УДК 519.816 (075.8)

Волошин О.Ф.[1], д.т.н., проф.,
Лавер В.О.[2], аспірант

Аксіоматична характеризація нечітких узагальнень методів розподілу витрат

Розглядається застосування теорії нечітких множин до класичної задачі розподілу витрат. Пропонуються нечіткі узагальнення класичних методів розподілу та дається їхня аксіоматична характеризація.

Ключові слова: задачі розподілу, методи розподілу, нечіткі моделі та методи.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова, 4д,
e-mail: olvoloshyn@ukr.net
[2]Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 14
e-mail: v.laver@gmail.com

Статтю представив д.т.н. Кудін В.І.

O.F.Voloshyn[1], Dr.Sci., Prof.,
V.O. Laver[2], PhD student

Axiomatic characterization of the fuzzy rationing methods

The application of the fuzzy sets theory to the classical rationing problem is being considered. Characterization of the fuzzy generalizations of the classical rules is given.

Key Words: rationing, rationing method,. fuzzy sets.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: olvoloshyn@ukr.net

[2]Uzhgorod National University, 88000, Uzhgorod, Universitetska str., 14,
e-mail: v.laver@gmail.com

Вступ

Проблеми розподілу (ресурсів, витрат, доходів, прибутків) в сучасному глобалізованому світі виходять на одне із чільних місць в системі пріоритетів цивілізації. Сучасний етап вивчення проблем розподілу починається в 70-х роках минулого сторіччя у зв'язку з відомими соціально-економічними потрясіннями у багатьох країнах світу. Однією з перших робіт, присвячених цій темі, була стаття Б. O'Ніла [1], в якій досліджувались проблеми наслідування спадку на основі матеріалів із Талмуда. Аналізу проблем банкрутства через призму теорії кооперативних ігор була присвячена і ключова стаття Р. Аумана (лауреата премії ім. А.Нобеля Академії наук Швеції з економіки за 2005р.) та М. Машлера «Теоретико-ігровий аналіз проблеми банкрутства із Талмуда» [2]. Серед інших робіт варто згадати також статтю П. Янга [3], в якій проблема розподілу досліджується через призму оподаткування. Методи розподілу та їхня аксіоматична характеризація досліджується і розробляється такими вченими як Е. Мулен, К. Герреро, В. Томпсон та ін. [1-9]. Сучасні результати в моделюванні розподілу витрат (прибутку) викладено в огляді В.Томпсона [4].

Постановка задачі

Задачу розподілу будемо визначати трійкою (N,c,b) [5], де N – скінченна множина агентів, невід'ємне дійсне число c визначає кількість ресурсів (величину витрат або прибутку), яку необхідно розподілити, вектор $b=(b_i)_{i\in N}$ визначає для кожного агента i його заявку b_i (наявну суму грошей), причому $\sum_{i=1}^{n} b_i > 0$ та

$$0 \le b_i,\ \forall i \in N : 0 \le c \le \sum_{i=1}^{n} b_i. \qquad (1)$$

Розв'язком задачі розподілу є вектор $x=(x_i)_{i\in N}$, який ставить у відповідність кожному агенту i його частку x_i, причому

$$0 \le x_i \le b_i, \qquad (2)$$

$$\forall i \in N : \sum_{i\in N} x_i = c. \qquad (3)$$

Метод розподілу визначається відображенням r, яке кожній трійці (N,c,b) ставить у відповідність вектор витрат $x=(x_i)_{i\in N}$, $x=r(N,c,b)$.

Існують такі чотири основні методи розподілу [5,6]:

- Пропорційний податок:

$$x_i \equiv pr_i(N,c,b) = \frac{c}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \cdot b_i, \forall i = \overline{1,n};$$

- Подушний податок (як узагальнення методу рівних витрат):

$x_i \equiv ul_i(N,c,b) = \min\{\lambda, b_i\}, \forall i = \overline{1,n},$, де λ - розв'язок $\sum_{i=1}^{n} \min\{\lambda, b_i\} = c$;

- Рівневий податок (узагальнення методу рівних прибутків):

$x_i \equiv ug_i(N,c,b) = b_i - \min\{\lambda, b_i\}, \forall i = \overline{1,n},$, де λ - розв'язок $\sum_{i=1}^{n} \min\{\lambda, b_i\} = \sum_{i=1}^{n} b_i - c$;

