}\nabla c(\mathbf{X},t)-$$

$$-\mathbf{K_T}\nabla T(\mathbf{X},t))+\frac{\partial h^*}{\partial t}+\frac{1}{\bar{r}\gamma}\frac{\partial\Theta^*}{\partial t}. \tag{13}$$

Відмітимо, що з рівняння (10) легко можна отримати рівняння фільтраційної консолідації з урахуванням повзучості скелету грунту. Здійснюється це аналогічно до класичної теорії [6].

Коефіцієнт $\mathbf{K_h}$ залежить від фізико-хімічних характеристик пористого середовища: температури, концентрації солей, надлишкових напорів [1, 3, 8] та концентрацій суфозійних частинок.

Щодо залежності від концентрації суфозійних частинок, то в роботі [14] запропоновано аналог формули Козені-Кармана для коефіцієнта проникливості ґрунту у випадку полідисперсного ґрунту

$$k=\chi^2\frac{(d^{(0)})^2n^3}{180(1-n)^2},$$

де $\chi=\dfrac{1+\sum_{i=1}^{S}\eta^{(i)}}{1+\sum_{i=1}^{S}\eta^{(i)}D^{(i)}}$, $\eta^{(i)}=\dfrac{m^{(i)}}{m^{(0)}}$, $D^{(i)}=\dfrac{d^{(0)}}{d^{(i)}}$;

$d^{(i)}$, $i=\overline{0,S}$, - середній діаметр частинок.

4. Рівняння внутрішньої суфозії в області Ω_2.

Рівняння для опису динаміки зміни концентрації $\sigma^{(i)}(\boldsymbol{X},t)$, $i=\overline{1,S}$ як і рівняння тепло-масопереносу (або вологопереносу), виводиться на основі рівняння нерозривності

$$\frac{\partial\sigma^{(i)}(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{X},t)=0,\ i=\overline{1,S}. \qquad (14)$$

Тут $\boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{X},t)$ – вектор-функція, яка задає потік суфозійних часток. Її визначення є не простою задачею. Зазначимо, що в рівнянні нерозривності (14) знехтувано швидкістю руху твердих частинок грунту в результаті консолідації. Це обгрунтовується припущенням, що суфозійні частинки в області Ω_2 знаходяться в рухомому, не зв'язному зі «скелетом» стані.

5. Кінематична гранична умова на межі $\Gamma_{12}(\boldsymbol{X},t)$.

Межа $\Gamma_{12}(\boldsymbol{X},t)$ визначає нижню межу рухомого «скелета» із твердих, несуфозійних частинок області Ω_2. Цей процес можна порівняти із процесами волого-переносу, де межа $\Gamma_{12}(\boldsymbol{X},t)$ є межею розділу повністю насиченого та не повністю насиченого грунту. Єдина відмінність – при переході частини вологи із області Ω_1 в область Ω_2 – межа Γ_{12} має рухатись вверх. Тут навпаки – якщо деякий об'єм суфозійних частинок з області Ω_1 перейде в пори крупнозернистого ґрунту в області Ω_2, то межа Γ_{12} має опускатись вниз – об'єм ґрунту в області Ω_1 зменшиться. Тому, по аналогії із роботою [15] будемо мати

$$m\frac{d\Gamma_{12}(\boldsymbol{X},t)}{dt}=-\sum_{i=1}^{S}(\boldsymbol{q}_i,\boldsymbol{n}_{12}), \qquad (15)$$

де m – аналог недостачі водонасичення в задачі вологоперенесення, а в даному випадку

$$m(\boldsymbol{X},t)=\sigma_{max}-\sum_{i=1}^{S}\sigma^{(i)}(\boldsymbol{X},t);\ \ \mathrm{X}\in\Omega_2;$$

$\boldsymbol{n}_{12}$ – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі $\Gamma_{12}(\boldsymbol{X},t)$ відносно області Ω_1.

6. Кінематична гранична умова на межі $\Gamma_{02}(\boldsymbol{X},t)$.

