

УДК 535.5:621.029.7

Слінченко Ю.А.<sup>1</sup>, к. ф.-м. н.

## Використання рівняння Гельмгольца дробового порядку для опису поширення електромагнітного випромінювання у оптичних хвилеводах

Показано, що за допомогою рівняння Гельмгольца дробового порядку можна описувати поширення електромагнітного випромінювання у оптичних хвилеводах. Такий підхід дозволяє математично адекватно та фізично замкнено враховувати дисипативні, поляризаційні та когерентні процеси у хвилеводних середовищах.

Ключові слова: рівняння Гельмгольца дробового порядку, електромагнітне випромінювання, оптичній хвилевід.

<sup>1</sup> Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г,  
e-mail: yas@univ.kiev.ua.

Slinchenko Y.A.<sup>1</sup>, Ph.D.

## Using the Helmholtz equation of fractional order to describe the propagation of electromagnetic radiation in the optical waveguides

It is shown possible to describe the propagation of electromagnetic radiation in the optical waveguides by using the Helmholtz equation of fractional order. The approach allows considering the dissipative, polarizational and coherent processes in waveguide environments mathematically adequately and physically closed.

Key Words: Helmholtz equation of fractional order, electromagnetic radiation, the optical waveguide.

<sup>1</sup> Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4g,  
e-mail: yas@univ.kiev.ua.

Статтю представив проф., д. ф.-м. н. Данилов В. В.

### Вступ

Для опису різних фізичних процесів часто використовуються методи дробового інтегродиференціювання [1]. Зокрема, за допомогою таких підходів розглядається багато електродинамічних задач, пов'язаних з поширенням електромагнітного випромінювання. Наприклад, в роботі [4] вивчаються поляризаційні властивості дробових електричних і магнітних полів, у [5] досліджується поширення НВЧ-хвиль у прямокутних хвилеводах, в роботі [6] за допомогою дробового хвильового рівняння проведено теоретичне та експериментальне обґрунтування фрактальності поширення електромагнітного випромінювання у різних поглинаючих та диспергуючих середовищах.

У даній роботі за допомогою рівняння Гельмгольца дробового порядку досліджується поширення електромагнітного випромінювання у волоконних світловодах (ВС) зі профілем показника заломлення (ППЗ) типу "сходінка" (однак, цей метод можливо поширити і на випадок довільного ППЗ). При цьому використовується диференційне рівняння

Гельмгольца з дробовою похідною Рімана – Ліувілля [1] тільки уздовж напрямку поширення електромагнітного випромінювання (вісі  $z$ ).

### Теорія

Розглянемо опис поширення електромагнітного випромінювання у ВС за допомогою рівняння Гельмгольца дробового порядку.

У результаті узагальнення звичайного рівняння Гельмгольца [2] отримуємо наступне дробове рівняння Гельмгольца для поздовжньої складової електричного поля  $E_{z0j}(\rho, \eta)$  (для зручності будуть розглядатися лише вісесиметричні  $TM_{0j}$ -моди)

$$\left[ \Delta_{\rho} + \frac{1}{l^2} D_{\eta}^{\alpha} + n(\rho)^2 k^2 \right] E_{z0j}(\vec{\rho}, \eta) = 0, \quad (1)$$

де  $\Delta_{\rho} = \partial(\rho\partial/\partial\rho)/\rho\partial\rho$ ,

$${}_0D_\eta^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \frac{f(y)dy}{(x-y)^{\alpha-1}} - \text{дробова}$$

похідна Римана-Ліувілля порядку  $\alpha$  ( $1 < \alpha \leq 2$ ) [1],  $k = \omega/c$ ,  $\eta = z/l$ ,  $l$  - довжина хвилевого середовища. При цьому функцію  $n(\rho)$  для показника заломлення (ПЗ) задаємо у вигляді

$$n(\rho) = n_1 \theta(a - \rho) + n_2 \theta(\rho - a), \quad (2)$$

де  $a$  - радіус серцевини,  $n_1$  - ПЗ серцевини,  $n_2$  - ПЗ оболонки,  $\theta(x)$  - сходинова функція Хевісайда, відповідно дослідження проводимо на прикладі ВС з сходиновим ПЗ.

