УДК 517.929

Василь П. Марценюк[1] д.т.н., проф.,
Надія М. Гандзюк[2]

Побудова експоненціальної оцінки для нелінійної невід'ємної системи із запізненням на основі нерівності Хейла – Лунела.

Анотація. Досліджено нелінійну невід'ємну систему диференціальних рівнянь із запізненням та побудовано експоненціальну оцінку на основі нерівності Хейла – Лунела.

Ключові слова: нелінійна система, невід'ємна система ,запізнення.

[1]Тернопільський державний медичний університет імені І.Я. Горбачевського, м. Тернопіль, вул. Майдан Волі, 1, 46001
e-mail: marceniuk@yahoo.com
[2]Тернопільський державний медичний університет імені І.Я. Горбачевського, м. Тернопіль, вул. Майдан Волі, 1, 46000
e-mail: nadiagan84@gmail.com

Vasyl P. Martsenyuk[1] Doctor of Sciences (Technics), Full Professor,
Nadia M. Gandzyuk[2]

Construction of exponential estimates for nonlinear nonnegative system with delays based on Hale – Lunel inequality.

Annotation. Investigated nonlinear nonnegative system of differential equations with delay and build an exponential estimation based on Hale - Lunel inequality.

Key words: nonlinear system, nonnegative system, time delay.

[1]I.Ya. Horbachevsky Ternopil State Medical University, Ternopil, m.Voli str, 1, 46001
e-mail: marceniuk@yahoo.com

[1]I.Ya. Horbachevsky Ternopil State Medical University, Ternopil, m.Voli str, 1, 46001
e-mail: nadiagan84@gmail.com

.

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В.В.

Вступ.

В останні роки значна увага приділяється розвитку теорії динамічних систем.

Велику роль для розвитку теорії динамічних систем відіграли дослідження, які проводились в Україні ще наприкінці XIX століття О.М.Ляпуновим. В середині 30-х років XX століття М.М. Крилов і М.М. Боголюбов зробили важливий внесок в загальну теорію динамічних систем. За останні 45 років в розвиток теорії динамічних систем та її застосування в прикладних науках для дослідження різноманітних еволюційних задач з нелінійною динамікою зробили: Шарковський О.М., Чуєшов І.Д., Коробов, В.І., Безуглий С.І., Даниленко О.І., Коляда С.Ф., Романенко О.Ю., Майстренко Ю.Л., Теплінський О.Ю., Федоренко В.В. [2]

Нелінійні та компартментні динамічні системи широко поширені в біологічних та фізичних науках. Вони відіграють ключову роль в розумінні багатьох процесів, котрі відбуваються навколо нас. Область застосування невід'ємних і компартментних систем не обмежується біологічними та медичними системами. Їх широко використовують у системах хімічних реакцій, системах масового обслуговування, екологічних системах, економічних системах.

Для того, щоб точно описати еволюцію вище згаданих систем потрібно враховувати для будь – якої математичної моделі динамічної системи історію попередніх станів системи [3].

Оскільки дослідження нелінійних систем сьогодні є актуальним та потребує уваги, тому метою роботи є розглянути нелінійну систему диференціальних рівнянь із запізненням, а також запропонувати метод побудови експоненціальної оцінки розв'язку на основі нерівності Хейла – Лунела.

В роботі досліджуватимемо приклад невід'ємної системи. Такі моделі виникають при вивченні реальних медико – біологічних компртментних процесів [2-6].

Побудова експоненціальної оцінки.

Отже, розглянемо невід'ємну систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^{n_d} f_{d_i}(x(t-\tau_i)),\ t>0 \qquad (1)$$
$$x(t) = \varphi(t)\ t \in [-\tau_{\max}, 0]$$

де $x(t) \in R^n$, $A \in R^{n\times n}$ – суттєво невід'ємна матриця, $f_{d_i} \in R^{n\times n}$, $i = \overline{1, n_d}$ – вектор - функція, $\tau_{\max} = \max\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{n_d}\}$;

$\varphi(t) \geq\geq 0$, $t \in [-\tau_{\max}, 0]$ – покомпонентно невід'ємна функція.

