

УДК 532.5

Курилко О.Б.¹, к.ф.-м.н.

Періодичні рухи в'язкої рідини всередині прямокутної порожнини

Досліджена двовимірна періодична течія в'язкої нестисливої рідини в наближенні Стокса всередині прямокутної порожнини при нерівномірному розподілі заданої швидкості на верхній та нижній границі відповідно. Запропонований алгоритм для відшукування періодичних точок течії другого та третього порядків при складному розподілі швидкості руху границь. Проведено порівняння отриманих чисельних результатів з відомими експериментальними даними.

Ключові слова: прямокутна порожнина, періодична точка, відображення Пуанкаре

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4е, e-mail: alexandr.kurylko@gmail.com

O.B. Kurylko¹, PhD (Phys.-Math.)

Periodic motions of viscous fluid inside a rectangular cavity

The two-dimensional periodic flow of viscid incompressible fluid in the Stokes approximation in a rectangular cavity with non-uniform velocity distribution on the top and bottom boundaries is considered. An algorithm for finding periodic points of second and third order with non-uniform velocity distribution is proposed. The obtained numerical results agree with well-known experimental data.

Key Words: rectangular cavity, periodic point, Poincare mapping

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4e, e-mail: alexandr.kurylko@gmail.com

Статтю представив член редколегії д. ф.-м. н., професор Маципура В. Т.

Вступ

В останнє десятиліття можна відзначити підвищену увагу багатьох фахівців до проблеми перемішування рідин ламінарними течіями. Аналіз масштабів різних течій дозволяє зробити висновок про те, що на початкових етапах течій з різними геометричними масштабами переважаючими є конвективні механізми перемішування, і завдання перемішування зводяться до аналізу процесів деформації виділеної рідини в розглядуваному полі швидкості. Фактично ця задача пов'язана з лагранжевим описом руху в гідродинаміці і зводиться до аналізу руху системи лагранжових рідких частинок в ейлеровому полі швидкості. В літературі [1,6] ця задача отримала назву *задача про адвекцію рідини*, яка в двовимірному випадку описується системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad \frac{dY}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}. \quad (1)$$

де Ψ - функція течії, з початковими умовами $X = X_0, Y = Y_0$ при $t = t_0$.

Важливим при вивченні адвекції рідини є знання періодичних точок течії порядку p , тобто

таких початкових умов в рівняннях (1), коли точка за p періодів точно повернеться в своє початкове положення.

Дана робота присвячена побудові алгоритму відшукування періодичних точок течії різних порядків при нерівномірному розподілі заданої швидкості на границях прямокутної порожнини, який розглядається в експериментальній роботі Оттіно [5].

1. Постановка задачі та побудова аналітичного розв'язку

Розглянемо двовимірну течію в'язкої нестисливої рідини в прямокутній порожнині з рухомими границями. В наближенні Стокса впливом інерційних членів на течію можна знехтувати в порівнянні з впливом сил в'язкості. Тоді, для функції течії $\Psi(X, Y, t)$, за допомогою якої компоненти вектора швидкості визначаються згідно співвідношень

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}, \quad (2)$$

розв'язок стаціонарної задачі зводиться до розв'язання бігармонічного рівняння

$$\Delta\Delta\Psi = 0, \quad (3)$$

з відповідними граничними умовами на твердих стінках.

Нехай течія в прямокутній порожнині $|X| \leq a$, $|Y| \leq b$, викликається заданими дотичними швидкостями $U_{top}(t) = U \cos^2 \frac{\pi t}{T}$ та $U_{bot}(t) = -U \sin^2 \frac{\pi t}{T}$ на верхній ($Y = b$) та нижній ($Y = -b$) стінках відповідно, а бокові стінки ($X = \pm a$) – нерухомі (рис.1).

В цьому випадку граничні умови для рівняння (3) мають вигляд

$$\begin{aligned} \psi &= 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \quad \text{при } X = \pm a, \quad |Y| \leq b, \\ \psi &= 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial Y} = U_{top}(t) \quad \text{при } Y = b, \quad |X| \leq a, \\ \psi &= 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial Y} = U_{bot}(t) \quad \text{при } Y = -b, \quad |X| \leq a. \end{aligned} \quad (4)$$

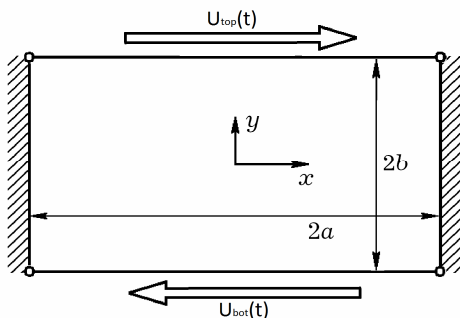


Рис.1. Геометрія задачі

В подальшому введемо безрозмірні координати та безрозмірний час: $x = X/b$, $y = Y/b$, $h = a/b$, $\tau = 2t/T$, де T - період руху стінок рідини.