Далі рівняння (1) розв'язуємо методом розділення змінних, тобто представляємо електричне поле у вигляді  $E_{z0j}(\rho, \eta) = e_{z0j}(\rho) \zeta_j(\eta)$  і з урахуванням (2) знаходимо рівняння для поздовжньої компоненти електричного поля всередині серцевини

$$(a^2 \Delta_\rho + U_j^2) e_{z0j}^{(1)}(\rho) = 0, \quad (3)$$

(де  $U_j = a(k^2 n_1^2 - \beta_j^2)^{1/2}$  - безрозмірний параметр моди в серцевині ВС,  $\beta_j$  - постійна поширення або власне значення  $j$ -ї моди) та у оболонці

$$(a^2 \Delta_\rho - W_j^2) e_{z0j}^{(2)}(\rho) = 0, \quad (4)$$

де  $W_j = a(\beta_j^2 - k^2 n_2^2)^{1/2}$  безрозмірний параметр моди у оболонці ВС. При цьому приходимо до наступної задачі Коші для функції  $\zeta(\eta)$

$$\begin{aligned} {}_0D_\eta^\alpha \zeta_j(\eta) + \beta_j^2 l^2 \zeta_j(\eta) &= 0, \\ {}_0D_\eta^{\alpha-1} \zeta_j(0) &= i\beta_j l, \\ {}_0D_\eta^{\alpha-2} \zeta_j(0) &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Тут початкові умови узгоджені з початковими умовами, що впливають з фундаментального розв'язку  $\zeta_j(\eta) = \exp(i\beta_j l \eta)$  рівняння (1) при  $\gamma = 2$ .

Розв'язки рівнянь (3) та (4) для ВС детально аналізуються у [2], а розв'язок (5), як впливає з [1], записується у вигляді

$$\zeta_j(\eta) = i\beta_j l \eta^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\beta_j^2 l^2 \eta^\alpha) + \eta^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}(-\beta_j^2 l^2 \eta^\alpha), \quad (6)$$

де  $E_{\alpha,\sigma}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \sigma)}$  - функція Міттаг-

Леффлера [1]. Легко показати, що розв'язок (6) при  $\gamma \rightarrow 2$  зводиться до функції  $\zeta_j(\eta) = \exp(i\beta_j l \eta)$ . При цьому, як зазначено у роботі [6], необхідно надалі користуватися не розв'язком (6), а функцією

$$f_j(\eta) = {}_0D_\eta^{\alpha-2} \zeta_j(\eta) = i\beta_j l \eta E_{\alpha,2}(-\beta_j^2 l^2 \eta^\alpha) + E_{\alpha,1}(-\beta_j^2 l^2 \eta^\alpha), \quad (7)$$

Разом з тим легко показати, що функція (7) є розв'язком наступної задачі Коші

$$\begin{aligned} {}_0^C D_\eta^\alpha f_j(\eta) + \beta_j^2 l^2 f_j(\eta) &= 0 \\ f_j'(0) &= i\beta_j l \\ f_j(0) &= 1 \end{aligned} \quad (8)$$

де  ${}_0^C D_x^\alpha$  - оператор дробової похідної Капуто, дія якого на довільну функцію  $f(x)$  записується у вигляді [7]

$$\begin{aligned} {}_0^C D_x^\alpha f(x) &= {}_0I_x^{2-\alpha} {}_0D_x^2 f(x) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x \frac{dy}{(x-y)^{\alpha-1}} \frac{d^2 f(y)}{dy^2} = \\ &= {}_0D_x^\alpha f(x) - \frac{f(0)}{x^\alpha \Gamma(1-\alpha)} - \frac{f'(0)}{x^{\alpha-1} \Gamma(2-\alpha)} \end{aligned} \quad (9)$$

Таким чином, об'єднуючи розв'язки рівнянь (3) та (4) з (7), отримуємо наступний вираз для  $j$ -ї моди поздовжньої компоненти електричного поля

$$E_{z0j}(\rho, \eta) = [AJ_0 \left( U_j \frac{\rho}{a} \right) \theta(a - \rho) + BK_0 \left( W_j \frac{\rho}{a} \right) \theta(\rho - a)] \cdot [i\beta_j l \eta E_{\alpha,2} \cdot (-\beta_j^2 l^2 \eta^\alpha) + E_{\alpha,1} (-\beta_j^2 l^2 \eta^\alpha)] \quad (10)$$

