УДК 519.8

Мащенко[1] С.О., д. ф.-м. н., проф.

Мінімаксний критерій прийняття рішень при нечіткій множині станів природи

Пропонується метод розв'язання задачі прийняття рішень в умовах невизначеності з нечіткою множиною станів природи, який заснований на принципі гарантованого результату. Побудовано підхід для знаходження кращої за корисністю альтернативи із ступенем належності нечіткій множині розв'язків не менше заданого числа.

Ключові слова: функція належності, нечітка множина, прийняття рішень в умовах невизначеності, раціональний вибір.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д,
e-mail: msomail@yandex.ru

Mashchenko[1] S.O., D. Sci (Phys-Math.), Prof.

Minimax criterion of decision making at the fuzzy set of nature states

The method of decision making in the conditions of uncertainty with the fuzzy set nature states is offered, which is based on principle of the assured result. Structural approach for the finding of the best by utility alternative with the membership degree of the not less set number to the fuzzy set of decisions is built.

Keywords: membership function, fuzzy set, decision making in the conditions of uncertainty, rational choice.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: msomail@yandex.ru

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

В загальному випадку задача прийняття рішень (ЗПР) в умовах невизначеності визначається на тріаді множин: X — множина альтернатив; Y — множина наслідків; S — множина станів природи. Альтернативи — це те, що вибирає особа, яка приймає рішення (ОПР). Альтернативами можуть служити об'єкти різної природи, плани, програми, дії і т.п. Наслідки характеризують результат вибору альтернатив. В ЗПР в умовах невизначеності кожній альтернативі може відповідати множина наслідків і тому зв'язок між альтернативами і наслідками може бути неоднозначним. Множина S характеризує прояв невизначеності в прийнятті рішень, причому конкретна інтерпретація станів залежить від постановки задачі (наприклад, попит на ту або іншу продукцію, погода і т.п.).

Оскільки будь-який наслідок ЗПР в нормальній формі [1] однозначно визначається парою $(x,s)\in X\times S$, то ОПР може задати функцію корисності наслідків $u(x,s)$ на множині $X\times S$. Ціль ОПР полягає у виборі такої альтернативи $x\in X$, яка максимізувала б функцію корисності наслідків $u(x,s)$.

Таким чином, виникає задача вибору деякої альтернативи, яка задовольняє умовам

$$u(x,s)\to\max_{x\in X},\ s\in S. \tag{1}$$

Відомо достатньо багато різноманітних підходів до розв'язання ЗПР в нормальній формі [1]. Основна ідея розв'язання задачі (1) полягає в побудові так званого [1] критерію $E(x)$ (функції корисності альтернатив), вигляд якого залежить від наявності деякої додаткової інформації: про стани природи (частіше всього пов'язаної з розподілом ймовірностей на множині S), про особливості ОПР (схильність до ризику і т.п.).

В деяких випадках може бути так, що ОПР не може чітко вказати, які стани природи $s\in S$ актуальні у момент прийняття рішення, але може задати деяку нечітку підмножину $\tilde{S}\subseteq S$ цих станів. Тоді перед ОПР виникає задача вигляду

$$u(x,s)\to\max_{x\in X},\ s\in\tilde{S}, \tag{2}$$

яку називатимемо ЗПР в умовах невизначеності з нечіткою множиною станів природи.

Слід зазначити, що проведені дослідження задачі (2), наприклад в [2], показують, що в загальному випадку її розв'язком є не конкретна альтернатива, а деяка нечітка множина X^*, яка визначена на універсальній множин альтернатив X. Оскільки часто ОПР цікавить будь-яка конкретна альтернатива, то виникає проблема вибору. Один із загальноприйнятих підходів до розв'язання цієї проблеми полягає у виборі так званої [3] максимізуючої альтернативи $x^* = \arg\max_{x \in X} \mu(x)$, де $\mu(x)$ — функція належності нечіткої множини розв'язків X^*.