- Талмудичний метод (відповідає N-ядру кооперативної гри [5]): $x_i \equiv tal_i(N,c,b) =$

$$= ug_i\left(N, \min\left\{c, \sum_{i=1}^{n} b_i / 2\right\}, b_i / 2\right) -$$

$$- ul_i\left(N, \max\left\{c - \sum_{i=1}^{n} b_i / 2, 0\right\}, b_i / 2\right), \forall i = \overline{1,n}.$$

Вище застосовано наступні позначення: ul від англ. "uniform losses", ug - "uniform gains", pr – "proportional", tal – Talmudic method. Наведені методи (будемо називати їх «чіткими», на противагу «нечітким»[5,7]) не позбавлені певних недоліків [5,8]. Так, при розподілі за подушним податком може виникнути ситуація, при якій частка витрат деякого агента буде рівною його запасу грошей і він може відмовитись від кооперації. З іншого боку, при розподілі витрат згідно рівневого податку може виникнути ситуація, в якій деякий агент буде звільнений від оподаткування і максимальна коаліція розпадеться.

При нечіткому узагальненні методу розподілу витрат $r(N,c,b)$ приходимо до розв'язання такої параметричної (відносно параметру λ, $0 \le \lambda \le 1$) задачі [9]:

$$\lambda \to \max, \tag{4}$$

$$\mu_k(x_k) \ge \lambda, \forall k \in N; \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = c; \tag{6}$$

$$x_k \ge 0, k \in N. \tag{7}$$

Тут N_1, N_2 ($N_1 \cup N_2 = N$) – розбиття множини агентів, відповідні частки витрат яких є правосторонніми нечіткими числами трапецевидного типу, $x_i = (\underline{x}_i, \hat{x}_i), \forall i \in N_1$, і $x_j = (\hat{x}_j, \overline{x}_j), \forall j \in N_2$, з функціями належності $\mu_k, \forall k \in N$, де $\hat{x}_k = r(N,c,b)$ для всіх $k \in N$, $\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = c$. Відмітимо, що трапецевидний тип функцій належності більш адекватно описує економічні пріоритети агентів у порівнянні з трикутними. Без зменшення загальності вважаємо, що агенти впорядковані за зростанням їхніх запасів грошей.

Нехай вектор $(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda)$ є розв'язком задачі (4)-(7). Тоді вектор $(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається розподілом витрат при нечіткому узагальненні методу $r(N,c,b)$, а параметр λ вказує міру узгодженості максимальної коаліції.

В загальному випадку рішення про віднесення конкретного агента до підгрупи N_1 чи N_2 залишається на розсуд особи, що приймає рішення (ОПР). Зокрема, в якості критеріїв можуть бути розглянуті такі правила:

- У випадку пропорційного податку до групи N_1 відносимо всіх агентів, для яких $b_i / \sum_{i=1}^{n} b_i < R$, де R – деяке порогове значення, що встановлюється ОПР. Агенти, для яких дана нерівність не виконується, включаються у групу N_2;
- У випадку подушного податку до групи N_1 відносимо всіх агентів, для яких подушний податок рівний їхньому запасу грошей ($\hat{x}_i = b_i$), всіх інших агентів включаємо у групу N_2;
- У випадку талмудичного методу до групи N_1 віднесемо агентів, для яких рівневий податок для половинних початкових запасів грошей менший за подушний. Всіх інших агентів відносимо до групи N_2.

Для рівневого податку алгоритм дещо буде іншим. Так, в групу N_1 включаємо всіх агентів, частки витрат яких рівні нулю, і встановлюємо для них субсидії. Витрати і субсидії діляться серед агентів, що залишились – тобто тих, що належать групі N_2.

