УДК 539.3

Горошко О. О.[1], д.ф.-м.н. проф.,
Кикоть С. В.[2], к.ф.-м.н. доц.

Дослідження коливань гнучкого трубопроводу з використанням канонічного вигляду рівнянь

У статті досліджуються коливання гнучкого трубопроводу з рухомою рідиною. Диференціальне рівняння другого порядку з гіроскопічними членами, що описує коливання, зведено до канонічного вигляду рівняння гіперболічного типу. Приводиться точний розв'язок задачі для вимушених коливань. Встановлено резонансні стани вимушених коливань.

Ключові слова: гнучкий трубопровід, рухоме навантаження, канонічні рівняння, двохвильовий коливний процес, вимушені коливання, частота коливань, ексцес, критична швидкість, резонанс.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д.
[2] Національний транспортний університет, 01010, м. Київ, вул. Суворова, 1,
e-mail: s.v.kykot@gmail.com

Oleg O. Goroshko[1], Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor,
Sergiy V. Kykot'[2], Ph.D., (Phys.-Math.), Associate Professor.

Investigations of a flexible conduit using equations in canonical form

The paper investigates oscillations of a flexible conduit with moving fluid. The differential equation of the second order with gyroscopic members that describes the oscillations is reduced to canonical form hyperbolic equation. Exact solution of the problem for forced oscillations is given. Specific properties of resonance states are determined.

Key Words: flexible conduit, moving loading, canonical equations, double wave oscillation process, forced oscillations, oscillation frequency, excesses, critical velocity, resonance.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
[2] National Transport University, 01010, Kiev, Suvorova 1,
e-mail: s.v.kykot@gmail.com

Статтю представив член редколегії д.ф.-м.н., проф. Маципура В. Т.

Вступ. Наявність гіроскопічних сил, які представлені членами зі змішаними похідними в рівняннях динаміки трубопроводів з рухомою рідиною, не дають змоги застосувати метод розділення змінних та прямі методи до дослідження коливального руху.

У роботах [1,3] приведено точний розв'язок задачі, отриманий без переходу до канонічної форми рівнянь, яким представлено двохвильову форму руху пружного об'єкта з рухомим навантаженням [1], а саме: поперечні коливання на кожній частоті представляються у вигляді суми двох груп стоячих хвиль, які мають різні форми і зміщені за фазою на $\pi/2$.

Метою даної роботи є приведення до канонічної форми рівнянь руху гнучкої труби з рухомою рідиною і побудова розв'язків задачі про власні і вимушені коливання, що може бути використано для подальшого розвитку прямих методів при побудові наближених розв'язків в ускладнених постановках задач.

Зведення до канонічного вигляду диференціального рівняння другого порядку з гіроскопічними членами

Поперечні коливання гнучкої труби з рухомою рідиною описуються рівнянням [1,3,4]

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\rho_2 v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\left(T-\rho_2 v^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \quad (1)$$

де $u(x,t)$ – поперечні відхилення труби, T – початковий натяг трубопроводу, $\rho=\rho_1+\rho_2$ – сума розподілених мас труби і рухомої рідини, v – швидкість руху потоку рідини.

При швидкості руху рідини $v=0$, рівняння (1) перетвориться в класичне рівняння гіперболічного типу, яке описує коливання струни.

© О.О. Горошко, С.В. Кикоть, 2014

Для приведення рівняння (1) до канонічної форми [1] (за загальноприйнятою термінологією в математичній фізиці [2]) від змінних (x,t) перейдемо до нових змінних (x_1,t_1), за формулами

$$x = x_1, \quad t = t_1 + \alpha x_1. \qquad (2)$$

Фізичний зміст константи переходу α буде розглянуто при аналізі результатів.

В нових змінних похідні функції $u(x,t)$ визначаємо за формулами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial t_1}\alpha,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t_1}\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\alpha^2, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t_1} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}.$$

Підставивши знайдені похідні (3) в рівняння (1) і звівши подібні члени, одержимо

$$\left(\rho + 2\rho_2 v\alpha - (T - \rho_2 v^2)\alpha^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \\ +2\left(\rho_2 v - \alpha(T - \rho_2 v^2)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t_1} - \left(T - \rho_2 v^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = f(x_1,t_1). \qquad (4)$$

Визначаючи константу α з умови рівності нулю коефіцієнта при змішаній похідній

$$\alpha = \frac{\rho_2 v}{T - \rho_2 v^2}, \qquad (5)$$

зведемо рівняння (4) до канонічного вигляду рівняння гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 u(x_1,t_1)}{\partial t_1^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = b(v) f(x_1,t_1), \qquad (6)$$

де

$$c^2 = \left(T - \rho_2 v^2\right) b(v), \\ b(v) = \frac{T - \rho_2 v^2}{T(\rho_1 + \rho_2) - \rho_1\rho_2 v^2}. \qquad (7)$$

Співвідношеннями (7) представлено складні залежності швидкості поперечної хвилі c гнучкого трубопроводу з рухомою рідиною та функції збурення $b(v) f(x_1,t_1)$ в канонічних змінних (x_1,t_1).