Враховуючи лінійність задачі (3), (4), її розв'язок можна представити в наступному вигляді

$$\psi(x, y, \tau) = U_1(\tau)\psi_1(x, y) + U_2(\tau)\psi_2(x, y), \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} U_1(\tau) &= \frac{1}{2}(U_{top}(\tau) - U_{bot}(\tau)) = U/2, \\ U_2(\tau) &= \frac{1}{2}(U_{top}(\tau) + U_{bot}(\tau)) = \frac{1}{2}U \cos \pi\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Бігармонічні функції $\psi_k(x, y)$ ($k=1, 2$) є розв'язками наступних граничних задач

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\psi_k &= 0, \\ \psi_k &= 0, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial x} = 0, \quad \text{при } |x| = h, \quad |y| \leq 1, \end{aligned}$$

$$\psi_k = 0, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial y} = (-1)^k, \quad \text{при } |y| = 1, \quad |x| \leq h. \quad (7)$$

Аналітичні розв'язки цих задач можуть бути отримані за допомогою методу суперпозиції, добре відомим в теорії пружності [7]. Задачі (7) представляють собою симетричну ($k=1$) та антисиметричну ($k=2$) бігармонічні задачі з постійною швидкістю на границях, методика побудови аналітичних розв'язків яких детально розглянута в роботах [2,4].

З використанням (5) система (1) може бути записана в наступному вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \bar{D} [v_1(x, y) + u(\tau)v_2(x, y)], \\ \frac{dy}{d\tau} &= \bar{D} [u_1(x, y) + u(\tau)u_2(x, y)], \end{aligned} \quad (8)$$

де $u_k(x, y)$, $v_k(x, y)$ ($k=1, 2$) компоненти поля швидкості, що відповідають розв'язкам задач (7), а $\bar{D} = UT/4b$ - безрозмірна величина, що характеризує переміщення кожної стінки протягом періоду. Періодична функція $u(\tau)$ на інтервалі $[0, 2]$ має вигляд

$$u(\tau) = \cos \pi\tau. \quad (9)$$

2. Алгоритм відшукування періодичних точок течії

Для визначення положення рідких пасивних частинок після фіксованого періоду течії необхідно інтегрувати рівняння руху кожної рідкої частинки на протязі певного інтервалу часу. Після проходження частинки через фіксований переріз необхідно проводити процедуру уточнення їх координат. В даному випадку траєкторія пасивної частинки залежить від періодичної функції $u(\tau)$.

Запропонований алгоритм знаходження періодичних точок пов'язаний із симетрією функцій $u(\tau)$, $u_k(x, y)$, $v_k(x, y)$ ($k=1, 2$) по часу та координатам.

Для заданого розподілу швидкості на границі наступні твердження є вірними:

(1) Якщо в момент часу $\tau = q$ ($q \in \mathbb{N}$) пасивна рідка частинка лежить на осі ординат, тобто $x(q) = 0$, $y(q) = \hat{y}$, тоді для довільного $\tilde{\tau}$ виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned} x(q + \tilde{\tau}) &= -x(q - \tilde{\tau}), \\ y(q + \tilde{\tau}) &= y(q - \tilde{\tau}). \end{aligned} \quad (10)$$

(2) Якщо в момент часу $\tau = q - 0.5$ ($q \in \mathbb{N}$) пасивна рідка частинка лежить на осі абсцис,

тобто $x(q-0.5)=\hat{x}$, $y(q-0.5)=0$, то для довільного $\tilde{\tau}$ справедливі співвідношення:

$$\begin{aligned} x(q-0.5+\tilde{\tau}) &= -x(q-0.5-\tilde{\tau}), \\ y(q-0.5+\tilde{\tau}) &= y(q-0.5-\tilde{\tau}). \end{aligned} \quad (11)$$

Ідея доведення сформульованих тверджень та алгоритм відшукування періодичних точок першого порядку детально розглянуто в роботі [3]. Опишемо алгоритм для відшукування періодичних точок другого порядку.

