Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки
2014, 1
Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 517.95:519.63

Вакал Є.С.[1], к.ф.-м.н., доц.,
Вакал Ю.Є.[1], к.ф.-м.н.,
Стеля О.Б.[1], к.ф.-м.н., доц.

Дослідження процесів вологопереносу в неоднорідних середовищах із слабко проникними прошарками

Розглянуто профільну модель вологопереносу для неоднорідно-шаруватих середовищ з тонкими слабко проникними прошарками. Математичну модель сформульовано як крайову задачу для нелінійного рівняння параболічного типу зі спеціальними умовами спряження в області прямокутної форми. Досліджено вплив прошарків на конфігурацію вільної поверхні підземних вод та розподіл напорів у ґрунті.

Ключові слова: слабко проникні прошарки, умови спряження, метод Ньютона – ПВР.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: jvakal@gmail.com

E. S. Vakal[1], Associate Professor,
Yu. E. Vakal[1], Ph.D.,
O. B. Stelya[1], Associate Professor.

The study of moisture transfer in heterogeneous environments with weakly permeable layers

The profile moisture transfer model for heterogeneously-layered environments with thin weakly permeable layers is considered. The mathematical model is formulated as a boundary value problem for a nonlinear parabolic equation with special coupling conditions in the areas of rectangular shape. The effect of layers on the configuration of the free surface of groundwater and distribution of soil water pressures is investigated.

Key words: weakly permeable layers, coupling conditions, Newton – SOR method.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: jvakal@gmail.com

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н. Перестюк М.О.

1. Вступ

Крайові задачі для рівнянь в частинних похідних зі спеціальними умовами спряження описують різноманітні фізичні процеси, що протікають в неоднорідних середовищах. Так, в моделі неідеального контакту вважається, що потоки речовини при переході через границю поділу середовищ залишаються неперервними, проте шуканий розв'язок стає розривним. В роботах [1–3] наведена математична постановка задачі про кристалізацію металів з неідеальним тепловим контактом. Еліптичні крайові задачі з зазначеними умовами спряження вивчаються в [4–6]. Ґрунтуючись на класичному формулюванні задачі, в [10–13] отримані і досліджені варіаційно-різницеві схеми для задач теплопровідності з розривним розв'язком. В [14–16] побудовані однорідні різницеві схеми для рівняння теплопровідності в багатошаровому середовищі з неідеальним тепловим контактом. В [7–8] наведені узагальнені формулювання лінійної задачі тепломасопереносу зі спеціальними умовами спряження.

В роботах [17–20] використана модель з умовами неідеального контакту для розв'язання задач підземного вологопереносу в областях з тонкими слабко проникними прошарками, що описуються нелінійними параболічними рівняннями. Дана стаття присвячена подальшому дослідженню процесів вологопереносу з метою виявлення впливу на них подібних включень.

2. Постановка задачі

Процеси вологопереносу відбуваються найчастіше в режимі неповного насичення або взаємодії насиченої та ненасиченої зон і можуть бути описані у двовимірній постановці рівнянням

$$\frac{\partial \theta(x,u)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + f(x,u), \quad (1)$$

$$(x,t) \in Q_T = Q \times (0,T],$$

де $v_i = -k(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ – компоненти вектора швидкості вологопереносу, $u(x, t)$ – напір рідини, $\theta(x,u)$ – об'ємна вологість ґрунту (пористість у зоні повного насичення), $k(x,u)$ – коефіцієнт вологопровідності (коефіцієнт фільтрації в зоні повного насичення), $f(x,u)$ – функція внутрішніх джерел в області Ω, $x=(x_1, x_2)$ – точка області Ω, x_i, $i=1,2$ – горизонтальна і вертикальна координата, t – час.

В залежності від конкретних фізичних умов на межі розглядуваної області задаються крайові умови першого, другого або третього роду.