Таким чином, вибирається альтернатива з найбільшим ступенем належності нечіткої множини розв'язків X^*. На перший погляд такий вибір представляється логічним, але, з іншого боку, виникає питання про інтерпретацію такої альтернативи x^*. Наприклад, припустимо, що, вважаючи нечітку множину X^* розв'язком задачі (2), ми можемо показати, що такий вибір повністю виключає в деякому певному сенсі ризик для ОПР. Тоді чи ризикуватиме ОПР, вибираючи будь-яку конкретну альтернативу, у тому числі і максимізуючу? Відповідь є простою: "так". Таким чином, в цьому випадку вибір конкретної альтернативи з множини розв'язків, у тому числі максимізуючої, не має першорядного значення. Тому сама альтернатива може виконувати лише допоміжну роль в міру потреб ОПР.

Наведені вище міркування показують, що єдиність вибору в ЗПР в умовах невизначеності з нечіткою множиною станів природи доцільно розуміти в деякому іншому сенсі. Розглянемо наступне поняття.

Лінгвістичною альтернативою задачі (2) назвемо деяку лінгвістичну змінну A [4], яка задається сукупністю $\langle A, X, T_A, G_A, M_A \rangle$, де

- X — універсальна множина альтернатив;
- $T(A)$ — множина її значень (терм-множина), які є іменами нечітких змінних t;
- G_A — синтаксична процедура, що дозволяє оперувати елементами терм-множини T_A;
- M_A — семантична процедура, яка співставляє кожному лінгвістичному значенню T_A в конкретному контексті його сенс $M_A(T_A)$.

У свою чергу кожна нечітка змінна (терм) $t \in T_A$ задається сукупністю $\langle t, X, B_t \rangle$, де нечітка множина B_t визначена на універсальній множині альтернатив X і описує обмеження на значення нечіткої змінної t.

Вважатимемо, що ОПР, вирішуючи задачу (2), вибирає не конкретну альтернативу $x \in X$, а деяку нечітку множину X^*. Ця множина визначає нечітку змінну, яка є відповідним конкретним значенням заданої лінгвістичної альтернативи A.

Для простоти вважатимемо, що для будь-якої нечіткої множини, яку можна визначити на універсальній множині альтернатив X, завжди існує така відповідна йому нечітка змінна, яка або належить терм-множині T_A, або може бути згенерованою синтаксичною процедурою G_A деякої лінгвістичної альтернативи A.

Задачу (2) із заданою лінгвістичною альтернативою A називатимемо лінгвістичною ЗПР в умовах невизначеності з нечіткою множиною станів природи. Очевидно, що для її вирішення достатньо спочатку отримати рішення задачі (2) у вигляді нечіткої множини X^*, а потім за ним визначити значення відповідної нечіткої змінної лінгвістичної альтернативи A.

Таким чином, якщо розв'язок задачі (2) отриманий у вигляді єдиної нечіткої множини X^*, якій відповідає єдина лінгвістична альтернатива, то його можна вважати єдиним розв'язком лінгвістичної ЗПР.

Розглянемо наступний приклад. За яку суму купити автомобіль в кредит строком на 5 років? Альтернативи — витрати x на покупку автомобіля з урахуванням кредиту (в тис. у.о.), $x \in X = [10, 50]$. Стани природи — можливі доходи s за 5 років (в тис. у.о.), $s \in S = [120, 240]$. Наслідки — рівень життя, який оцінюється за шкалою [0,100] в залежності від різниці $s - x$.

З самої постановки задачі очевидно, що як множина станів природи ймовірно може бути заданою нечітко, так і розв'язок цієї задачі треба шукати у вигляді нечіткої множини, яка буде конкретною нечіткою змінною лінгвістичної альтернативи "вартість авто".

Наприклад, нехай задана лінгвістична альтернатива $\langle A, T(A), X, G_A, M_A \rangle$, де:

- A — "вартість авто";
- $X = [10, 50]$ — універсальна множина альтернатив;
- T_A={"маленька вартість", "середня вартість", "велика вартість"} — терм-множина;
- G_A — синтаксична процедура завдання на $X = [10, 50]$ нечітких підмножин А1 — "маленька вартість", А2 — "середня вартість", А3 — "велика вартість" полягає в обчисленні відповідних функцій належності: $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$, а також функцій належності нечітких множин для термів з T_A відповідно правилам трансляції нечітких зв'язок і модифікаторів "і", "або", не, "дуже", "злегка", які відповідають

операціям над нечіткими множинами: $A \bigcap B$, $A \bigcup B$, $\bar{A}$, $CON(A) = A^2$, $DIL(A) = A^{1/2}$.