При нульових граничних умовах $u(0,t_1) = 0$, $u(l,t_1) = 0$ однорідне рівняння (6), яким описуються власні коливання, має такі розв'язки

$$u_n(x_1,t_1) = a_n \sin\lambda_n x_1 \cos(\omega_n t_1 + \varphi_n), \; n = 1,2,3,\ldots, \qquad (8)$$

де $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, $\omega_n = \lambda_n c$.

Розв'язки (8) однорідного рівняння (6) в змінних (x,t) набувають вигляду

$$u_n(x,t) = a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos(\omega_n t - \gamma_n x + \varphi_n), \qquad (9)$$

де власні частоти ω_n та перекоси форм γ_n визначаються за формулами

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{\left(T - \rho_2 v^2\right)^2}{T(\rho_1 + \rho_2) - \rho_1\rho_2 v^2}}, \\ \gamma_n = \alpha\omega_n = \frac{n\pi}{l}\frac{\rho_2 v}{\sqrt{T(\rho_1 + \rho_2) - \rho_1\rho_2 v^2}}; \qquad (10) \\ n = 1,2,3,\ldots.$$

Коефіцієнт $\alpha = \frac{\gamma_n}{\omega_n}$ – визначає єдину для всіх тонів коливань константу відношення ексцесів до частот.

Таким чином, власні коливання гнучкого трубопроводу з рухомою рідиною (9) характеризуються біжучою хвилею.

У роботах [1,3] розв'язки (9) подані в двохвильовій формі

$$u_n(x,t) = A_n\left[X_n(x)\cos(\omega_n t + \varphi_n) - Y_n(x)\sin(\omega_n t + \varphi_n)\right], \qquad (11)$$

де

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\gamma_n x, \quad Y_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\gamma_n x;$$

A_n та φ_n – сталі інтегрування, які визначаються початковими умовами.

Функції $X_n(x)$ та $Y_n(x)$ описують дві стоячі хвилі на кожній з частот ω_n, моделюючи коливний процес як двохвильвий.

Таким чином, коливання гнучкого трубопроводу з рухомою рідиною залежать від швидкості руху потоку рідини v, частот $\omega_n(v)$ та перекосів форм коливань $\gamma_n(v)$. З формул (10) випливає наявність двох значень критичних швидкостей руху рідини.

При першій критичній швидкості руху рідини $v_{kp1}=\sqrt{\frac{T}{\rho_2}}$ труба втрачає прямолінійну форму, набуває статичного прогину під дією відцентрових сил рухомої рідини, а при подальшому збільшенні швидкості коливний рух стабілізується.

При наближенні до другої критичної швидкості руху рідини $v_{kp2}=\sqrt{\frac{T\left(\rho_1+\rho_2\right)}{\rho_1\rho_2}}$ відбувається різке зростання значень власних частот за рахунок стабілізації руху гіроскопічними силами.

При перевищенні другого критичного значення швидкості руху рідини $v>v_{kp2}$ канонічне рівняння гіперболічного типу (6) трансформується в канонічне рівняння еліптичного типу

$$\frac{\partial^2 u(x_1,t_1)}{\partial t_1^{\,2}}+c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\,2}}=b\left(v\right)f\left(x_1,t_1\right).$$

У даній роботі випадок руху рідини при швидкостях $v>v_{kp2}$ не розглядається.

Вимушені коливання гнучкого трубопроводу

Вимушені коливання гнучкого трубопроводу в канонічній формі описуються рівнянням (6).

Частинний розв'язок $u_0\left(x_1,t_1\right)$ рівняння (6), яким описується вимушений рух, будується у формі розкладу за власними функціями

$$u_0\left(x_1,t_1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x_1}{l}P_n\left(t_1\right), \qquad (12)$$

де $P_n\left(t_1\right)$ – фазові функції.

Підставляючи (12) в рівняння (6) отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x_1}{l}\left(\ddot{P}_n\left(t_1\right)+\omega_n^{\,2}P_n\left(t_1\right)\right)=b\left(v\right)f_1\left(x_1,t_1\right), \qquad (13)$$

де частоти ω_n визначаються формулами (10).

Домножуючи (13) на функції $\sin\frac{n\pi x_1}{l}$ та враховуючи їх ортогональність, отримаємо рівняння для знаходження функцій $P_n\left(t_1\right)$

$$\ddot{P}_n\left(t_1\right)+\omega_n^{\,2}P_n\left(t_1\right)=\frac{2}{l}b(v)h_n\left(t_1\right),\ n=1,2,3,\ldots. \qquad (14)$$

Узагальнені сили $h_n\left(t_1\right)$ обчислюються за формулами

$$h_n\left(t_1\right)=\int_0^l f_1\left(x_1,t_1\right)\sin\frac{n\pi x_1}{l}dx_1. \qquad (15)$$

Частинні розв'язки рівняння (14) в формі Коші мають вигляд

$$P_n\left(t_1\right)=\frac{2b(v)}{\omega_n l}\int_0^{t_1}h_n(\tau)\sin\omega_n(t_1-\tau)d\tau,\ n=1,2,3,\ldots \qquad (16)$$

Частинний розв'язок (12) неоднорідного рівняння (6) з урахуванням (16) набуває вигляду

$$u_0\left(x_1,t_1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x_1}{l}\frac{2b(v)}{\omega_n l}\int_0^{t_1}h_n(\tau)\sin\omega_n(t_1-\tau)d\tau. \qquad (17)$$

Повертаючись до старих незалежних змінних (x,t), згідно з (2), матимемо

$$u_0\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}P_n\left(t-\alpha x\right). \qquad (18)$$

Таким чином, вимушені коливання (18) представлено біжучими хвилями.

