УДК 519.925.51

Рутицька В.В.[1], к.т.н.

Якісний аналіз розв'язків задач оптимального інвестування

Розглядається задача про аналіз якісних властивостей розв'язків задач оптимального інвестування у цінні папери.

Ключові слова: математична модель, стійкість розв'язків, інвестиційний портфель

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д
e-mail: vlarut@gmail.com

V.V. Rutytska[1], Ph.D.

Qualitative analysis of solutions of optimal investment problems

The problem of analysis of qualitative properties of optimal investment solutions for securities is investigated.

Key Words: mathematical model, stability of solutions,portfolio management

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d

e-mail: vlarut@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

При математичному моделюванні інвестиційних процесів розглядають статичні та динамічні постановки задач. Г. Марковиць розробив теорію, яка стала вже класичною, прийняття інвестиційних рішень для задач у статичній постановці. Сучасні підходи, спираючись на відомі результати, дають можливість розвинути арсенал математичних методів, що можуть бути застосовані при прийнятті інвестиційних рішень.

Статичні задачі у постановках Г. Марковиця відносять до задач нелінійного програмування, тому якісний аналіз оптимальних розв'язків пов'язаний з дослідженням збурених розв'язків задач нелінійного моделювання.

Нехай цільова функція $I = I(x)$ визначена у n- вимірному евклідовому просторі в точці x_0 і є диференційовною. При цьому необхідною умовою існування екстремуму є рівність нулю частинних похідних першого порядку

$$\psi_i(x) = \frac{\partial I(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Припустимо, що цільова функція залежить від скалярного параметра α : $I = I(x,\alpha)$. Очевидно, що і розв'язок x_0 є функцією цього параметра: $x_0 = x_0(\alpha)$, отже, його залежність від α, характеризується коефіцієнтами чутливості $\frac{dx_{0i}}{d\alpha}$, $i = \overline{1\ n}$. Необхідні умови екстремуму запишемо так $\psi_i(x,\alpha) = \frac{\partial I(x,\alpha)}{\partial x_i} = 0, \quad i \in \overline{1,n}.$

Нехай функції $\psi_i(x,\alpha), i = \overline{1,n}$ задовольняють умовам теореми про диференціювання неявних функцій [2], тобто функції $\psi_1,...,\psi_n$ визначені і неперервні в околі точки $(x_0,\ \alpha)$, існують неперервні в цій області частинні похідні: $\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}, \frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha}, i, j = \overline{1,n}$ та якобіан

$$J = \frac{D(\psi_1,...,\psi_n)}{D(x_1,...,x_n)} = \det\left\{\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}\right\}_{i,j=1}^{n}$$ в точці $(x_0,\ \alpha)$ відмінний від нуля.

Тоді, відповідно до теореми про диференціювання неявних функцій, існують неперервні коефіцієнти чутливості, що визначаються так:

$$\frac{dx_i}{d\alpha} = -\frac{\dfrac{D(\psi_1,...,\psi_n)}{D(x_1,...,x_{i-1},\alpha,x_{i+1},...,x_n)}}{\dfrac{D(\psi_1,...,\psi_n)}{D(x_1,...,x_n)}}.$$

Розглянемо задачу. Необхідно знайти екстремум цільової функції $I(x)$ при обмеженнях $f_i(x)=0, i=\overline{1,m}, \quad m\le n.$ Для розв'язання даної задачі уведемо множники Лагранжа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ та функцію Лагранжа

$$L(x,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=I(x)-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j f_j(x).$$

В цьому випадку необхідні умови екстремуму матимуть вигляд

$$\begin{cases}\dfrac{\partial I}{\partial x_i}-\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}=0, i=\overline{1,n},\\ f_j(x)=0,\ j=\overline{1,m}.\end{cases} \quad (1)$$

Нехай $I(x)$ та $f_i(x)=0, i=\overline{1,m}$ залежать від параметра α і існують похідні від відповідних функцій за α. Очевидно, що величини $x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m$, які задовольняють системі (1), будуть також залежати від параметра α. Уведемо позначення:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=\psi_i, i=\overline{1,n},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}=\psi_{n+j},\ j=\overline{1,m}.$$