- M_A — семантична процедура, яка ставить кожному лінгвістичному значенню його значення, наприклад: $A_1 \bigcup A_2$ — "маленька або середня вартість", A_1^2 — "дуже маленька вартість" і ін.

Якщо в результаті розв'язання ЗПР в умовах невизначеності з нечіткою множиною станів природи (2) отримана деяка нечітка множина, яка, наприклад, співпадає з $A_1 \bigcup A_2^{1/2}$, то розв'язком лінгвістичної ЗПР в умовах невизначеності з нечіткою множиною станів природи буде лінгвістична альтернатива "вартість авто", яка має єдине значення "мала або злегка середня вартість".

Оскільки методи визначення значень лінгвістичних змінних представляють самостійний інтерес і достатньо вивчені [4], то ця стаття буде присвяченою розв'язанню ЗПР в умовах невизначеності з нечіткою множиною станів природи в постановці (2).

В цій роботі буде розглядатися нечіткий максмінний критерій прийняття рішень в умовах невизначеності з нечіткою множиною станів природи, в основу якого покладений відомий критерій Вальда [1] (принцип найкращого гарантованого результату). Цей критерій використовує функцію корисності альтернатив $E_V(x) = \min_{s \in S} u(x,s)$, яка відповідає позиції крайньої обережності ОПР. Величина $E_V(x)$ називається гарантованим результатом альтернативи $x \in X$. Шукана альтернатива x^* вибирається з умови

$$E_V(x^*) = \max_{x \in X} E_V(x). \qquad (3)$$

Вибрані таким чином альтернативи повністю виключають ризик. Це означає, що які б стани природи $s \in S$ не реалізувалися, відповідний результат не може виявитися гірше, ніж гарантований $E_V(x^*)$. Ця властивість робить критерій Вальда одним з фундаментальних.

Припустимо, ОПР не може чітко задати множину станів природи, які впливатимуть на наслідки прийняття рішень. Нехай $\tilde{S}$ — нечітка множина універсальної множини станів природи S з функцією належності $\mu(s)$, $\mu : S \to [0,1]$.

Розглянемо задачу (2). В цьому випадку для кожної фіксованої альтернативи $x \in X$ функція корисності альтернатив приймає вигляд задачі нечіткого математичного програмування

$$\tilde{E}_V(x) = \min_{s \in \tilde{S}} u(x,s). \qquad (4)$$

Задачі нечіткого математичного програмування достатньо вивчені. Згідно [3] передбачається, що для кожної фіксованої альтернативи $x \in X$ ОПР хоче максимізувати функцію $\mu(s)$, $s \in S$, належності нечіткої множини станів природи $\tilde{S}$ і мінімізувати її функцію корисності $u(x,s)$. Розв'язком задачі (4) для фіксованої альтернативи $x \in X$ називається нечітка множина станів природи $S^*(x)$, носієм якої буде множина оптимальних за Парето розв'язків (позначимо її $S^{PO}(x)$) двохкритеріальної задачі оптимізації:

$$\mu(s) \to \max, \ u(x,s) \to \min, \ s \in S. \qquad (5)$$

Нагадаємо, що для задачі (5) множина

$$S^{PO}(x) = \{s^* \in S \mid (\mu(s) < \mu(s^*)) \vee \vee (u(x,s) > u(x,s^*)), \ \forall s \in S\}. \qquad (6)$$

Функцією належності $\pi_x(s)$ нечіткої множини $S^*(x)$ буде звуження функції належності $\mu(s)$, $s \in S$, з універсальної множини S на множину $S^{PO}(x) \subseteq S$. Іншими словами, ця функція належності матиме вигляд

$$\pi_x(s) = \begin{cases} \mu(s), & s \in S^{PO}(x), \\ 0, & s \notin S^{PO}(x). \end{cases} \qquad (7)$$

Множині розв'язків задачі (5), якою є нечітка множина $S^*(x)$ з функцією належності $\pi_x(s)$, $s \in S$, згідно [3] відповідає нечітка множина $\tilde{E}_V(x) \subseteq E(x) \subseteq R^1$ оптимальних значень цільової функції цієї задачі з функцією належності $\phi : R^1 \to [0,1], \phi_x(y) = \max_{s \in S, u(x,s)=y} \pi_x(s)$, $y \in E(x)$, де $E(x) = \{u = u(x,s) | s \in S\} \subseteq R^1$ — універсальна множина можливих корисностей альтернативи $x \in X$ при всіх можливих станах природи.