Означення 1.[1] Матриця $A = \{a_{ij}\} \in R^{n\times n}$ називається невід'ємною, якщо $a_{ij} \geq 0,\ i, j = \overline{1, n}$.

Означення 2.[1] Матриця $A = \{a_{ij}\} \in R^{n\times n}$ називається суттєво невід'ємною, якщо $a_{ij} \geq 0,\ i, j = \overline{1, n},\ i \neq j$.

При побудові наступної експоненціальної оцінки використаємо нерівність Хейла –Лунела.

Нерівність Хейла – Лунела. Нехай $u(t)$ і $\alpha(t)$ – дійснозначні неперервні функції на $[a, b]$, $\beta(t) \geq 0$ – інтегрована на $[a, b]$ функція, такі, що

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) u(s) ds, \qquad a \leq t \leq b$$

Тоді

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) e^{\int_s^t \beta(\theta)d\theta} ds,\ a \leq t \leq b$$

Якщо $\alpha(t)$ – неспадна функція, тоді

$$u(t) \leq \alpha(t) e^{\int_a^t \beta(\theta)d\theta},\ a \leq t \leq b$$

Отже, для нелінійної системи диференціальних рівнянь із запізненням (1) із врахуванням певних умов сформулюємо наступну теорему.

Теорема. Якщо для системи (1) виконуються умови:

1) існує стала $\gamma > 0$, така, що:

$$\sum_{i=1}^{n_d} f_{d_i}(x) \leq\leq \gamma x \qquad (2)$$

2) існує вектор $r >> 0$, причому $r >> p$ для деякого $p >> 0$, такого що:

$$p(A^T + \gamma I) + r = 0 \qquad (3)$$

Тоді має місце така експоненціальна оцінка:

$$p^T x(t) \leq K e^{\left(\left[e^{\tau_{\max}} - 1\right]\gamma - 1\right)t},\ t \geq 0. \qquad (4)$$

Доведення. Розглянемо функціонал:

$$V(x_t) = p^T x(t) + \sum_{i=1}^{n_d} \int_{-\tau_i}^{0} p^T f_{d_i}(x_t(s)) ds \qquad (5)$$

де $p >> 0$ – покомпонентно додатній вектор із R_+^n.

Тоді

$$\frac{dV(x_t)}{dt} = p^T\left(Ax(t) + \sum_{i=1}^{n_d} f_{d_i} x(t-\tau_i)\right) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n_d} p^T f_{d_i} x(t) - \sum_{i=1}^{n_d} p^T f_{d_i} x(t-\tau_i) = \qquad (6)$$
$$= p^T\left(Ax(t) + \sum_{i=1}^{n_d} f_{d_i} x(t)\right) \leq$$
$$\leq p^T A x(t) + p^T \gamma x(t) = p^T (A + \gamma I) x(t)$$

де I – одинична матриця.

Нехай існує вектор $r >> 0$, такий що:

$$p(A^T + \gamma I) + r = 0$$

Тоді, продовжуючи вираз (6), отримаємо:

$$\frac{dV(x_t)}{dt} \leq\leq -r^T x(t) \qquad (7)$$

В силу припущення $r >> p$. Враховуючи невід'ємність $x(t)$ маємо:

$$\frac{dV(x_t)}{dt} \leq\leq -p^T x(t) =$$
$$= -p^T x(t) + \gamma p^T \int_{-\tau_i}^{0} x_t(s) ds - \gamma p^T \int_{-\tau_i}^{0} x_t(s) ds \leq \qquad (8)$$
$$\leq -V(x_t) + \gamma p^T \int_{-\tau_{\max}}^{0} x_t(s) ds.$$

Помноживши останній вираз на e^t отримаємо

$$\frac{d\left[V(x_t)e^t\right]}{dt} \leq\leq \gamma p^T e^t \int_{-\tau_{\max}}^{0} x_t(s) ds. \qquad (9)$$

Проінтегрувавши (9) на відрізку $[0; t]$, отримаємо:

$$V(x_t)e^t \leq\leq V(x_0) + \int_0^t \int_{-\tau_{\max}}^{0} \gamma p^T e^{\theta} x_{\theta}(s) ds d\theta. \qquad (10)$$

Змінивши порядок інтегрування в нерівності (10) отримаємо:

