УДК 517.9

О.А. Покутний, к. ф.-м.н., наук.сп.

Узагальнено - обернений оператор в просторах Фреше, Банаха та Гільберта

В роботі запропоновано означення сильного узагальнено - оберненого та узагальненого - псевдооберненого оператора в просторах Банаха та Гільберта відповідно. Завдяки процесові поповнення вдається відмовитися від умови замкненості його множини значень та довести, що будь-який лінійний обмежений оператор в просторі Гільберта має узагальнений псевдооберений.

Ключові слова: псевдообернений за Муром-Пенроузом оператор, узагальнений розв'язок, розшарування.

01601, вул.Терещенківська 3, Інститут математики НАН України

O.O. Pokutnyi, PhD, res. as.

Generalized inverse operator in Frechet, Banach and Hilbert spaces

The definitions of strongly generalized inverse and generalized pseudoinverse operators in the Banach and Hilbert spaces are proposed. Using recruiting process for some norm we can omit the condition of closure of its set of values and prove that any bounded linear operator in Hilbert space has generalized pseudoinverse.

Key Words: Moore-Penrose pseudoinverse operator, generalized solution, bundle.

01601, 3 Tereshenkivska str., Institute of mathematics of NAS of Ukraine

E-mail: lenasas@gmail.com

Статтю представив Кудін В.І., д.т.н., с.н.с.

Вступ. Добре відомо [1, 2], що для будь-якої прямокутної матриці розміру $m \times n$ існує псевдообернена за Муром-Пенроузом. Цей факт є корисним ще й тому, що гарантує існування розв'язку задачі за методом найменших квадратів. На жаль такого результату для лінійних відображень в нескінченновимірних, зокрема, в просторах Гільберта, отримати не вдається за рахунок наявності більш складної геометрії. В даній замітці запропоновано означення деякого узагальненого псевдооберненого та сильного узагальнено-оберненого операторів, що є аналогами відомих понять псевдооберненого за Муром-Пенроузом та узагальнено-оберненого операторів [3].

Узагальнений псевдообернений оператор в просторах Гільберта. Нехай $L : H_1 \to H_2$ – лінійний обмежений оператор, що діє з простору Гільберта H_1 в простір Гільберта H_2. Відомо [3], що такий оператор має псевдообернений тоді й тільки тоді, коли він нормально-розв'язний (тобто має замкнену множину значень). Покажемо яким чином можна розширити це поняття на довільні лінійні обмежені оператори. Для зняття умови замкненості помітимо, що мають місце наступні розклади просторів в ортогональні суми

$$H_1 = N(L) \oplus X, H_2 = \overline{R(L)} \oplus Y.$$

Тут $X = N(L)^{\perp}$, $Y = \overline{R(L)}^{\perp}$. В силу представлення існують оператори ортогонального проектування $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_X$ та $\mathcal{P}_{\overline{R(L)}}$, $\mathcal{P}_Y$ на відповідні підпростори. Позначатимемо через H фактор простір простору H_1 за ядром $N(L)$ ($H = H_1/N(L)$). Тоді, як відомо [7], існує неперервна бієкція $p : X \to H$ та проекція $j : H_1 \to H$. Трійка (H_1, H, j) є локально тривіальним розшаруванням з типовим шаром $\mathcal{P}_{N(L)}H_1$. Визначимо тепер оператор

$$\mathcal{L} = \mathcal{P}_{\overline{R(L)}} L j^{-1} p : X \to R(L) \subset \overline{R(L)}.$$

Легко переконатися в тому, що визначений таким чином оператор є лінійним, ін'єктивним та неперервним. Тепер скориставшись процесом поповнення [8] за нормою $||x||_{\overline{X}} = ||\mathcal{L}x||_F$, де $F = \overline{R(L)}$, отримаємо новий простір $\overline{X}$ й розширений оператор $\overline{\mathcal{L}}$. Тоді цей оператор

$$\overline{\mathcal{L}} : \overline{X} \to \overline{R(L)}, \quad X \subset \overline{X}$$

буде здійснювати гомеоморфізм між $\overline{X}$ та $\overline{R(L)}$. Розглянемо розширений оператор $\overline{L} = \overline{\mathcal{L}}\mathcal{P}_{\overline{X}} : \overline{H}_1 \to H_2$,

$$\overline{H}_1 = N(L) \oplus \overline{X}, H_2 = R(\overline{L}) \oplus Y$$

Зрозуміло, що $\overline{L}x = Lx, x \in H_1$ та оператор $\overline{L}$ є нормально розв'язним.