де  $A, B$  - деякі сталі,  $J_0(x)$  та  $K_0(x)$  - відповідно функції Бесселя та Макдональда нульового порядку. Використовуючи (10), розраховуємо ненульові у цьому випадку поперечні компоненти електричного  $E_{\rho 0j}$  та

магнітного  $H_{\phi 0j}$  полів у відповідності з

$$\text{формулами} \quad E_\rho = \frac{i\beta}{p} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \quad \text{та}$$

$$H_\phi = \frac{ikn^2}{p} \left( \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}, \quad \text{де} \quad p = k^2 n^2 - \beta^2, \quad \text{а}$$

$\varepsilon_0$  та  $\mu_0$  - відповідно електрична та магнітна проникність вільного простору [2]. Потім з умов неперервності мод  $E_{z0j}$  та  $H_{\phi 0j}$  при  $\rho = a$  отримуємо наступне характеристичне рівняння [2]

$$\frac{n_1^2 J_1(U)}{U J_0(U)} + \frac{n_2^2 K_1(W)}{W K_0(W)} = 0, \quad (11)$$

де  $J_1(x)$  та  $K_1(x)$  - відповідно функції Бесселя та Макдональда першого порядку.

Графічний розв'язок рівняння (11) для значень  $n_1 = 1,5$ ,  $n_2 = 1$ ,  $a = 1$  мкм та  $\lambda = 1,55$  мкм наведено на рис. 1, де

$$F(\beta) = \frac{n_1^2 J_1[U(\beta)]}{U(\beta) J_0[U(\beta)]} + \frac{n_2^2 K_1[W(\beta)]}{W(\beta) K_0[W(\beta)]}.$$

У цьому випадку існують дві моди з постійними поширення  $\beta_1 \approx 5,074$  мкм<sup>-1</sup> та

$\beta_2 \approx 5,585$  мкм<sup>-1</sup> (на рис.1 вони схематично позначені чорними кружками). Потужність випромінювання, що поширюється по ВС, для кожної з цих мод можна розрахувати [2]

$$P_{0j}(\eta) = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \rho d\rho E_{\rho 0j} H_{\phi 0j}^* \right\}. \quad (12)$$

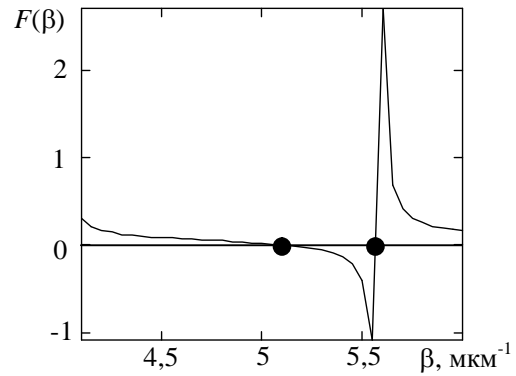


Рис. 1. Графік функції  $F(\beta)$ .

І, нарешті, на основі виразу (12) можна ввести функцію затухання

$$L_{0j}(\eta) = -10 \lg \left( \frac{P_{0j}(\eta)}{P_{0j}(0)} \right) = -20 \lg |f_j(\eta)|, \quad (13)$$

яка вимірюється у дБ/км.

Дослідимо тепер залежність (13) для ВС довжиною  $l = 1$  км та з параметрами наведеними вище. При цьому необхідно скористатися необхідним у даному випадку асимптотичним (при  $|z| \ll 1$ ) виразом для функції Міттаг-Леффлера [3]

$$E_{\alpha, \sigma}(z) = \frac{z^{(1-\sigma)/\alpha}}{\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\sigma - \alpha k)} + O(|z|^{-1-p}).$$

При припущенні, що затухання для такого ВС не повинно перевищувати значення 0,1 дБ/км для обох існуючих мод, отримуємо наступну величину для показника дробової похідної Капуто  $\alpha = 2 - 10^{-12}$ . Для цього значення на рис.2 суцільною лінією зображено графік функції (13) для першої моди (з  $\beta_1$ ), а пунктирною - для другої моди (з  $\beta_2$ ).