Крайові умови передбачають можливість подачі води на поверхню ґрунту, випаровування і інфільтрацію, відтік води у нижчі горизонти, підпір ґрунтовими водами, наявність водоупору.

Рівняння (1) інтегрується при початкових умовах

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\overline{\Omega}. \qquad (2)$$

На межах поділу шарів з різними гідродинамічними характеристиками задаються умови спряження, що виражають неперервність напорів і потоків вологи. Надалі будемо розглядати ситуацію, коли в ґрунті містяться слабко проникні прошарки малої товщини. У цьому випадку при побудові різницевої задачі виникає необхідність використання сіток з малими відстанями між вузлами, розміщеними в зоні розташування прошарків. Щоб уникнути невиправданого подрібнення різницевої сітки, використовуємо підхід, згідно якому прошарки виключаються з розгляду, а на отриманих границях поділу шарів задаються умови спряження типу неідеального контакту

$$\alpha\left(u\big|_{\gamma+0}-u\big|_{\gamma-0}\right)=k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\gamma-0},\ k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\gamma-0}=k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\gamma+0}, \qquad (3)$$

де γ – лінія, що моделює прошарок, α – коефіцієнт вологопередачі через прошарок, $\vec{n}$ – нормаль до γ.

3. Метод розв'язання задачі

Крайові задачі для рівняння (1) з початковими умовами (2), умовами спряження (3) і відповідними крайовими умовами розв'язуються за допомогою методу скінченних різниць. Область $\overline{Q_T}$ покривається різницевою сіткою $\overline{\omega}_{h_1h_2\tau}$. Інтегро-інтерполяційним методом побудована різницева схема для рівняння (1)

$$Q_{\bar{t}}(y)=\sum_{\alpha=1}^{2}\left(a_\alpha(y)y_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha}+\varphi. \qquad (4)$$

В (4) Q, y, a_i, φ – різницеві аналоги функцій θ, u, k, f.

Похибка апроксимації схеми (4) дорівнює $O\left(\tau+h_1^2+h_2^2\right)$. Крайові умови і умови спряження апроксимуються з другим порядком по просторових змінних аналогічно [19].

Приєднуючи до рівняння (4) різницеві апроксимації умов спряження, крайових і початкових умов, отримуємо нелінійну систему різницевих рівнянь, яку розв'язуємо за допомогою блочного методу Ньютона – послідовної верхньої релаксації [9].

4. Результати чисельних розрахунків

Розроблені чисельні алгоритми застосовано до розв'язання двовимірних задач вологопереносу при зрошенні посушливих, промиванні засолених, осушенні перезволожених земель з використанням систематичного горизонтального дренажу. Для прикладу розглянемо промивки повністю насиченого ґрунту глибини M, що лежить на непроникній основі. Припускаємо, що горизонтальні закриті дренажні труби діаметром $d_д$ заглиблені на величину $b_д$ і знаходяться одна від одної на відстані L.

Розв'яжемо задачу для однорідного ґрунту потужності $M=10\,\text{м}$ з коефіцієнтом фільтрації $k(x)=0.2\,\text{м/доба}$, що містить прошарок з $k(x)=0.01\,\text{м/доба}$ товщини $\delta=0.15\,\text{м}$ на глибині від 2 до 2.15 м. Дрени повністю заповнені вологою, $b_д=2.75\,\text{м}$, $d_д=0.15\,\text{м}$, $L=20\,\text{м}$. На поверхні ґрунту задана величина напору, рівна 0.15 м, джерела відсутні. Отримані результати показують, що при переході через прошарок лінії рівного напору заломлюються. У верхніх шарах ґрунту вони паралельні еквіпотенціальній лінії від міждрення в напрямку до дрени для $x_1\le 6$ м. Витрати речовини в дрену склали $0.567\,\text{м}^3/\text{доба}$.