Означення 1. *Оператор $\overline{L}^+ : H_2 \to \overline{H}_1$ будемо називати узагальненим псевдооберненим до оператора L.*

Зауваження 1. *З даного означення одразу випливає, що узагальнений псевдообернений до оператора L є псевдооберненим до оператора $\overline{L}$.*

Сильний узагальнено-обернений в просторах Фреше та Банаха. Нагадаємо, що в тому випадку, коли вихідні простори H_1 та H_2 є векторними просторами, поняття про узагальнено-обернений оператор було введено ще в роботі [9].

Відзначимо одразу, що геометрія простору Банаха ускладнює структуру доповнювальності підпросторів й виконується далеко не завжди на відміну від лінійних векторних просторів [4]. І тому питання про визначення узагальнено-оберненого в якомусь певному сенсі залишається відкритим. За рахунок процесу поповнення, про який йшлося в попередній частині, це поняття можна поширити на випадок локально-опуклих просторів та просторів Банаха з необов'язково замкненою множиною значень.

Перейдемо до відповідних конструкцій. Нехай задано лінійний обмежений оператор L, що діє з простору Банаха (Фреше або локально-опуклого) B_1 у простір Банаха B_2. Надалі будемо вважати, що для цих просторів мають місце наступні розклади в прямі суми підпросторів

$$B_1 = N(L) \oplus X, B_2 = \overline{R(L)} \oplus Y \qquad (1)$$

(тобто простори $N(L)$ та $\overline{R(L)}$ доповнювальні), й відповідні розклади одиниці

$$I_{B_1} = P_{N(L)} + P_X, I_{B_2} = P_{\overline{R(L)}} + P_Y,$$

де $P_{(\cdot)}$ - проектори на відповідні підпростори.

За аналогією до означень, введених в [9] для векторних просторів, введемо означення узагальненої L допустимої пари.

Означення 2. *Нехай $L : B_1 \to B_2$ лінійний обмежений оператор, що діє з простору Банаха B_1 у простір Банаха B_2, а підпростори $X \subset B_1$ та $Y \subset B_2$ такі, що виконується умова (1). Тоді відповідну пару (X, Y) будемо називати узагальненою L-допустимою парою.*

Розглянемо тепер звужений оператор $L_X x = Lx, x \in X$, $L_X : X \to \overline{R(L)}$ (він буде лінійним, неперервним та ін'єктивним). Поповнимо простір X за новою нормою $||x|| = ||L_X x||_{B_2}$ (якщо розглядувані простори є просторами Фреше або локально-опуклими, то поповнювати слід за зліченною системою напівнорм, або в загальному випадку за системою напівнорм, що визначають топологію простору [8]) і розширимо оператор L_X на поповнений простір $\overline{X}$ за неперервністю (розширений оператор будемо позначати $\overline{L}_X$). Тоді, як відомо, оператор $\overline{L}_X : \overline{X} \to \overline{R(L)}$ буде здійснювати гомеоморфізм між просторами $\overline{X}$ та $\overline{R(L)}$. Будемо позначати через $\overline{B}_1 = \overline{X} \oplus N(L)$ - розширений вихідний простір.

Означення 3. *Нехай $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ та (X, Y) - узагальнена L-допустима пара. Тоді відображення*

$$L^-_{X,Y} : B_2 \to \overline{B}_1,$$

$$L^-_{X,Y} y = \overline{L}_X^{-1} y_1,\ y = y_1 + y_2,\ y_1 \in \overline{R(L)},\ y_2 \in Y,$$

називатимемо сильним (X, Y)-узагальнено оберненим до L.