Позначимо через $f_{0,\tilde{\tau}}$ та $g_{0,\tilde{\tau}}$ - розв'язки рівнянь адвекції (8) на інтервалі $(0,\tilde{T})$. Покладемо $q=\tilde{\tau}=2$ та $q=2$, $\tilde{\tau}=1$ в (10), і $q=2$, $\tilde{\tau}=1$ та $q=3$, $\tilde{\tau}=1$ в (11) отримаємо наступний алгоритм для відшукування періодичних точок другого порядку:

(i) [0-2] на y - вибираємо при $\tau=0$ довільну точку $(0,\hat{y})$ на осі ординат, інтегруємо систему (8) на інтервалі $(0,2)$ і визначаємо положення на осі ординат точки $(x(2.0), y(2.0))$ в момент часу $\tau=2$. Іншими словами, якщо \hat{y} є коренем рівняння $f_{0,2}(0,\hat{y})=0$, то точка $(0,\hat{y})$ є періодичною;

(ii) [0.5-2.5] на x - вибираємо при $\tau=0.5$ довільну точку $(\hat{x},0)$ на осі абсцис, інтегруємо систему (8) на інтервалі $(0.5,2.5)$ і визначаємо положення на осі абсцис точки $(x(2.5), y(2.5))$ в момент часу $\tau=2.5$. Якщо \hat{x} є коренем рівняння $g_{0.5,2.5}(\hat{x},0)=0$, то точка (\hat{x},y^*) , де $x^*=f_{0.5,2}(\hat{x},0)$, $y^*=g_{0.5,2}(\hat{x},0)$, є періодичною;

(iii) [1-3] на y - вибираємо при $\tau=1$ довільну точку $(0,\hat{y})$ на осі ординат, інтегруємо систему (8) на інтервалі $(1,3)$ і визначаємо положення на осі ординат точки $(x(3.0), y(3.0))$ в момент часу $\tau=3$. Іншими словами, якщо \hat{y} є коренем рівняння $f_{1,3}(0,\hat{y})=0$, то точка $(0,\hat{y})$ є періодичною;

(iiii) [1.5-3.5] на x - вибираємо при $\tau=1.5$ довільну точку $(\hat{x},0)$ на осі абсцис, інтегруємо систему (8) на інтервалі $(1.5,3.5)$ і визначаємо положення на осі абсцис точки $(x(3.5), y(3.5))$ в момент часу $\tau=3.5$. Якщо \hat{x} є коренем рівняння

$g_{1.5,3.5}(\hat{x},0)=0$, то точка (x^*,y^*) , де $x^*=f_{1.5,3}(\hat{x},0)$, $y^*=g_{1.5,3}(\hat{x},0)$, є періодичною.

Алгоритм для відшукування періодичних точок третього порядку без детального опису має наступний вигляд: [0-3] на y , [1-4] на y , [2-5] на y , [0.5-3.5] на x , [1.5-4.5] на x , [2.5-5.5] на x .

Класифікувати тип періодичної точки будемо аналітично, визначаючи власні значення λ_1 та λ_2 Якобіана лінеаризованої системи (8) в околі періодичної точки, яка розглядається. Якщо λ_1 та λ_2 є комплексно спряженими, то періодична точка має еліптичний тип. Якщо λ_1 та $\lambda_2=1/\lambda_1$ є дійсними числами, то періодична точка гіперболічного типу. Коли $\lambda_1=\lambda_2=\pm 1$, що відповідає випадку виродження, періодична точка є параболічного типу: при цьому мала зміна протоколу перемішування призводить до зміни типу періодичної точки на еліптичний або гіперболічний.

Елементи Якобіана матриці M можуть бути обчислені, розв'язуючи систему (8) для 4 початкових умов: $(x^*+\varepsilon,y^*)$, $(x^*-\varepsilon,y^*)$, $(x^*,y^*+\varepsilon)$, $(x^*,y^*-\varepsilon)$, де (x^*,y^*) - координати періодичної точки, а ε - мала величина

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \frac{x_{(0,pT)}(x^*+\varepsilon,y^*)-x_{(0,pT)}(x^*-\varepsilon,y^*)}{2\varepsilon}, \\ M_{xy} &= \frac{x_{(0,pT)}(x^*,y^*+\varepsilon)-x_{(0,pT)}(x^*,y^*-\varepsilon)}{2\varepsilon}, \\ M_{yx} &= \frac{y_{(0,pT)}(x^*+\varepsilon,y^*)-y_{(0,pT)}(x^*-\varepsilon,y^*)}{2\varepsilon}, \\ M_{yy} &= \frac{y_{(0,pT)}(x^*,y^*+\varepsilon)-y_{(0,pT)}(x^*,y^*-\varepsilon)}{2\varepsilon}, \end{aligned} \quad (12)$$

де p - порядок періодичної точки.