Далі вивчався вплив прошарку на величину витрат в дрену. Розглядалася задача для однорідного ґрунту, а також ґрунту, що містить прошарок на глибині від 5 до 5.15 м. У випадку розташування прошарку нижче дрени витрати рідини в дрену склали $0.819\,\text{м}^3/\text{доба}$, що більше аналогічних витрат у випадку однорідного ґрунту, рівних $0.807\,\text{м}^3/\text{доба}$, лише на 0.5 %. Зі зменшенням коефіцієнта фільтрації прошарку витрати рідини в дрену незначно спадають.

Якщо прошарок розташований на глибині 2–2.15 м, то витрати рідини в дрену менші аналогічних витрат у випадку однорідного ґрунту на 30 %.

Таким чином, аналіз роботи дренажу в

шаруватих середовищах свідчить про те, що слабко проникний тонкий прошарок в залежності від розташування може істотно впливати на роботу дренажу. При достатньо глибокому заляганні вплив такого прошарку стає незначним, і його можна вважати непроникним.

Наведемо результати розрахунків вологопереносу при осушенні повністю насиченого ґрунту. В початковий момент часу рівень ґрунтових вод лежить на поверхні. Для його зниження використовується горизонтальний дренаж. Діаметр дрени, глибина залягання, міждренна відстань, потужність ґрунту вибираються тими ж самими, що і в описаній вище задачі напірної фільтрації. На поверхні задається випаровування інтенсивності $0.0005\,\text{м/доба}$. Об'ємна вологість ґрунту і коефіцієнт вологопровідності задавались за формулами $\theta(x,u)=0.25+0.23\exp((u+x_2)/1.5)$ і $k(x,u)=k(x)\exp(3.5(u+x_2)/1.5)$ відповідно, де коефіцієнт фільтрації ґрунту $k(x)=0.2\,\text{м/доба}$.

Початковий розподіл напору визначався з відповідної напірної фільтраційної задачі, коли на поверхні ґрунту задавався нульовий напір.

Розглядалися три варіанти будови ґрунту. Для першого з них припускалося, що ґрунт містить прошарок на глибині $2-2.15$ м. У цьому випадку ізолінії напору спрямовані від поверхні ґрунту в глибину, зазнаючи заломлення при переході через лінію $x_2=2$ м, що моделює прошарок.

Дана задача розв'язувалася також для однорідного ґрунту (2 варіант) і ґрунту з прошарком на глибині від 5 до 5.15 м (3 варіант). На рис. 1 зображено зниження з часом точки виходу вільної поверхні на міждренні для різних варіантів будови ґрунту.

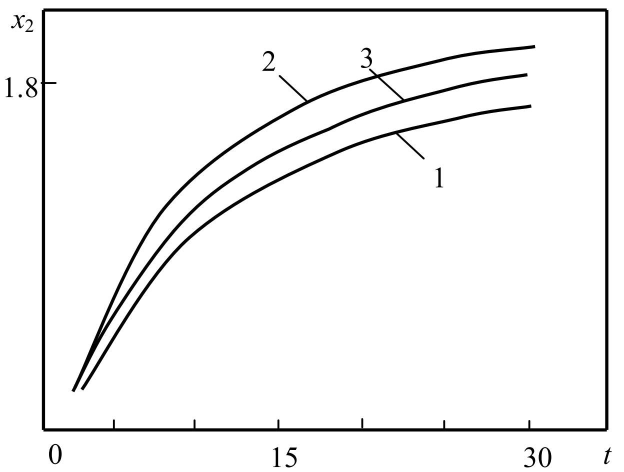

Рис. 1. Зниження точки виходу вільної поверхні.

Вказані точки в першому і третьому випадках розташовані відповідно на 11 % і 5 % нижче, ніж у другому. Отже, якщо прошарок лежить вище дрени, то за заданий час осушення вільна поверхня опуститься на найменшу глибину. В цій ситуації може виникнути підтоплення кореневого шару, що створить несприятливі умови для розвитку рослин. Для запобігання підтоплення необхідно змінити глибину закладення дренажу або зменшити міждренну відстань.