Припустимо, що при $\alpha=\alpha_0$ якобіан $J=\dfrac{D(\psi_1,...,\psi_{n+m})}{D(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)}$ відмінний від нуля, тоді коефіцієнти чутливості в околі точки α_0 визначаються за формулами:

$$\frac{dx_i}{d\alpha}=-\frac{1}{J}*\frac{D(\psi_1,...,\psi_{n+m})}{D(x_1,...,x_{i-1},\alpha,x_{i+1},...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)},$$

$$\frac{d\lambda_j}{d\alpha}=-\frac{1}{J}*\frac{D(\psi_1,...,\psi_{n+m})}{D(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_{j-1},\alpha,\lambda_{j+1},,\lambda_m)},$$

$i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}.$

Розглянемо класичну задачу інвестиційного менеджменту: максимізувати очікувану прибутковість портфеля акцій для заданого рівня ризику. Запишемо цю задачу у векторно-матричному вигляді:

$$y^T m\to \max,$$

$$y^T V y=\tau.$$

Позначимо $y^T V y=I(y)$. Визначимо чутливість оптимальних вагових коефіцієнтів портфеля до варіації прибутковості деякої акції m_k при незмінному значенні рівня τ. У даному випадку розглянемо варіацію прибутковості акції m_n, $k=n$.

Запишемо функцію Лагранжа для даної задачі $L(y,\lambda)=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i m_i-\lambda(I(y)-\tau)$ та необхідні умови екстремуму

$$\begin{cases}m_i-\lambda\dfrac{\partial I}{\partial y_i}=0, i=\overline{1,n},\\ I(y)=\tau.\end{cases}$$

Продиференціювавши дану систему за m_n, одержимо:

$$\begin{cases}\lambda\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial^2 I}{\partial y_i\partial y_j}*\dfrac{\partial y_j}{\partial m_n}+\dfrac{\partial I}{\partial y_i}*\dfrac{\partial \lambda}{\partial m_n}=\begin{cases}0, i\ne n\\ 1, i=n\end{cases}, i\in\overline{1,n},\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial I}{\partial y_j}*\dfrac{\partial y_j}{\partial m_n}=0.\end{cases}$$

Розділимо перші n рівнянь даної системи на λ і запишемо у векторно-матричному вигляді систему $Ab=c$, де:

$$A=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{\partial I}{\partial y_1} & \dfrac{\partial I}{\partial y_n}\\ \dfrac{\partial I}{\partial y_1} & \dfrac{\partial^2 I}{\partial y_1^2} & \dfrac{\partial^2 I}{\partial y_1\partial y_n}\\ \dfrac{\partial I}{\partial y_n} & \dfrac{\partial^2 I}{\partial y_n\partial y_1} & \dfrac{\partial^2 I}{\partial y_n^2}\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\lambda}*\dfrac{\partial\lambda}{\partial m_n}\\ \dfrac{\partial y_1}{\partial m_n}\\ \dfrac{\partial y_n}{\partial m_n}\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \dfrac{1}{\lambda}\end{pmatrix}.$$

Ця система дозволяє знайти будь-який із коефіцієнтів чутливості $\dfrac{\partial y_i}{\partial m_n}, i=\overline{1,n}.$

Неважко бачити, що коефіцієнт $\dfrac{\partial y_n}{\partial m_n}$ можна знайти за формулою $\dfrac{\partial y_n}{\partial m_n}=\dfrac{1}{\lambda}*\dfrac{A_{n+1,n+1}}{\det A}$, де $A_{n+1,n+1}$ - алгебраїчне доповнення до елементу $\dfrac{\partial^2 I}{\partial y_n^2}$. При виконанні достатніх умов мінімуму $\dfrac{A_{n+1,n+1}}{\det A}<0$, з урахуванням того, що $\lambda>0$, одержимо коефіцієнт чутливості $\dfrac{\partial y_n}{\partial m_n}<0$.

Від'ємність його вказує, що при одному і тому ж рівні ризику τ із підвищенням прибутковості m_n, частку даного виду цінного паперу у складі портфеля слід збільшити.