Приклад. Розглянемо коливання трубопроводу під дією одночастотного рівномірно-розподіленому збудженні

$$f\left(x_1,t_1\right)=h\sin pt_1,$$

де h та p – амплітуда та частота збудження.

У відповідності із загально прийнятою схемою побудови вимушених коливань узагальнені сили $h_n\left(t_1\right)$ в рівняннях (14) визначаються за формулою (15) та мають вигляд:

$$h_n\left(t_1\right)=\frac{hl\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi}\sin pt_1,\quad n=1,2,3,\ldots.$$

або

$$h_n\left(t_1\right)=\frac{2hl}{n\pi}\sin pt_1,\quad n=1,3,5,\ldots. \qquad (19)$$

Функції $P_n\left(t_1\right)$, що визначаються формулами (16) з врахуванням (19), мають вигляд:

$$P_n\left(t_1\right)=\frac{4hb(v)}{\pi n\left(\omega_n^{\,2}-p^2\right)}\left[\sin pt_1-\frac{p}{\omega_n}\sin\omega_n t_1\right], \qquad (20)$$

n=1,3,5,….

Вимушені коливання гнучкого трубопроводу, які будуються в формі розкладу за власними функціями (12) з врахуванням формул (20) набувають вигляду

$$u_0\left(x_1,t_1\right)=\frac{4hb(v)}{\pi}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n\left(\omega_n^{\ 2}-p^2\right)}\sin\frac{n\pi x_1}{l}\times \times\left[\sin pt_1-\frac{p}{\omega_n}\sin\omega_n t_1\right]. \quad (21)$$

Розв'язок $u_0\left(x_1,t_1\right)$ задовольняє нульовим початковим умовам: $u_0\left(x_1,0\right)=0$, $\frac{\partial u_0\left(x_1,0\right)}{\partial t_1}=0$.

Перша складова розв'язку (21) визначає форму «чистих» вимушених коливань з частотою p. Друга складова (21) представлена нескінченою сумою коливань на власних частотах ω_n, члени якої пропорційні множникам $\frac{1}{n\omega_n^{\ 3}}$. В класичній математичній фізиці це «вільні коливання» збуджені зовнішньою збурюючою силою [2].

Повертаючись до старих незалежних змінних (x,t), згідно з (2), форма розв'язку набуває вигляду

$$u_0\left(x,t\right)=\frac{4hb(v)}{\pi}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n\left(\omega_n^{\ 2}-p^2\right)}\sin\frac{n\pi x}{l}\times \times\left[\sin p\left(t-\alpha x\right)-\frac{p}{\omega_n}\sin\left(\omega_n t-\gamma_n x\right)\right]. \quad (22)$$

Таким чином, як і у випадку власних коливань (9), фазові функції вимушених коливань в точних розв'язках побудованих з використанням канонічної форми рівнянь представлено біжучими хвилями.

Розглянутий приклад ілюструє застосування канонічної форми рівнянь до аналізу ускладнених задач динаміки трубопроводів.

Висновки. Результати дослідження можуть бути сформульовані у вигляді таких висновків:

1. Рівняння коливань гнучкого трубопроводу приведено до канонічного рівняння гіперболічного типу та побудовані точні розв'язки для власних та вимушених коливань, в яких фазові функції представлені біжучими хвилями.
2. Підтверджена інтерпретація коливань трубопроводу як двохвильового процесу.
3. Резонансні стани вимушених коливань мають місце на власних частотах коливань трубопроводу.
4. Форми отриманих розв'язків для власних і вимушених коливань гнучкого трубопроводу з рухомою рідиною визначають структуру і форму наближених розв'язків прямими методами для ускладнених задач динаміки пружних конструкцій з рухомим навантаженням.

Список використаних джерел

1. *Goroshko O. O.* Two-waves processes in mechanical systems / *Goroshko O. O., Kiba S. P., Dem'yanenko A. G.* – Kyiv: Lybid, 1991. – 188 p. (in Ukrainian).
2. *Koshlyakov N. S.* Partial differential equations of mathematical physics / *Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M.* – Moscow.: Vyshaya shkola, 1970. – 712 p. (in Russian).
3. *Goroshko O. O.* An investigation of the one-frequency regimes in two-waves systems (in the systems with a moving loading) / *O. O. Goroshko* // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. – 2002. – № 2. – P. 93–98. (in Ukrainian).
4. *Païdoussis M. P.* The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across Applied Mechanics / *M. P. Païdoussis* // Journal of Sound and Vibration, 2008 – 310. – P. 462–492.

Надійшла до редколегії 18.11.2013