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^t \int_{-\tau_{\max}}^0 \gamma p^T e^{\theta} x_\theta(s) ds d\theta = \\
&= \int_0^t \int_{\theta-\tau_{\max}}^0 \gamma p^T e^{\theta} x(s_1) ds_1 d\theta = \\
&= \int_{-\tau_{\max}}^t \int_{s_1}^{s_1+\tau_{\max}} \gamma p^T e^{\theta} x(s_1) ds_1 d\theta = \\
&= \int_{-\tau_{\max}}^0 \int_{s_1}^{s_1+\tau_{\max}} \gamma p^T e^{\theta} x(s_1) ds_1 d\theta + \\
&+ \int_0^t \int_{s_1}^{s_1+\tau_{\max}} \gamma p^T e^{\theta} x(s_1) ds_1 d\theta \le \\
&\le \gamma p^T \left[e^{\tau_{\max}} - 1\right] \int_{-\tau_{\max}}^0 x(s_1) ds_1 + \\
&+ \gamma p^T \left[e^{\tau_{\max}} - 1\right] \int_0^t e^{s_1} x(s_1) ds_1
\end{aligned} \tag{11}
$$

Об'єднавши нерівності (10) і (11), отримаємо:

$$
\begin{aligned}
V(x_t)e^t \le &\le V(x_0) + \gamma p^T \left[e^{\tau_{\max}} - 1\right] \int_{-\tau_{\max}}^0 x(s_1) ds_1 + \\
&+ \gamma p^T \left[e^{\tau_{\max}} - 1\right] \int_0^t e^{s_1} x(s_1) ds_1
\end{aligned} \tag{12}
$$

Виходячи із виду функціоналу (5) та припущення про невід'ємність системи (1) маємо:

$$
V(x_t) \ge p^T x(t) \tag{13}
$$

Із нерівності (12) випливає, що:

$$
\begin{aligned}
p^T x(t)e^t \le &\le V(x_0) + \gamma p^T \left[e^{\tau_{\max}} - 1\right] \int_{-\tau_{\max}}^0 x(s_1) ds_1 + \\
&+ \gamma p^T \left[e^{\tau_{\max}} - 1\right] \int_0^t e^{s_1} x(s_1) ds_1
\end{aligned} \tag{14}
$$

Використавши для (14) нерівність Хейла – Лунела де:

$$
\begin{aligned}
&u(t) = p^T x(t) e^t \\
&\alpha(t) = K \\
&\beta(s) = \gamma\left[e^{\tau_{\max}} - 1\right] \\
&a = 0
\end{aligned} \tag{15}
$$

отримаємо:

$$
p^T x(t)e^t \le K e^{\int_0^t \left[e^{\tau_{\max}} - 1\right]\gamma d\theta} = K e^{\left[e^{\tau_{\max}} - 1\right]\gamma t}, \ t \ge 0,
$$

тобто

$$
p^T x(t) \le K e^{\left(\left[e^{\tau_{\max}} - 1\right]\gamma - 1\right)t}, \ t \ge 0.
$$

Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо систему на основі динаміки Міхаеліса – Ментена:

$$
\begin{aligned}
&x_1'(t) = -(a_{11} + a_{21} + a_{31}) x_1(t) + \\
&+ a_{12} \frac{x_2(t-\tau_1)}{x_2(t-\tau_1) + K_{12}^m} + a_{13} \frac{x_3(t-\tau_2)}{x_3(t-\tau_2) + K_{13}^m}; \\
&x_2'(t) = -a_{12} x_2(t) + a_{21} \frac{x_1(t-\tau_1)}{x_1(t-\tau_1) + K_{21}^m}; \\
&x_3'(t) = -a_{13} x_3(t) + a_{31} \frac{x_1(t-\tau_2)}{x_1(t-\tau_2) + K_{31}^m}; \ t \ge 0 \\
&x(t) = \varphi(t), \ t \in \left[-\tau_{\max}, 0\right]
\end{aligned} \tag{16}
$$

Система (16) може бути представленою у вигляді (1), де:

$$
A = \begin{pmatrix} -(a_{11}+a_{21}+a_{31}) & 0 & 0 \\ 0 & -a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{13} \end{pmatrix},
$$