Розглянемо тепер задачу мінімізації ризику портфеля цінних паперів для встановленої величини прибутковості

$I(y) \to \min,$

$y^T m = M.$

Функція Лагранжа буде мати такий вигляд

$$L(y,\lambda) = I(y) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} y_i m_i - M\right).$$

Запишемо необхідні умови екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial y_i} - \lambda m_i = 0, i = \overline{1,n}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i m_i - M = 0. \end{cases}$$

Розглянемо, як і у першому випадку, вплив малих змін прибутковості акції m_n на оптимальне рішення інвестора. Диференціюючи останню систему за m_n, отримаємо:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 I}{\partial y_i \partial y_j} * \dfrac{\partial y_j}{\partial m_n} + m_i * \dfrac{\partial \lambda}{\partial m_n} = \begin{cases} 0, i \neq n \\ \lambda, i = n \end{cases}, i \in \overline{1,n}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \dfrac{\partial y_i}{\partial m_n} + y_n = 0. \end{cases}$$

Запишемо систему алгебраїчних рівнянь $Ab = c$ для знаходження функцій чутливості. У даному випадку:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m_1 & m_n \\ m_1 & \dfrac{\partial^2 I}{\partial y_1^2} & \dfrac{\partial^2 I}{\partial y_1 \partial y_n} \\ m_n & \dfrac{\partial^2 I}{\partial y_n \partial y_1} & \dfrac{\partial^2 I}{\partial y_n^2} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda}{\partial m_n} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial m_n} \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial m_n} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -m_n \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Розв'язки цієї системи для будь-яких $i \in \overline{1,N}$ визначаються так:

$$\frac{\partial y_i}{\partial m_n} = \frac{1}{\det A} * (-m_n A_{1,n+1} + \lambda A_{n+1,n+1}),$$

де $A_{1,n+1}, A_{n+1,n+1}$ - алгебраїчні доповнення до елементів матриці А, які знаходяться на місцях $(1, n+1)$ та $(n+1, n+1)$.

Розглянемо математичну задачу про вплив варіації величини інвестованого капіталу M на оптимальне рішення інвестора щодо складу портфеля акцій. Для цього запишемо необхідні умови екстремуму і продиференціюємо систему за M:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 I}{\partial y_i \partial y_j} * \frac{\partial y_j}{\partial M} - m_i * \frac{\partial \lambda}{\partial M} = 0, i = \overline{1,n},$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i * \frac{\partial y_i}{\partial M} = 1,$$

$$b = \left(-\frac{\partial \lambda}{\partial M}, \frac{\partial y_1}{\partial M}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial M} \right)^T,$$

$c = (1, 0, \ldots 0)^T$.

Звідси $\dfrac{\partial y_i}{\partial M} = \dfrac{A_{1,i+1}}{\det A}, i \in \overline{1,n}.$

Порівнявши вирази для розв'язків у другому та третьому випадках, отримаємо:

$$\frac{\partial y_i}{\partial m_n} = -m_n \frac{\partial y_i}{\partial M} + \lambda \frac{A_{n+1,n+1}}{\det A}, i \in \overline{1,n}.$$

Дане співвідношення встановлює вплив зміни ринкових цін акцій на склад інвестиційних портфелів. Воно відповідає відомому у економіці рівнянню Слуцького, яке визначає вплив некомпенсованої зміни цін на попит для кожного виду продукції. Якщо $i = n$, то другий доданок у правій частині останнього рівняння буде пропорційним коефіцієнту чутливості $\dfrac{\partial y_i}{\partial m_n}$, який отримано в першій задачі. Тому для $i = n$ можемо записати:

$$\left(\frac{\partial y_n}{\partial m_n}\right)_{m_n} = -m_n \left(\frac{\partial y_n}{\partial M}\right)_M + \left(\frac{\partial y_n}{\partial m_n}\right)_{I=\tau}.$$

У даному співвідношенні індекси m_n, M, $I = \tau$ вказують на умови, при яких обчислюються відповідні коефіцієнти чутливості:

а) при варіації прибутковості цінного паперу m_n;

б) при зміні величини інвестованого капіталу M;

в) при зміні заданого рівня толерантності ризику τ.

Аналізуючи якісні характеристики розв'язків динамічних систем серед інших звернемо увагу на початкові умови та фазові обмеження [1], [3].

Розглянемо динаміку формування вартості акції i-го типу на фондовому ринку, $t \in [t_0, T]$ - термін утримання інвестиційного портфеля:

$$\frac{dr_i(t)}{dt} = (\alpha_{i1} SM_{index}(t) + \alpha_{i2} IDI(t)) r_i(t) + \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} r_i(t) + \xi_i(t), t \in [t_0, T].$$

Це лінійна система з нестаціонарними елементами на діагоналі.