На основі представлених вище міркувань визначимо поняття нечіткої множини гарантованих наслідків.

Нечіткою множиною гарантованих наслідків для альтернативи $x \in X$ ЗПР в умовах невизначеності з нечіткою множиною станів природи $\tilde{S}$ з функцією належності $\mu(s)$, $s \in S$, називатимемо нечітку множину $\tilde{E}_V(x) \subseteq R^1$ з функцією належності $\phi_x(y) = \max_{s \in S, u(x,s)=y} \pi(x,s)$. Значення $y \in E(x)$ називатимемо гарантованим результатом альтернативи $x \in X$, а величину $\phi_x(y)$ — її ступенем належності множині $\tilde{E}_V(x)$.

Визначимо $E \supseteq \bigcup_{x \in X} E(x)$, $E \subseteq R^1$, — універсальну множину можливих корисностей альтернатив універсальної множини X при всіх можливих станах природи. Відзначимо, що для всієї множини X функція $\phi_x(y)$ визначає функцію належності $\phi(x,y)$ деякого нечіткого відображення $\tilde{\Phi}$ з множини альтернатив X у множину їхніх корисностей $E \subseteq R^1$:

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \max\limits_{s \in S, u(x,s)=y} \pi(x,s), & y \in E(x), \\ 0, & y \in E \setminus E(x). \end{cases} \quad (8)$$

Таким чином, виходить, що у разі нечіткої множини станів природи альтернативи $x \in X$ потрібно порівнювати між собою за відповідними їм нечіткими множинами $\tilde{E}_V(x)$ значень корисностей. Тому розв'язком задачі буде нечітка множина, яка забезпечує найкращий гарантований результат. Для реалізації цієї ідеї використовуємо техніку, яка розвинута в [3].

Позначимо $\mu_R : E \times E \to [0,1]$ — функцію належності чіткого відношення R, яке є відношенням "$\geq$" - не менше, заданого на $E \subseteq R^1$. Очевидно, що

$$\mu_R(z,y) = \begin{cases} 1, & z \geq y, \\ 0, & z < y. \end{cases} \quad (9)$$

Для вирішення поставленої задачі побудуємо на множині альтернатив X нечітке відношення переваги, індуковане вихідним відношенням переваги R і нечіткою ціллю, яка задана нечітким відображенням $\tilde{\Phi}$. Після цього виділимо в X нечітку підмножину недомінованих альтернатив, яка і буде множиною розв'язків задачі (2).

Довільній альтернативі x^* задане нечітке відображення $\tilde{\Phi}$ ставить у відповідність нечітку корисність цієї альтернативи у формі нечіткої підмножини множини корисностей $E \subseteq R^1$ з функцією належності $\phi(x^*, y)$.

Нехай $\tilde{\eta}$ — нечітке відношення переваги, індуковане відношенням переваги R на класі Ψ всіх нечітких підмножин множини E. Користуючись цим відношенням, можна порівнювати між собою нечіткі корисності альтернатив, а отже, і самі альтернативи. Іншими словами, ступенем переваги альтернативи $x_1 \in X$ альтернативі $x_2 \in X$ будемо вважати ступінь переваги $\eta(x_1, x_2)$ нечіткої множини корисностей $\phi(x_1, y)$ нечіткій множині корисностей $\phi(x_2, y)$.

Таким чином, використовуючи визначення [3] узагальненого нечіткого відношення переваги, отримаємо нечітке відношення переваги на множині альтернатив X наступного вигляду: $\eta(x_1, x_2) = \max\limits_{z,y \in E} \min\{\phi(x_1, z), \phi(x_2, y), \mu_R(z,y)\}$.

Неважко переконатися в тому, що коли функція належності ϕ задовольняє умові $\max\limits_{y \in E} \phi(x,y) = 1,\ \forall x \in X$, тобто коли множина корисностей довільної альтернативи утворює нормальну нечітку множину, то нечітке відношення переваги η буде рефлексивним, тобто $\forall x \in X,\ \eta(x,x) = 1$.

Після того, як і на множині альтернатив уведене нечітке відношення переваги, вихідна задача зводиться до ЗПР з ціллю, що задана нечітким відношенням переваги [3].