Розглядалася також задача фільтрації і вологопереносу в пористій дамбі прямокутної форми $\{0\le x_1\le 10, 0\le x_2\le 6\}$ на непроникній основі з протифільтраційною завісою для запобігання появи проміжків височування. При наявності забрудненої води у верхньому б'єфі завіса дозволяє знизити її вихід у прісноводний канал або водозабір. Припускалося, що в початковий момент часу напір у дамбі дорівнює – 5 м. На межі області задаються умови:

$$k(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}=0,\ x_2=0, x_1\in(0,10],\ x_2=6, x_1\in(0,10),$$

$$k(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}=0,\ x_1=10, x_2\in[0,5),$$

$$u(x,t)=0,\ x_1=0, x_2\in[0,10],$$

$$u(x,t)=-5,\ x_1=10, x_2\in[5,6].$$

Коефіцієнти фільтрації ґрунту і завіси дорівнюють відповідно $0.2\,\text{м/доба}$ і $0.005\,\text{м/доба}$. Розрахунки проводилися для завіси товщини 0.2 м, розташованій при $\{x_1=5, x_2\in[0,4]\}$ до практичного встановлення вільної поверхні. Результати розрахунків наведено на рис. 2.

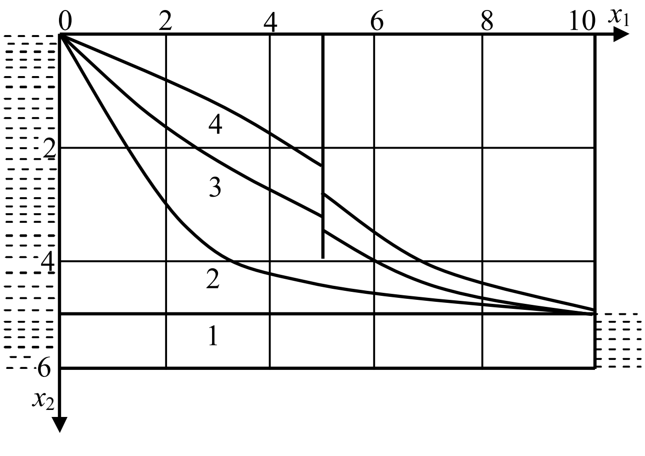

Рис. 1. Динаміка просування вільної поверхні в дамбі (1 – t = 0, 2 – t = 0.1, 3 – t = 0.5, 4 – t = 2.8).

5. Висновок

Результати розрахунків свідчать, що описаний підхід дає змогу обґрунтувати ефективність протифільтраційних і захисних заходів, спрямованих на зниження впливу техногенних і природних факторів на навколишнє середовище.