Зауваження 2. *Якщо вихідні простори є просторами Гільберта, то узагальнений* *псевдооберений оператор $\overline{L}^+$ до оператора L з означення 2 буде також сильним (X,Y)-узагальнено-оберненим до L в сенсі означення 6. Таким чином, в просторах Гільберта довільний лінійний обмежений оператор має сильний $(N(L)^\perp, \overline{R(L)}^\perp)$-узагальнено обернений.*

Лінійні рівняння з обмеженим оператором. Поняття узагальнених розв'язків та їх представлення. Розглянемо в просторах Банаха B_1 та B_2 лінійне рівняння

$$Lx = y, \tag{2}$$

де y-фіксований елемент простору B_2, L - такий лінійний обмежений оператор, що пара (X,Y) є узагальненою L-допустимою. Зрозуміло, що в загальному випадку розв'язок такого рівняння може існувати не для всіх правих частин і може бути не єдиним. Коли розв'язку не існує в звичайному сенсі, то часто відшукують такий елемент $\overline{x} \in B_1$ який мінімізує норму нев'язки $||Lx-y||_{B_2}$. Його називають псевдо- або квазірозв'язком в залежності від просторів в яких воно розглядається [3, 10]. Для існування такого розв'язку умова замкненості множини значень оператора L є суттєвою й в загальному випадку така варіаційна задача може не мати розв'язку.

В цій частині робиться спроба дати такі означення розв'язків для рівняння (2), щоб можна було гарантувати їх існування при будь-яких правих частинах.

Ми розширимо вихідний простір B_1 й оператор L на нього таким чином (використавши побудовану вище конструкцію), щоб варіаційна задача на розширеному просторі мала розв'язки в певному сенсі завжди. Відображення яке буде встановлювати відповідність між розв'язками та правими частинами в загальному випадку виявляється багатозначним.

Означення узагальнених розв'язків та основний результат. Основні результати сформулюємо в просторах Банаха та Гільберта. В такій ситуації для рівняння (2) ми будемо виділяти такі три типи розв'язків.

1) Класичні розв'язки.

Розглянемо випадок, коли оператор L нормально-розв'язний. Тоді, як відомо елемент $y \in R(L)$ тоді й тільки тоді, коли $\mathcal{P}_{N(L^*)}y = 0$. В цьому випадку існує узагальнено-обернений (псевдообернений за Муром-Пенроузом у просторі Гільберта) оператор L^- (L^+) і множина розв'язків (2) може бути представлена у вигляді

$$x = L^- y + \mathcal{P}_{N(L)}c, \forall c \in B_1$$

(у випадку простору Гільберта елемент $L^+ y$ серед усіх роз'язків має найменшу норму).

2) Сильні узагальнені розв'язки.

Розглянемо випадок, коли множина значень оператора L не є замкненою. Оскільки оператор L має (X,Y)-узагальнену L-допустиму пару, то для просторів B_1 та B_2 справедливий розклад (1).

Тоді ми можемо вести мову про сильний узагальнений розв'язок рівняння (2). Оскільки оператор $\overline{L}_X$ здійснює гомеоморфізм між просторами $\overline{X}$ та $\overline{R(L)}$, то коректним буде наступне означення.

Означення 4. *Елемент $\overline{L}_X^{-1} y$ будемо називати сильним узагальненим розв'язком рівняння (2), якщо $y \in \overline{R(L)}$.*

Тоді множина всіх сильних узагальнених розв'язків рівняння (2) буде мати вигляд

$$x = L^-_{X,Y} y + \mathcal{P}_{N(L)}c, \forall c \in B_1.$$

3) Узагальнені квазірозв'язки.

Розглянемо випадок, коли $y \notin \overline{R(L)}$. Для елемента y це рівносильно виконанню умови $\mathcal{P}_{N(L^*)}y \neq 0$. В цьому випадку сильних узагальнених розв'язків не існує, але існують такі елементи з $\overline{X}$, що є розв'язками варіаційної задачі $inf||\overline{L}x - y||_{B_2}$, де $\overline{L} = \overline{L}_{\overline{X}}\mathcal{P}_{\overline{X}}$ та інфінум береться по всім елементам $x \in \overline{X}$. Ці елементи і будемо називати узагальненими квазірозв'язками.