Виділимо тепер в множині X найкращий гарантований результат як нечітку множину недомінованих (оптимальних за Парето) альтернатив. Згідно [3] воно матиме наступний вигляд: $\tilde{\eta}^{PO}(x) = 1 - \max\limits_{x' \in X} \{\eta(x', x) - \eta(x, x')\} = 1 - \max\limits_{x' \in X}\{\max\limits_{z,y \in E} \min\{\phi(x', z),\ \phi(x,y),\ \mu_R(z,y)\} - \max\limits_{z,y \in E} \min\{\phi(x,z), \phi(x', y), \mu_R(y,z)\}\}$. За виразом (9) остаточно отримаємо $\tilde{\eta}^{PO}(x) = 1 - \max\limits_{x' \in X}\{\max\limits_{\substack{z,y \in E, \\ z \geq y}} \min\{\phi(x', z), \phi(x,y)\} - \max\limits_{\substack{z,y \in E, \\ z \geq y}} \min\{\phi(x,z), \phi(x', y)\}\}$.

Необхідно відзначити, що якщо функція $\phi(x,y)$ така, що для деякої альтернативи x^* має місце нерівність $\sup\limits_{y \in E} \phi(x^*, y) = \alpha < 1$, то значення $\tilde{\eta}^{PO}(x^*)$ може не відповідати фактичному ступеню недомінованості цієї альтернативи.

Для того, щоб виключити такі аномальні випадки, величину $\tilde{\eta}^{PO}(x)$ необхідно скоректувати. Для цього значення функції $\tilde{\eta}^{PO}(x)$ потрібно порівнювати з відповідними значеннями $\max\limits_{y \in E} \phi(x,y)$.

Спираючись на ці міркування, розв'язком вихідної задачі вважатимемо нечітку множину не з функцією належності $\tilde{\eta}^{PO}$, а з скоректованою функцією $\eta^{PO}(x) = \min\{\tilde{\eta}^{PO}(x), \max_{y\in E}\phi(x,y)\}$.

Неважко показати, що для будь-кого x має місце рівність $\max_{y\in E}\phi(x,y) = \eta(x,x)$. Таким чином, приходимо до наступного поняття.

Нечітку множину X^* з функцією належності $\eta^{PO}(x) = \min\{\tilde{\eta}^{PO}(x), \eta(x,x)\}$ називатимемо розв'язком ЗПР з нечіткою множиною станів природи (2) за нечітким максмінним критерієм.

Якщо раптом ОПР із яких-небудь причин знадобиться максимізуючий розв'язок x^*, то він може бути знайдений як $\max_{x\in X}\eta^{PO}(x)$.

В деяких випадках ОПР може цікавити краща за корисністю альтернатива із ступенем належності нечіткої множини X^* розв'язків не менше заданого числа $\alpha \in (0,1]$. В [3] показано, що для її знаходження достатньо вирішити задачу математичного програмування:

$$\begin{aligned} & y \to \max, \\ & \phi(x,y) \ge \alpha, \\ & x \in X,\ y \in E \subseteq R^1, \end{aligned} \tag{10}$$

Розв'язання задачі (10) можна істотно спростити, якщо використати наступну теорему.

Теорема. Припустимо, що функція належності нечіткої множині станів природи $\mu(s) > 0$, $\forall s \in S$. Альтернатива $x^* \in X$ буде кращою за корисністю із ступенем належності множини розв'язків X^* не менше заданого числа $\alpha \in (0,1]$ за нечітким максмінним критерієм тоді і тільки тоді, коли задовольнятиме системі двох задач математичного програмування:

$$u(x^*,s^*) = \max_{x\in X}\min_{s\in S,\ \mu(s)\ge\alpha} u(x,s), \tag{11}$$

$$\mu(s^*) = \max\{\mu(s) \mid u(x^*,s) \le u(x^*,s^*)\},\ s \in S. \tag{12}$$

Доведення. Нехай $x^* \in X$ і $s^* \in S$ задовольняють (11) (12). Покажемо, що x^* і $y^* = u(x^*,s^*)$ задовольняють (10). Дійсно, з (11), (12) випливає, що

$$\begin{aligned} & u(x^*,s) \ge u(x^*,s^*) \ge u(x,s^*),\ \forall x \in X, \\ & \forall s \in \{s \in S \mid \mu(s) \ge \alpha\} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\mu(s^*) \ge \alpha \tag{14}$$

$$\mu(s^*) \ge \mu(s), \forall s \in \{s \in S \mid u(x^*,s) \le u(x^*,s^*)\}. \tag{15}$$