Список використаних джерел

1. *Essman R.I.* Calculations of casting / R.I. Essman, N.P. Zhmakin, L.I. Shub. – Minsk : Vysheyshaya shkola, 1977. – 263. (in Russian).
2. Mathematical methods in the study of the processes of special electrical metallurgy / ed. B.E. Paton. – Kiev : Naukova Dumka, 1976. – 187 p. (in Russian).
3. Mathematical methods in the study of the processes of special electrometallurgy / ed. B.E. Paton. – Kiev : Znanie, 1974. – 24 p. (in Russian).
4. *Carslaw G.* Thermal conductivity of solids / G. Carslaw, J. Jaeger. – Moscow : Nauka, 1964. – 487 p. (in Russian).
5. *Bindeman N.I.* Determination of the filtration coefficient of rocks by infiltration pits / N.I. Bindeman. – Leningrad : Gosenergoizdat, 1947. – 32 p. (in Russian).
6. *Samarskiy A.A.* Difference methods for elliptic equations / A.A. Samarskiy, V.B. Andreev. – Moscow : Nauka, 1976. – 592 p.
7. *Ljashko I.I.* Numerical modeling of heat and mass transfer / I.I. Ljashko, V.F. Demchenko, L.I. Demchenko. – Kyiv : Kyiv State Univ., 1988. – 164 p. (in Russian).
8. *Ljashko I.I.* Generic formulations of the heat and mass transfer in layered media / I.I. Ljashko, V.F. Demchenko. – Kyiv, 1987. – 27 p. – (Preprint / Ukrainian Academy of Sciences, Institute of Cybernetics, 87.14). (in Russian).
9. *Ortega J.* Iterative solution of nonlinear equations in several variables / J. Ortega, W. Rheinboldt. – M. : Mir, 1975. – 558 p. (in Russian).
10. *Dejneka V.S.* The numerical solution of the boundary value problem, allowing a gap in the solution / V.S. Dejneka // Reports of the Ukrainian Academy of Sciences. Ser. A. – 1982. – № 11. – P. 29–32. (in Russian).
11. *Ljashko I.I.* The numerical discretization of the boundary value problem for a quasilinear equation with discontinuous solution / I.I. Ljashko, V.V. Skopetsky, V.S. Dejneka // Reports of the Ukrainian Academy of Sciences. Ser. A. – 1986. – № 9. – P. 14–18. (in Russian).
12. *Ljashko I.I.* The numerical discretization of a nonlinear parabolic equation with a discontinuous solution / I.I. Ljashko, V.V. Skopetsky, V.S. Dejneka // Reports of the Ukrainian Academy of Sciences. Ser. A. – 1987. – № 5. – P. 20–24. (in Russian).
13. *Molchanov I.N.* Variational method in some problems with discontinuous solutions / I.N. Molchanov, L.D. Nicolenko // Numerical Analysis. – Kyiv, 1975. – P. 71–83. (in Russian).
14. *Demchenko V.F.* Difference scheme through account for the stationary equation of heat conduction in multi-layer media with imperfect thermal contact / V.F. Demchenko, L.I. Demchenko, A.T. Zelnichenko // Computational and Applied Mathematics. – 1980. – Iss. 40. – P. 122–130. (in Russian).
15. *Zelnichenko A.T.* Difference scheme through account for the unsteady heat equation in a multilayer medium with a non-ideal thermal contact / A.T. Zelnichenko, V.F. Demchenko // Optimization algorithms and numerical analysis. – Kyiv, 1980. – P. 65–70. (in Russian).
16. *Kamynin L.I.* A problem in biophysics / L.I. Kamynin // Reports of the USSR Academy of Sciences. – 1966. – **169**. – № 4. – P. 761–764. (in Russian).
17. *Vakal E.S.* A method for solving nonlinear equations of parabolic type / E.S. Vakal, S.L. Kivva, G.E. Mistetsky, O.B. Stelya // Computational and Applied Mathematics. – 1985. – Iss. 56. – P. 36–43. (in Russian).
18. *Vakal E.S.* An approach to the numerical solution of problems of mass transport in heterogeneously-layered media / E.S. Vakal. – Kiev, 1985. – 16 p. – Dep. in UkrNIINTI 20.04.85, № 781–85. (in Russian).
19. *Vakal E.S.* Solution to a problem of protection of watercourses and water withdrawals from contamination / E.S. Vakal, G.E. Mistetsky, O.B. Stelya // The theory of hydrodynamic models of technical problems. – Sverdlovsk, 1988. – P. 90–95. (in Russian).
20. *Ljashko I.I.* The solution of the system of parabolic equations in multi-media in the presence of non-ideal conditions of contact at interfaces / I.I. Ljashko, L.I. Demchenko, E.S. Vakal // III National Symposium on Differential and Integral Equations, 1-3 June 1982, Odessa: proceedings of the symposium. – Odessa, 1982. – P. 247–248. (in Russian).

Надійшла до редколегії 19.12.13