Особливість зміни положення межі $\Gamma_{02}(\boldsymbol{X},t)$ обумовлюється двома факторами: 1) зміною положення межі $\Gamma_{12}(\boldsymbol{X},t)$ та 2) зміною об'єму пор за рахунок процесів фільтраційної консолідації. Тобто

$$\frac{d\Gamma_{02}(\boldsymbol{X},t)}{dt}=f_1(\boldsymbol{X},t)+f_2(\boldsymbol{X},t). \qquad (16)$$

Другий фактор враховано в роботах [3, 8] при врахуванні лише вертикальних зміщень. Зокрема

$$f_2(\boldsymbol{X},t)=-\frac{\bar{r}\gamma a}{(1+\bar{e})(1+(\bar{r}-1)\xi)}\int_{y_\Gamma(\boldsymbol{X})}^{\varphi(\boldsymbol{X})}\frac{\partial h(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}dy,$$

де $y=\varphi(\boldsymbol{X})$ – функція, що задає нижній нерухомий контур; $y_\Gamma(\boldsymbol{X})$ – вертикальна координата межі $\Gamma_{02}(\boldsymbol{X},t)$.

Зважаючи на те, що умова (16) буде враховувати лише вертикальні зміщення, в першому факторі (функція $f_1(\mathrm{X},t)$) потрібно враховувати це ж саме. Розглянемо рисунок 2. Тоді

$$\Delta\Gamma\approx-\frac{1}{n_y^{12}}\cdot\left(\Gamma_{12}(t+\Delta t)-\Gamma_{12}(t)\right),$$

де n_y^{12} - напрямний косинус нормалі $\boldsymbol{n}_{12}$. Тобто

$$f_1(\mathbf{X},t) = -\frac{1}{n_y^{12}}\cdot\frac{d\Gamma_{12}(\mathbf{X},t)}{dt}.$$

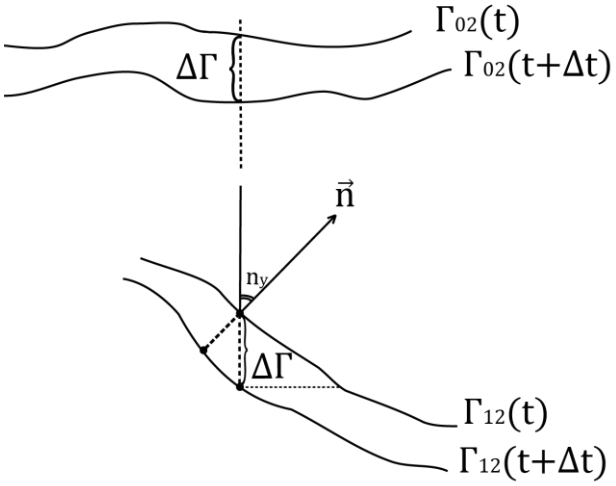

Рис 2. Просідання верхньої межі при контактній суфозії

7. Постановка крайової задачі.

Отже, побудована математична модель буде описуватись наступною крайовою задачею:

$$\frac{\partial h(\mathrm{X},t)}{\partial t} = \frac{(1+e^{(0)})(1+(\bar{r}-1)\xi)}{\bar{r}\gamma a\left(1-\sum_{i=1}^{S} m^{(i)}\right)}\times$$

$$\times\nabla\cdot(\mathrm{K_h}\nabla h(\mathrm{X},t) - \mathrm{K_c}\nabla c(\mathrm{X},t) -$$

$$-\mathrm{K_T}\nabla T(\mathrm{X},t)) + \frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{1}{\bar{r}\gamma}\frac{\partial\Theta^*}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{D(c,T,e)}\nabla c(\mathbf{X},t)) + \nabla\cdot(\mathbf{D_T}\nabla T(\mathbf{X},t)) -$$

$$-\mathbf{u}\nabla c(\mathbf{X},t) = n\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{(c)}\nabla T(\mathbf{X},t)) - \rho c_\rho\mathbf{u}\nabla T(\mathbf{X},\mathrm{t}) = c_T\frac{\partial T}{\partial t},$$

$$\frac{\partial\sigma^{(i)}(\boldsymbol{X},t)}{\partial t} + \nabla\cdot(\boldsymbol{q}^{(i)}(\boldsymbol{X},t)) = 0,\ \overline{\mathrm{i=1,S}},\ \mathbf{X}\in\bar{\Omega}_2,$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma_1(c - C_m),$$

$$\boldsymbol{q}^{(i)}(\boldsymbol{X},t) = \mathbf{F}(\sigma^{(i)},\sigma_{max},\mathbf{u},\mathbf{u_{kr}^{(i)}}),\ \mathbf{X}\in\Omega_2,$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K_h}\nabla h(\boldsymbol{X},t) + \mathbf{K_c}\nabla c(\boldsymbol{X},t) + \mathbf{K_t}\nabla T(\boldsymbol{X},t),$$