і

$$
f_{d_1}(x(t)) = \begin{pmatrix} a_{12} \dfrac{x_2(t)}{K_{12}^m} \\ a_{21} \dfrac{x_1(t)}{K_{21}^m} \\ 0 \end{pmatrix},
$$

$$
f_{d_2}(x(t)) = \begin{pmatrix} a_{13} \dfrac{x_3(t)}{K_{13}^m} \\ 0 \\ a_{31} \dfrac{x_1(t)}{K_{31}^m} \end{pmatrix}.
$$

Тоді

$$
f_{d_1}(x(t)) + f_{d2}(x(t)) < \begin{pmatrix} a_{12} \dfrac{x_2(t)}{K_{12}^m} + a_{13} \dfrac{x_3(t)}{K_{13}^m} \\ a_{21} \dfrac{x_1(t)}{K_{21}^m} \\ a_{31} \dfrac{x_1(t)}{K_{31}^m} \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}
$$

де

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{K_{12}^m} & \frac{a_{13}}{K_{13}^m} \\ \frac{a_{21}}{K_{21}^m} & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{K_{31}^m} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристичний поліном $\chi(\lambda)$ матриці Γ має вигляд:

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + \left(\frac{a_{12}}{K_{12}^m} \cdot \frac{a_{21}}{K_{21}^m} + \frac{a_{13}}{K_{13}^m} \cdot \frac{a_{31}}{K_{31}^m} \right) \lambda,$$

коренями якого будуть три власні значення

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2.,3} = \pm \sqrt{\frac{a_{12}}{K_{12}^m} \cdot \frac{a_{21}}{K_{21}^m} + \frac{a_{13}}{K_{13}^m} \cdot \frac{a_{31}}{K_{31}^m}}.$$

Отже

$$\Gamma x(t) << \gamma x(t),$$

де

$$\gamma = \sqrt{\frac{a_{12}}{K_{12}^m} \cdot \frac{a_{21}}{K_{21}^m} + \frac{a_{13}}{K_{13}^m} \cdot \frac{a_{31}}{K_{31}^m}}.$$

Остаточна оцінка матиме вигляд:

$$p^T x(t) \le K e^{\left(\left[e^{\tau_{\max}} - 1 \right] \sqrt{\frac{a_{12}}{K_{12}^m} \cdot \frac{a_{21}}{K_{21}^m} + \frac{a_{13}}{K_{13}^m} \cdot \frac{a_{31}}{K_{31}^m}} - 1 \right) t}, \quad t \ge 0.$$

Висновки. В роботі розглянута нелінійна невід'ємна система диференціальних рівнянь із запізненням, для якої побудовано експоненціальну оцінку на основі нерівності Хейла – Лунела. Результат досліджень підсилено практичним прикладом системи на основі динаміки Міхаеліса - Ментена.

Список використаних джерел

1. *Martsenyuk V.P., Gandzyuk N.M.* Method of construction of stability estimate for compartmental model with time delay // Cybernetics and Systems Analysis.//2013./№1./P.96-102. (in Russian).
2. *Martsenyuk V.P., Andrushchak I.Ye, Gandzyuk N.M.* Construction of exponential estimates for compartmental system with distributed delays: an approach based on Hale - Lunel inequality. // Cybernetics and Systems Analysis.//2013./№3./P.26-31. (in Russian).
3. *Martsenyuk V.P., Gandzyuk N.M.* About of exponential estimates for linear stationary system with delay as the solution of the difference equation// Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics./2012./№2./С.55-64. (in Ukrainian).
4. *Martsenyuk V.P., Gandzyuk N.M.* About of construction of exponential estimates for system with delay./ *Martsenyuk V.P., Gandzyuk N.M.* // XVI International Conference «Dynamical System Modelling and Stability Investigation», May 29-31 2013 Kiev: proceedings - 110p. (in Ukrainian).
5. Khusainov D.Y., Kharchenko I.I., Shatyrko *A.V.* Fundamentals of Modeling Dynamic Systems– Kiev - 2004. (in Ukrainian).
6. *Haddad W.M, Chellaboina V.* Stability theory for nonnegative and compartmental dynamical systems with time delay // Systems and Control Letters - 2001. – №51. – С. 355-361.

Надійшла до редколегії 09.09.2013р.