УДК 517.5

О. О. Курченко[1], *д.ф.-м.н., професор*

Аналог сталої Ойлера для функції двох змінних

Для функції $f \in C\left([1,+\infty)^2\right)$ наведені умови збіжності двоіндексної послідовності

$$a_{nm}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(k,j)-\int\limits_{1}^{n+1}du\int\limits_{1}^{m+1}f(u,v)\,dv$$

до сталої при $n,m\to\infty$.

Ключові слова: збіжність, стала Ойлера.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64, e-mail: olkurchenko@ukr.net.

O. O. Kurchenko[1], *D.Sci. (Phys.-Math.), Full Professor*

Analogy of Euler constant for the function of two variables

The conditions on the function $f \in C\left([1,+\infty)^2\right)$ for the convergence of the tvo-index sequence

$$a_{nm}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(k,j)-\int\limits_{1}^{n+1}du\int\limits_{1}^{m+1}f(u,v)\,dv$$

to the constant as $n,m\to\infty$ are obtained.

Key Words: convergence, Euler constant.

[1]National Taras Shevchenko University of Kyiv, 01033, Kyiv, vul.Volodymyrska, 64, e-mail: olkurchenko@ukr.net.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

Вступ

Стала Ойлера визначається як границя різниці n–тої часткової суми гармонічного ряду та натурального логарифма n

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=$$
$$=0,577215\ldots$$

Цю сталу Леонард Ойлер отримав у 1735 році. Італійський математик Лоренцо Маскероні у 1790 році обчислив наближене значення цієї сталої з точністю до 10^{-32}. Стала Ойлера зустрічається в багатьох формулах математичного аналізу та його застосувань і належить до визначних математичних сталих. Актуальними є дослідження раціональних апроксимацій сталої Ойлера [1]. У роботі [2] методом зустрічних послідовностей доведена збіжність та оцінена швидкість збіжності послідовності

$$b_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)-\int\limits_{1}^{n}f(u)\,du,\quad(1)$$

де $f(x), x\geqslant 1$ — неперервна і незростаюча на проміжку $[1,+\infty)$ збіжна до нуля при $x\to+\infty$ дійсна функція.

Для дійсної невід'ємної функції двох змінних $f(x,y), x,y\geqslant 1$, неперервної на множині визначення, розглянемо двоіндексну послідовність

$$a_{nm}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(k,j)-\int\limits_{1}^{n+1}du\int\limits_{1}^{m+1}f(u,v)\,dv,\quad(2)$$

$n,m\in\mathbb{N}$.

У цій статті наведені достатні умови збіжності двоіндексної послідовності (2). Отримані результати можуть бути застосовані для оцінки похибки наближення часткових сум подвійних рядів подвійними інтегралами.

Основна частина

Нехай дійсна фукція двох змінних $f(x,y), x,y\geqslant 1$ неперервна на множині визначення. Для натуральних чисел k,j через $\omega_{kj}(f)$

позначимо коливання функції f на квадраті $[k, k+1] \times [j, j+1]$:

$$\omega_{kj}(f) = \sup_{k \leqslant x,s \leqslant k+1, j \leqslant y,t \leqslant j+1} |f(x,y) - f(s,t)|.$$

Теорема 1. *Нехай для дійсної функції $f \in C\left([1,+\infty)^2\right)$ подвійний ряд*

$$\sum_{k,j=1}^{\infty} \omega_{kj}(f) \tag{3}$$

збіжний. Тоді двоіндексна послідовність (2) має скінченну границю при $\gamma(f) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n,m\to\infty} a_{nm}$.

Доведення. Для довільних натуральних чисел n, m маємо:

$$a_{nm} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(k,j) - \int\limits_{1}^{n+1} du \int\limits_{1}^{m+1} f(u,v)\, dv =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{k}^{k+1} du \int\limits_{j}^{j+1} \left(f(k,j) - f(u,v)\right) dv.$$

Таким чином, a_{nm} є частковою сумою подвійного ряду

$$\sum_{k,j=1}^{\infty} \int\limits_{k}^{k+1} du \int\limits_{j}^{j+1} \left(f(k,j) - f(u,v)\right) dv \tag{4}$$

Оскільки для довільних $k, j \geqslant 1$ справджується нерівність

$$\left| \int\limits_{k}^{k+1} du \int\limits_{j}^{j+1} \left(f(k,j) - f(u,v)\right) dv \right| \leqslant \omega_{kj}(f),$$

а ряд (3) збіжний, то подвійний ряд (4) збіжний, звідки випливає існування скінченної границі $\lim_{n,m\to\infty} a_{nm}$. Теорема доведена. □

П р и к л а д. Нехай

$$f(x,y) = \frac{\cos \pi x \cos \pi y}{(x+y)^{\alpha}};\ x, y \geqslant 1$$

де $\alpha > 2$. Для довільних натуральних чисел k, j справджується нерівність $0 \leqslant \omega_{kj} \leqslant 2\,(k+j)^{-\alpha}$, а подвійний ряд

$$\sum_{k,j=1}^{\infty} (k+j)^{-\alpha}$$

збіжний. Тому подвійний ряд $\sum_{k,j=1}^{\infty} \omega_{kj}(f)$ збіжний і, внаслідок теореми 1, двоіндексна послідовність (2) збіжна.