Таким чином, в залежності від значень фізичних та геометричних параметрів ВС може реалізовуватися як одномодовий, так і багатомодовий режими поширення поширення електромагнітного випромінювання. При цьому за допомогою формули (11) для кожної моди визначаються сталі поширення, а з допомогою виразу (13) аналізується процес затухання кожної

моди. Потрібно також зазначити, що на відміну від врахування згасання при традиційному підході, коли виконується лише штучна заміна дійсних постійних поширення  $\beta_j$  на комплексні величини  $\beta_j = \beta'_j + i\beta''_j$ , з допомогою дробового інтегро-диференціювання згасання описується природнім шляхом на основі розв'язку дробового рівняння Гельмгольца (1).

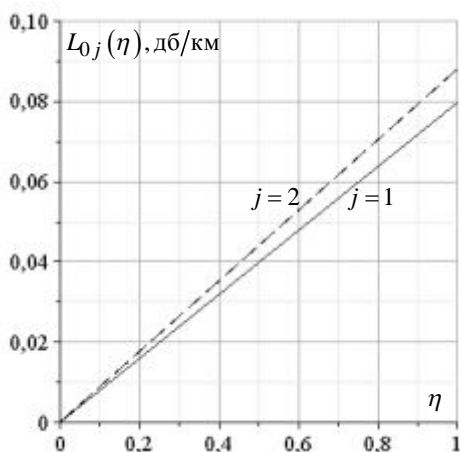


Рис. 2. Графіки функцій згасання  $L_{0j}(\eta) = -20 \lg |f_j(\eta)|$  відповідно для першої ( $j=1$ ) та другої ( $j=2$ ) мод, що виникають при поширенні електромагнітного випромінювання з

$\lambda = 1,55 \text{ мкм}$  у світловоді з східчастим профілем показника заломлення з параметрами  $n_1 = 1,5$ ,  $n_2 = 1$  та  $a = 1 \text{ мкм}$ .

## Висновки

Таким чином, в роботі виконано послідовний опис ВС зі східчастим ППЗ за допомогою дробового інтегро-диференціювання, тобто наведено розв'язок рівняння Гельмгольца з дробовою похідною вздовж вісі  $z$  для вісесиметричних  $\text{TM}_{0j}$ -мод, розв'язане характеристичне рівняння для конкретного випадку, досліджено згасання потужності випромінювання мод, що виникають.

Слід зазначити, що апарат дробового інтегро-диференціювання дозволяє адекватно описувати і більш складні волоконні структури, досліджуючи при цьому не лише процеси дисипації, але й різноманітні поляризаційні і когерентні ефекти. При цьому, природно необхідно використовувати дробові похідні не тільки вздовж напрямку поширення випромінювання, а й для змінних  $\rho$  та  $\varphi$ .

## Список використаних джерел

1. Samko S. G. Integrals and derivatives of fraction order and some their approximations / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. – Minsk: Science and technics, 1987. – 688 p. (in Russian).
2. Snyder A. Optical waveguide theory / A. Snyder, J. Love. – Moscow : Radio and communication, 1987. – 656 p. (in Russian).
3. Drjbashan M. M. Integral transforms and representations of functions in the complex domain / Drjbashan M. M. – Moscow : Science, 1966. – 672 p. (in Russian).
4. Ivahnichenko M. V. The polarization properties of fractional fields / M. V. Ivahnichenko // Radiophysics and electronics. – 2007. – 12, № 2. – P. 328–334. (in Russian).
5. Hussain A. Fractional curl operator and fractional waveguides / A. Hussain, S. Ishfaq, Q. A. Naqvi // PIER. – 2006. – 63. – P. 319–355.
6. Maksyuta N. V. Theoretical and experimental justification for the fractal distribution of electromagnetic radiation / N. V. Maksyuta, O. I. Barchuk, T. V. Rodionova, L. N. Maksyuta // Surface. – 2008. – № 4. – P. 1–7. (in Russian).
7. Caputo M. Linear models of dissipation in inelastic solids / M. Caputo, F. Mainardi // inelastic solids. Riv Nuovo Cimento. – 1971. – II, № 1. – P. 161–198.

Надійшла до редколегії 13.07.13