<u>кінематичні граничні умови</u>

$$\left(\sigma_{max} - \sum_{i=1}^{S}\sigma(\boldsymbol{X},t)\right)\frac{d\Gamma_{12}(\boldsymbol{X},t)}{dt} = -\sum_{i=1}^{S}(\boldsymbol{q}^{(i)},\boldsymbol{n}_{12}),$$

$$\frac{d\Gamma_{02}(\boldsymbol{X},t)}{dt} = -\frac{1}{n_y^{12}}\cdot\frac{d\Gamma_{12}(\boldsymbol{X},t)}{dt} +$$

$$+\frac{\bar{r}\gamma a}{(1+\bar{e})(1+(\bar{r}-1)\xi)}\int_{y_\Gamma(\mathrm{X})}^{\varphi(\boldsymbol{X})}\frac{\partial h(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}dy,$$

<u>початкові умови</u>

$$h(\boldsymbol{X},0) = h_0(\boldsymbol{X}),\ c(\boldsymbol{X},0) = c_0(\boldsymbol{X}),$$

$$T(\boldsymbol{X},0) = T_0(\boldsymbol{X}),\ \sigma^{(\mathrm{i})}(\boldsymbol{X},0) = \sigma_0^{(\mathrm{i})}(\boldsymbol{X}),\ i=\overline{1,S}.$$

$$\Gamma_{12}(\mathbf{X},0) = \Gamma_{12}^0(\mathbf{X}),\ \Gamma_{02}(\mathbf{X},0) = \Gamma_{02}^0(\mathbf{X}),$$

<u>граничні умови</u> запишемо в абстрактному вигляді і залежать вони від конкретизації постановки задачі

$$h(X,t)\big|_{\Gamma_1^h} = H_1(X,t),\ (\mathbf{u},\mathbf{n})\big|_{\Gamma_2^h} = 0,$$

$$c(X,t)\big|_{\Gamma_1^C} = c_1(X,t),\ (\mathbf{q_C},\mathbf{n})\big|_{\Gamma_2^C} = 0$$

$$T(X,t)\big|_{\Gamma_1^T} = T_1(X,t),\ (\mathbf{q_T},\mathbf{n})\big|_{\Gamma_2^T} = 0$$

$$\sigma(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_{12}} = \sigma_1^{(\mathrm{i})}(\mathbf{X},t),\ \overline{\mathrm{i=1,S}}$$

де $\Gamma_1^C\bigcup\Gamma_2^C = \Gamma_1^T\bigcup\Gamma_2^T = \Gamma$ – загальна межа області;

<u>умови спряження</u> мають задаватися на межі контакту $\Gamma_{12}(\mathbf{X},t)$. Припустимо, що на межі $\Gamma_{12}(\mathbf{X},t)$ виконується умова ідеального контакту [7]. Тоді, маємо:

$$[h(\mathbf{X},t)]\big|_{\Gamma_{12}} = 0,\quad [(\mathbf{u},\mathbf{n})]\big|_{\Gamma_{12}} = 0,$$

де $[\cdot]$ - символ стрибка функції. Аналогічно

$$[c(\mathbf{X},t)]\big|_{\Gamma_{12}} = 0,\quad [(\mathbf{q_c},\mathbf{n})]\big|_{\Gamma_{12}} = 0,$$

$$[T(\mathbf{X},t)]\big|_{\Gamma_{12}} = 0,\quad [(\mathbf{q_T},\mathbf{n})]\big|_{\Gamma_{12}} = 0.$$

Відкритим залишається питання про вигляд функціональної залежності

$$\mathbf{q}^{(i)}(\mathbf{X},t) = \mathbf{F}(\sigma,\sigma_{max},\mathbf{u},\mathbf{u_{kr}^{(\mathit{i})}}),\ i=\overline{1,S}.$$

Наприклад за дану залежність можна взяти

$$\mathbf{q}^{(i)} = \mathbf{f}(\sigma,\sigma_{max},\mathbf{u},\mathbf{u_{kr}^{(\mathit{i})}})\cdot\sigma^{(i)}(\mathbf{X},t) \mp w_i\cdot\nabla z,$$

де w_i – швидкість осідання твердих часток i-ї фракції в вертикальному напрямку; «-» - вісь oz вверх, «+» - вісь oz вниз;

$$\mathbf{f}(\sigma,\sigma_{max},\mathbf{u},\mathbf{u_{kr}}) = (f_j)_{j=1}^{\bar{r}},$$

$$f_j = \alpha_{\mathrm{er}}(u - u_{kr})_+,$$

де $g_+ = \begin{cases} g, \, g \geq 0; \\ 0, g < 0; \end{cases}$ α_{er} – коефіцієнт розмиву; u_{kr} - скалярна критична швидкість розмиву.