Покажемо, що $s^* \in S^{PO}(x^*)$. Припустимо супротивне $s^* \notin S^{PO}(x^*)$. Тоді згідно (6) $\exists s \in S$, для якого виконуються нерівності:

$$\text{або } u(x^*,s) < u(x^*,s^*) \tag{16}$$

$$\text{або } \mu(s) > \mu(s^*)\ \ u(x^*,s) \le u(x^*,s^*). \tag{17}$$

Якщо мають місце нерівності (16), то отримаємо суперечність з (13), (14). Якщо ж мають місце нерівності (17), то отримаємо суперечність з (15). Таким чином, $s^* \in S^{PO}(x^*)$.

Припустимо супротивне, що x^* і $y^* = u(x^*,s^*)$ не задовольняють (10). Можливі наступні випадки.

1. Припустимо, що $\phi(x^*,y^*) < \alpha$. Тоді $\max_{s\in S, u(x^*,s)=y^*}\pi(x^*,s) < \alpha$. Звідси $\pi(x^*,s) < \alpha$ для $\forall s \in S$, таких що $u(x^*,s) = y^*$. У тому числі і для s^*. Тому $\pi(x^*,s^*) < \alpha$. Оскільки $s^* \in S^{PO}$, то $\pi(x^*,s^*) = \mu(s^*)$. Звідси $\mu(s^*) < \alpha$, що суперечить (14).

2. Припустимо, що $\exists \bar{y} > y^*$ і $x \in X$, що $\phi(x,\bar{y}) \ge \alpha$, $\bar{y} \in E(x) = \{y = u(x,s) \mid s \in S\}$. Це означає, що $\exists \bar{s} \in S$ і $x \in X$, для яких виконуються нерівності

$$\phi(x, u(x,\bar{s})) \ge \alpha, \tag{18}$$

$$u(x,\bar{s}) > u(x^*,s^*). \tag{19}$$

З (18) випливає, що $\phi(x,u(x,\bar{s})) = \max_{s\in S, u(x,s)=u(x,\bar{s})}\pi(x,s) \ge \alpha$. Звідси $\exists \tilde{s} \in S$, для якого $\pi(x,\tilde{s}) \ge \alpha$ і $u(x,\tilde{s}) = u(x,\bar{s})$. Тоді з (19) випливає нерівність $u(x,\tilde{s}) > u(x^*,s^*)$. Тому $\tilde{s} \notin S^{PO}(x^*)$. Тоді $\pi(x,\tilde{s}) = 0$ і ми одержуємо суперечність $0 \ge \alpha > 0$. Достатність умови теореми доведена.

Покажемо необхідність. Нехай y^* задовольняє (10). Звідси випливають нерівності: $y^* \ge y, \forall y \in Y = \{y \in R^1 \mid \phi(x,y) \ge \alpha, y \in E(x), x \in X\}$.

Оскільки на підставі (8) $\phi(x,y) = \max_{s\in S, u(x,s)=y}\pi(x,s)$, то ці нерівності можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} & y^* \ge y, \forall y \in Y = \{y \in R^1 \mid \\ & \max_{s\in S, u(x,s)=y}\pi(x,s) \ge \alpha, y \in E(x), x \in X\}. \end{aligned} \tag{20}$$

Позначимо $x^* \in X$ таку альтернативу, що $y^* = u(x^*, s^*)$, де стан природи $s^* = \arg \max_{s \in S, u(x^*, s) = y^*} \pi(x^*, s)$. Відзначимо, що оскільки за припущенням задача (10) має розв'язок, то і (20) має розв'язок. Тому x^*, s^* існують. Тоді

$$\pi(x^*, s^*) \geq \alpha \tag{21}$$

і (20) можна переписати у вигляді $u(x^*, s^*) \geq u(x, s)$ $\forall x \in X$ $\forall u(x, s) \in \{u(x, s) \in$ $\in \{u(x, s) \in E(x) \big| \max_{v \in S, u(x,v) = u(x,s)} \pi(x, v) \geq \alpha\}$.