3. Результати обчислень

В якості прикладу розглянуто періодичну течію Стокса в'язкої нестисливої рідини всередині прямокутної порожнини при синусоїдальному розподілі заданої швидкості на верхній та нижній границях. Розміри порожнини та швидкість руху верхньої та нижньої границь відповідають даним з роботи [5], а саме: $2a=10.35$ см, $2b=6.2$ см, $a/b=1.67$, $U=2.69$ см/с, $T=15.4$ с. Переходячи до безрозмірних величин, маємо $h=1.67$, $T=2$, $n=40$ - кількість періодів, $D=4.42$, $\bar{D}=\frac{h}{2}D=3.69$, де D - безрозмірна величина, яка

характеризує переміщення рухомих стінок порожнини за один період.

Визначення положень періодичних точок першого, другого та третього порядків згідно алгоритму, який описаний вище, розглянемо на прикладі адвекції виділеної плями, геометричний центр якої взятий в початку координат та має форму круга (рис.2). Положення та геометричні розміри плями відповідають даним експерименту, розглянутого в роботі Оттіно [5].

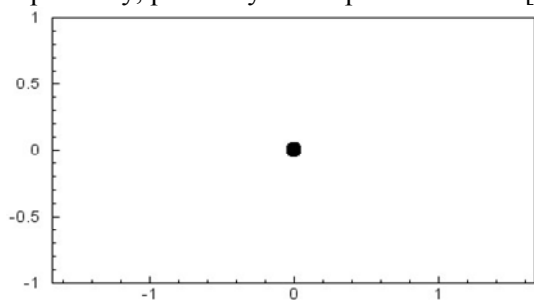


Рис.2. Початкове положення плями в прямокутній порожнині

Адвекція виділеного об'єму рідини у вигляді кругової плями розглядається на протязі 40 безрозмірних періодів руху стінок. На рис.3а показано результат адвекції виділеного об'єму рідини в момент часу $\tau = 40T = 80$ (результат експерименту).



Рис.3. Адвекція плями в експерименті [5]

На рис.4 показано чисельне моделювання процесу адвекції виділеної кругової області (переріз Пуанкаре) через $\tau = 40T = 80$, початкове положення якої зображене на рис.2.

В хаотичному морі мають місце 4 періодичні острови третього порядку, так звані «очі», «ніс» та «рот». А це означає, що всередині цих островів є періодичні точки еліптичного типу третього порядку (A,B,C,D). Згідно описаного алгоритму, періодичні точки мають наступні координати: A(-0.301, -0.163), B(0.312, -0.161), C(0.004, -0.627), D(0.081, -0.406).

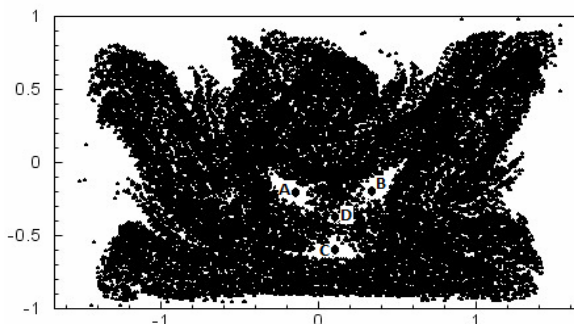


Рис.4. Чисельне моделювання процесу адвекції

Висновки

В даній роботі розглянуто задачу про двовимірну течію Стокса в'язкої рідини в прямокутній порожнині при нерівномірному розподілі швидкості руху границь. Запропоновано алгоритм відшукування періодичних точок течії другого та третього порядку. Встановлено відповідність експериментальних результатів, отриманих Оттіно в 1989 році, та чисельних розрахунків.

Список використаних джерел

1. Aref H. Stirring by chaotic advection / H. Aref // Journal of Fluid Mechanics. – 1984. – Vol.143. – P.1-23.
2. Meleshko V.V. Steady Stokes flow in a rectangular cavity // Proceedings of the Royal Society of London. – 1996. – Vol.A452. – P.1999–2022.
3. Meleshko V.V., Peters G.W.M. Periodic points for two-dimensional Stokes flow in a rectangular cavity // Physics Letters A. – 1996. – Vol.216. – P.87-96.
4. Meleshko V.V. Biharmonic problem in a rectangle / V.V.Meleshko // Applied Scientific Research. – 1998. – Vol.58. – P.217-249.
5. Ottino J. M. Experiments on mixing due to chaotic advection in a cavity / J.M.Ottino // Journal of Fluid Mechanics – 1989. – Vol.209. – P.463-499.
6. Ottino J.M. The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport // Cambridge: Cambridge University Press. - 1989. - 683p.
7. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of elasticity // New York: McGraw-Hill. – 1970. – 567p.

Надійшла до редколегії 27.12.13