8. Висновки та напрямки подальшої роботи

Отже, в даній статті побудовано математичну модель фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів та багатофракційної контактної механічної суфозії. Далі вимагається адаптація відомих або розробка нових числових методів для ефективного наближеного розв'язання відповідної крайової задачі.

Список використаних джерел

1. *Vlasyuk A.P., Martyniuk P.M.* Mathematical modeling of soil filtration consolidation under filtration of saline fluid in unisothermal conditions. - Rivne: NUVGP, 2008. – 416p. (in Ukrainian)
2. *Bomba A.J., Bulavatsky V.M., Skopetskiy V.V.* Nonlinear mathematical models of geo hydraulics. - Kyiv: Naukova Dumka 2007. – 291p. (in Ukrainian)
3. *Vlasyuk A.P., Martyniuk P.M.* The numerical expression of a filtration consolidation problem of earthen dam taking into account the mass and heat transfer by the radial basis function method. - Rivne: NUVGP, 2010. – 277p. (in Ukrainian)
4. *Dmitriev A.F., Hlapuk N.N., Dmitriev D.A.* Deformation processes in cohesionless soils in close to drainage area and impact on the work of the bilge-humidification systems. Rivne: RSTU, 2002. – 145p. (in Russian)
5. *Istomina V.S.* The filtration resistance of soils. – Moscow: Gosstroiizdat, 1957. – 294p. (in Russian)
6. *Ivanov P.L.* Soil and foundation of hydrotechnical construction. Soil Mechanics. - Moscow: Vyshaya Shkola, 1991. – 447p. (in Russian)
7. *Sergienko I.V., Skopetsky V.V., Deineka V.S.* Mathematical modeling and investigation of processes in heterogeneous environments. - Kiev: Nauk. Dumka, 1991. – 432 p. (in Russian)
8. *Vlasyuk A.P., Martyniuk P.M.* The mathematical modeling of soil consolidation with taking into account nonlinear Darcy law, heat and salt transfer. - Mathematical modeling. – 2012. - Vol.24, № 11.-P. 97-112. (in Russian)
9. *Anakhaev K.N., Gegiev K.A., Amshonov B.H.* About failures and damages of earthen weirs with conduits: reasons and methods of perfection of defense. - Hydraulic Engineering. – 2004. - № 3. -P. 30-36. (in Russian)
10. *Radchenko V.G., Radchenko S.V.* Repair earth dam in the event of filtration strength. - Hydraulic Engineering. – 2011. - № 5.-P. 20-26. (in Russian)
11. *Michuta O.R., Vlasyuk A.P., Martyniuk P.M.* Influence of chemical erosion on filtration consolidation of saline soils in nonisothermal condition. - Mathematical modeling. – 2013. - Vol.25, № 2. – P.3-18. (in Russian)
12. *Polyakov V.L.* On the interaction between the particles in the non-structural internal suffusion in humidified cohesionless soils. - Reports of the NAS of Ukraine. – 2008. - № 10. -P. 69-76. (in Russian)
13. *Polyakov V.L.* Generalized accounting effect on the action of seepage deformation drainage. - Applied Hydromechanics. – 2010. - Vol.12, № 4-C. 71-80. (in Russian)
14. *Polyakov V.L.* Mechanical suffusion in soil under drainage. - Applied Fluid Mechanics. – 2002. - Vol.4, № 4-P. 60-73. (in Russian)
15. *Shamansky V.E.* Numerical problem solving unsteady filtration of liquids with free surfaces. - Computational Mathematics and Mathematical Physics – 1970. – Vol.10 (2). - P. 505-514. (in Russian)
16. *Alamdari N.Z., Banahashemi M. Mirghasemi A.* A numerical modeling of piping phenomenon in earth dams // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2010. – 70. – P.45-47.
17. International Seminar of dams and foundations filtration strength. - Hydraulic Engineering. – 2009. - № 2.-P. 6-7. (in Russian)

Надійшла до редколегії 18.06.13