Ці нерівності, у свою чергу, можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} & u(x^*, s^*) \geq u(x, s), \forall x \in X, \forall s \in S(x) = \\ & = \{s \in S \big| \max_{v \in S, u(x,v) = u(x,s)} \pi(x, v) \geq \alpha\}. \end{aligned} \tag{22}$$

З (22), зокрема, випливає, що для $s = s^*$

$$u(x^*, s^*) \geq u(x, s^*) \quad \forall x \in X . \tag{23}$$

Також з (22), зокрема, випливає, що для фіксованого $x = x^*$

$$\begin{aligned} & u(x^*, s^*) \geq u(x^*, s), \forall s \in S(x^*) = \\ & = \{s \in S \big| \max_{v \in S, u(x^*,v) = u(x^*,s)} \pi(x^*, v) \geq \alpha\}. \end{aligned} \tag{24}$$

Оскільки за визначенням задачі (10) $\alpha > 0$, то з (24) очевидно випливає, що $\pi(x^*, \overline{s}) > 0$ для $\forall \overline{s} \in S(x^*)$. Тому через припущення теореми про те, що $\mu(s) > 0$, $\forall s \in S$, враховуючи (7), отримаємо

$$\mu(\overline{s}) = \pi(x^*, \overline{s}) \geq \alpha , \tag{25}$$

$$\overline{s} \in S^{PO}(x^*) \tag{26}$$

для $\forall \overline{s} \in S(x^*)$. Таким чином, з (25) і (24) випливають нерівності

$$\begin{aligned} & u(x^*, s^*) \geq u(x^*, s), \forall s \in S(x^*) = \\ & = \{s \in S \big| \ \mu(s) \geq \alpha\}. \end{aligned} \tag{27}$$

Відзначимо також, що з (21) і (24) випливає включення

$$s^* \in S(x^*) . \tag{28}$$

Тому з (25), (26), (28) випливає відповідно

$$\mu(s^*) \geq \alpha , \tag{29}$$

$$s^* \in S^{PO}(x^*) . \tag{30}$$

Покажемо, що пара x^*, s^* задовольняє (13) – (15). Припустимо супротивне, що умови (13) – (15) не виконуються. Тоді можливі випадки.

1. Припустимо, що $\exists x \in X$ $u(x^*, s^*) < u(x, s^*)$. Тоді отримаємо суперечність з (23).

2. Припустимо, що $\exists \overline{s} \in S$, для якого $\mu(\overline{s}) \geq \alpha$ і $u(x^*, s^*) < u(x^*, \overline{s})$. В цьому випадку отримаємо суперечність з (27).

3. Нехай $\mu(s^*) < \alpha$. Тоді отримаємо суперечність з (29).

4. Припустимо, що $\exists \overline{s} \in S$, для якого виконуються нерівності $\mu(s^*) < \mu(\overline{s})$ і $u(x^*, \overline{s}) \leq u(x^*, s^*)\}$. В цьому випадку згідно (6) отримаємо суперечність з (30).

Таким чином, пара x^*, s^* задовольняє (13) – (15) і задачі (10) і (11), (12) мають одні і ті ж розв'язки. Теорему доведено.

На закінчення відзначимо, що розглянутий вище метод розв'язку ЗПР в умовах невизначеності з нечіткою множиною станів природи можна легко узагальнити на випадок нечіткої множини альтернатив і нечітких оцінок корисності наслідків. Для цього достатньо використати відому техніку [3] дефаззифікації.

List of used sources

1. *Truhaev R.I.* Decision making models in conditions of uncertainty / R.I. Truhaev. – M.: Nauka, 1981. – 258 p. (in Russian).

2. *Mashchenko S.O.* Generalization Germeyer's criterion in the decision making problem in conditions of uncertainty with the fuzzy set of nature states / S.O. Mashchenko // Journal of Automation and Information Sciences. – 2012. – № 5 . – P. 102 – 110 (in Russian).

3. *Orlovskiy S.A.* Problems of decision making at fuzzy initial information / S.A. Orlovskiy. – M. : Science, 1981. – 208 p. (in Russian).

4. *Zadeh L.A.* The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning – 1 / L.A. Zadeh // Inform. Sci. – 1975. – **8**. – P. 199 – 249.

Надійшла до редколегії 22.10.13.