Означення 5. *Довільний елемент з множини $\{L^-_{X,Y} y + \mathcal{P}_{N(L)}c\}_{c \in B_1}$ будемо називати узагальненим квазірозв'язком рівняння (2).*

Зауваження 3. *Зазначимо, що якщо $R(L) = \overline{R(L)}$, то узагальнені квазірозв'язки співпадають зі звичайними квазірозв'язками.*

Зауваження 4. *Оператор $L^-_{X,Y}$ з означення 6 визначається не єдиним чином на відміну від оператора $\overline{L}^+$.*

Теорема 1. *Нехай для оператора L існує (X, Y) узагальнена L - допустима пара. Тоді рівняння (2) є завжди розв'язним.*

a) 1. Існують сильні узагальнені розв'язки рівняння (2) тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in B_2$ задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{N(L^*)}y = 0; \qquad (3)$$

якщо $y \in R(L)$, то отримані розв'язки будуть класичними;

2. Якщо умова (3) виконується, то множина сильних узагальнених розв'язків рівняння (2) буде мати вигляд

$$x = L^-_{X,Y}y + \mathcal{P}_{N(L)}c, \forall c \in B_1;$$

b) 1. Існують узагальнені квазірозв'язки рівняння (2) тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in B_2$ задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{N(L^*)}y \neq 0; \qquad (4)$$

2. Якщо умова (4) виконується, то множина узагальнених квазірозв'язків буде мати вигляд

$$x = L^-_{X,Y}y + \mathcal{P}_{N(L)}c, \forall c \in B_1.$$

Зауваження 5. *Якщо оператор L має вигляд $L = I - A$, де $||A^n|| \leq c, n \in \mathbb{N}, c = const > 0$, то основні твердження можуть бути уточненими. А саме: в роботі [11] показано, що в цьому випадку розв'язки рівняння (2) можна знаходити у вигляді узагальненого ряду Неймана.*

Автор вдячний професору Семенову В.В. за ряд цінних зауважень й цікавість до роботи.

Список використаних джерел

1. *Moore E.H.* On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix (Abstract) // Bull. Amer. Math. Soc. - 1920. - vol.26. - 394–395 p.
2. *Penrose R.A.* Generalized Inverse for Matrices // Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, vol. 51. - 406–413 p.
3. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. – VSP, Utrecht–Boston, 2004. – 317 p.
4. *Gohberg I.C., Krupnik N.Ya.* Introduction to the one-dimensional theory of singular integral operators. – Kishinev: Stiinca, 1973. - 426 p. (in Russian)
5. *Korolyuk V.S., Turbin A.F.* Mathematical foundations of complex phase of consolidation systems. – K: Naukova dumka, 1978. – 218 p. (in Russian)
6. *Trenogin V.A.* Functional analysis. - M.: Nauka, 1980. - 495 p. (in Russian)
7. *Antonevich A.B.* Bundle spaces and K-theory: first steps. Spectral and evolution problems, 2010, p.14 - 51. (in Russian)
8. *Klyushin D.A., Lyashko S.I., Nomirovskii D.A., Petunin Yu. I., Semenov V.V.* Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements. – Springer, 2012. – 202+xxi p.
9. *Deutch E.* Semi-inverses, reflexive semi-inverses, and pseudoinverses of an arbitrary linear transformation // Linear algebra and its applications, 1971, v.4. - p.313 - 322.
10. *Tihonov A.N., Arsenin V.Ya.* Methods for solving ill-posed problems. - M.:Nauka, 1979. - 285p. (in Russian)
11. *Pokutnyi A.A.* Development of the Neimann's series method of generalized invertibility on the spectrum of an operator in Banach and Frechet spaces // Reports of the NAS of Ukraine, 2013, No.1. - 19 - 23.

Надійшла до редколегії 25.03.2013