У матричній формі математична модель формування вартості портфеля цінних паперів має вигляд [1]:

$$\frac{dr}{dt} = (B^{(1)} + b(t)\Lambda^{(1)} + c(t)\Lambda^{(2)})r + \xi(t), \quad t \in \left[t_0, T\right]. \tag{2}$$

Однорідна система матиме вигляд

$$\frac{dr}{dt} = (B^{(1)} + b(t)\Lambda^{(1)} + c(t)\Lambda^{(2)})r\,. \tag{3}$$

Позначимо: $\lambda = \left(\lambda^{(1)T},\ \lambda^{(2)T}\right)^T$ - об'єднаний вектор параметрів розмірності $2N$, де $\lambda^{(1)T} = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, ..., \alpha_{N1})$, $\lambda^{(2)T} = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, ..., \alpha_{N2})$.

Початкові умови $r(t_0, \lambda) = r_0(\lambda), t_0 = t_0(\lambda).$

У подальшому $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$ - N- вимірні вектори параметрів, які належать множині G_λ, $r(t,\alpha)$- вектор фазових координат розмірності N, $r_0(\lambda), t_0(\lambda)$ – неперервно-диференційовні функції.

При практичному інвестуванні у цінні папери на реальному ринку є сенс розглянути лінійні та нелінійні обмеження на фазові координати і параметри системи (2). Дані обмеження задаються інвестором згідно з рівнем його фінансових очікувань та толерантності щодо ризику [2].

Означення. Розрахункова вартість портфеля цінних паперів, визначена системою (3), буде мати $\left\{G_0^r, G_0^\lambda, \Phi_t, t_0, T\right\}$ – оцінку, якщо $r(t,\lambda) \in \Phi_t, t \in [t_0, T]$, для будь яких $r(t_0, \lambda) \in G_0^r$ та $\lambda \in G_0^\lambda$.

Тут Φ_t – допустима множина станів вектору r в момент $t \in [t_0, T]$ (тобто множина допустимих для інвестора значень вартості інвестиційного портфеля), G_0^r, G_0^λ- множини допустимих початкових станів та параметрів системи (3) відповідно.

Дослідження стійкості системи (3) проводиться за допомогою функцій типу Ляпунова [2] за умови їх однозначності та неперервності разом із частинними похідними на множинах визначення.

Критерій. Якщо для системи (3) існує додатно-визначена функція Ляпунова $V(r,t,\lambda)$, яка задовольняє співвідношенням

$$\left\{r : V(r,t,\lambda) < 1\right\} \subset \Phi_t, t \in [t_0, T], \lambda \in G_0^\lambda,$$

$$\frac{\partial V(r,t,\lambda)}{\partial t} + grad_r^T V(r,t,\lambda) * \left[(B^{(1)} + b(t)\Lambda^{(1)} + c(t)\Lambda^{(2)})r\right] \le 0$$

при $\left\{r : V(r,t,\lambda) < 1\right\}, t \in [t_0, T]$ для довільних $\lambda \in G_0^\lambda$,

$G_0^r \subset \left\{r : V(r(t_0,\lambda), t_0, \lambda) < 1\right\}$ для довільних $\lambda \in G_0^\lambda$,

то розрахункова вартість портфеля цінних паперів $r(t,\lambda)$ системи (3) буде мати $\left\{G_0^r, G_0^\lambda, \Phi_t, t_0, T\right\}$ – оцінку.

В роботі розглянуто застосування методів практичної стійкості до розв'язання задач інвестування у цінні папери. Задачі сформульовано для різного виду цільових функцій, початкових і фазових обмежень.

Список використаних джерел

1. Bublik B.N.,Garashchenko F.G., Kirichenko N.F. Structural and self-reactance optimization and stability of dynamics of bunches. -Kyiv, Naukova dumka, 1985. –304p. (in Russian).
2. Garashchenko F.G., Kulyan V.R., Rutitskaya V.V. Quality analysis of mathematical models of investment management. –Kyiv, //Cybernetics and computing engineering. – 2005. –N 148. –p.3-10. (in Russian).
3. Krylov I.A., Chernousko F.L. Algorithm of method of progressive approximations for the decision of optimal control problems. – Moskow, Nauka, 1971. –247p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 05.09.2013р.