Лема 1. *Нехай двоіндексна послідовність (d_{nm}) неспадна (незростаюча) по кожному індексу при фіксованому іншому і обмежена зверху (знизу). Тоді ця послідовність має скінченну границю при $n, m \to \infty$.*

Доведення. Розглянемо випадок неспадної по кожному індексу при фіксованому іншому і обмеженої зверху двоіндексної послідовності (d_{nm}). Тоді послідовність (d_{nn}) неспадна і обмежена зверху. Тому існує скінченна границя

$$d = \lim_{n\to\infty} d_{nn}. \tag{5}$$

За означенням границі послідовності, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n \geqslant n_0$ справджується ланцюжок нерівностей $d - \varepsilon < d_{nn} \leqslant d$. Внаслідок того, що послідовність (d_{nm}) неспадна по кожному індексу при фіксованому іншому, для довільних натуральних $n, m \geqslant n_0$ при $m \geqslant n$ маємо

$$d - \varepsilon < d_{nn} \leqslant d_{nm} \leqslant d_{mm} \leqslant d.$$

Отже, $\lim_{n,m\to\infty} d_{nm} = d$. Випадок незростаючої по кожному індексу при фіксованому іншому і обмеженої знизу двоіндексної послідовності розглядається аналогічно. Лема доведена. □

Теорема 2. *Нехай невід'ємна неперервна на множині визначення функція $f(x,y); x, y \geqslant 1$ задовольняє такі умови:*

1) *функція f незростаюча по кожній змінній при фіксованій іншій;*

2) *ряди $\sum_{k=1}^{\infty} f(k,1)$, $\sum_{j=1}^{\infty} f(1,j)$ збіжні.*

Тоді двоіндексна послідовність (2) збіжна.

Доведення. Доведемо, що двоіндексна послідовність (2) неспадна по кожному індексу при фіксованому іншому. Для довільних натуральних чисел n, m маємо:

$$a_{(n+1)m} - a_{nm} = \sum_{j=1}^{m} f(n+1,j) -$$

$$\int\limits_{n+1}^{n+2} dx \int\limits_{1}^{m+1} f(x,y)\, dy =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{n+1}^{n+2} dx \int\limits_{j}^{j+1} \Big(f(n+1,j) - f(x,y)\Big)\, dy \geqslant 0,$$

оскільки для довільної точки $(x, y) \in [n+1, n+2] \times [j, j+1]$ справджується нерівність $f(n+1, j) \geqslant f(x, y)$. Аналогічно, $a_{n(m+1)} - a_{nm} \geqslant 0$. Встановимо обмеженість зверху послідовності (2). Для довільних натуральних чисел n, m маємо:

$$a_{nm} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{k}^{k+1} dx \int\limits_{j}^{j+1} \Big(f(k,j) - f(x,y)\Big)\, dy$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Big(f(k,j) - f(k+1,j+1)\Big) =$$

$$= \sum_{k=2}^{n}\bigg(\Big(f(k,1) - f(k,m+1)\Big) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{m}\Big(f(1,j) - f(n+1,j)\Big)\bigg) + f(1,1) -$$

$$- f(n+1,m+1) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(k,1) + \sum_{j=1}^{\infty} f(1,j),$$

звідки завдяки умові 2) випливає обмеженість зверху двоіндексної послідовності (2). Внаслідок леми 1, послідовність (2) збіжна. Теорема доведена. □

П р и к л а д. Функція

$$f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2};\ x, y \geqslant 1$$

задовольняє умови теореми 2. Внаслідок цієї теореми, двоіндексна послідовність

$$a_{nm} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(k+j)^{-2} - \int\limits_{1}^{n+1} dx \int\limits_{1}^{m+1} (x+y)^{-2}\, dy$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(k+j)^{-2} - \ln\frac{(n+2)(m+2)}{2(n+m+2)}$$

збіжна.

П р и к л а д. Функція

$$f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^{\alpha}};\ x, y \geqslant 1,$$

де параметр $\alpha > 1, \alpha \neq 2$, задовольняє умови теореми 2. Внаслідок цієї теореми, двоіндексна послідовність

$$a_{nm} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(k+j)^{-\alpha} - \int\limits_{1}^{n+1} dx \int\limits_{1}^{m+1} (x+y)^{-\alpha}\, dy$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(k+j)^{-\alpha} - \frac{1}{(2-\alpha)(1-\alpha)} \times$$

$$\times \Big((n+m+2)^{2-\alpha} - (m+2)^{2-\alpha} -$$

$$-(n+2)^{2-\alpha} + 2^{2-\alpha}\Big)$$

збіжна. Границю цієї послідовності позначимо через $c(\alpha)$. Цікаво дослідити функцію $c(\alpha)$, $\alpha > 1$.

Висновки

Для функції двох змінних $f(x, y)$, $x, y \geqslant 1$, монотонної по кожній змінній при фіксованій іншій, знайдені умови збіжності двоіндексної послідовності (2) до сталої при $n, m \to \infty$, що є аналогом збіжності послідовності (1) у випадку функції однієї змінної.

Отримані результати можуть бути застосовані для оцінки похибки наближення часткових сум подвійних рядів подвійними інтегралами.

Список використаних джерел

1. *Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения*, Сборник статей, Совр. пробл. Матем., 9, ред. А.И.Аптекарев, МИАН, М. 2007, 84 с.

2. *Курченко О.О.* Аналог сталої Ойлера для монотонної, збіжної до нуля функції / О. О. Курченко // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, сер. фізико-математичні науки. – 2011. – Вип. 4– С.26-29.

Надійшла до редколегії 28.02.2013