Пропонується такий алгоритм для пошуку часток витрат агентів для нечіткого узагальнення методу розподілу r:

1. Знаходяться частки витрат агентів $\hat{x}_i = r(N,c,b)$ за методом розподілу *r;*

2. Множина агентів за певним правилом поділяється на дві групи: N_1 і N_2;

3. Встановлюються величини поступок для агентів першої α_i $(i \in N_1)$ і другої β_j $(j \in N_2 = N \setminus N_1)$ груп – на скільки відсотків від величини $\hat{x}_i$ агенти першої групи згідні заплатити менше, а агенти другої – більше за величину, що приписує їм метод розподілу *r*. Знаходимо $\underline{x}_i = (1-\alpha_i)\hat{x}_i, i \in N_1,$ і $\bar{x}_j = (1+\beta_j)\hat{x}_j, j \in N_2$;

4. Величини витрат агентів розглядаються як правосторонні нечіткі числа трапецевидної форми, відповідно $x_i = (\underline{x}_i, \hat{x}_i)$ з функцією належності $\mu_i(x_i)$ $(i \in N_1)$ та $x_i = (\hat{x}_i, \bar{x}_i)$ $(j \in N_2)$ з функцією належності $\mu_j(x_j)$;

5. Формується задача лінійного програмування виду (4)-(7), з якої знаходиться оптимальний розподіл $(x_1, x_2, ..., x_n)$ і ступінь задоволеності агентів цим розподілом – λ $(0 \le \lambda \le 1)$. Якщо дана величина не задовольняє ОПР, переходимо до п.3. Якщо ж задовольняє, то роботу алгоритму завершено.

Оскільки на кожному кроці алгоритму потрібно розв'язувати задачу виду (4)-(7), то виникає питання про існування її розв'язку. Відповідь на це питання дає таке твердження.

Твердження 1. Розв'язок $(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda)$ задачі (4)-(7) завжди існує, причому рівень узгодженості максимальної коаліції $\lambda \in (0,1)$.

Доведення. Для доведення існування розв'язку задачі (4)-(7) необхідно показати, що множина допустимих розв'язків цієї задачі не порожня і цільова функція обмежена зверху.

Розглянемо вектор $(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda)$. Покладемо $x_k = \hat{x}_k$ для всіх $k \in N, \lambda = 0$. Оскільки $\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = c$, а функції належності агентів невід'ємні за означенням, даний розв'язок буде допустимим. Отже, множина допустимих розв'язків не є порожньою. А оскільки $(0 \le \lambda \le 1)$ за означенням, то цільова функція задачі (4)-(7) буде обмеженою (як зверху, так і знизу). Отже, розв'язок задачі (4)-(7) існує завжди.

Покажемо, що $(0 < \lambda < 1)$. Припустимо, що $\lambda = 1$. Це означає, що всі функції належностей агентів також рівні 1. Це можливо тільки, якщо $x_i = \underline{x}_i$ для всіх $i \in N_1$ і $x_j = \hat{x}_j$ для всіх $j \in N_2$. Але в цьому випадку не виконується рівність $\sum_{i=1}^{n} x_i = c$, так як $\underline{x}_i < \hat{x}_i$ для всіх $i \in N_1$. Отже, такий розв'язок не є допустимим, тому $\lambda < 1$.

Доведемо, що $\lambda > 0$. Припустимо, що вектор $(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda)$ є розв'язком задачі (4)-(7) і $\lambda = 0$. Це означає, що не існує допустимого розподілу, для якого би виконувалась нерівність $\lambda > 0$.

Нехай ε_1 - довільне число з інтервалу $(0, x_{N_1})$, де $x_{N_1} = \min_{i \in N_1}(\hat{x}_i - \underline{x}_i)$, а ε_2 - довільне число з інтервалу $(0, x_{N_2})$, де $x_{N_2} = \min_{i \in N_2}(\bar{x}_i - \hat{x}_i)$. Покладемо $x_i = \hat{x}_i - \varepsilon_1$ для всіх $i \in N_1$ і $x_j = \hat{x}_j + \varepsilon_2$ для всіх $j \in N_2$. Оскільки $\underline{x}_i < x_i < \hat{x}_i$, $\hat{x}_j < x_j < \bar{x}_j$, то в даних точках функції належностей агентів не рівні нулю. Залишилось перевірити виконання умови $\sum_{i=1}^{n} x_i = c$.

Маємо:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i \in N_1}(\hat{x}_i - \varepsilon_1) + \sum_{j \in N_2}(\hat{x}_j + \varepsilon_2) = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i - n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2,$$

де $n_1 = |N_1|$- потужність першої підмножини, $n_2 = |N_2|$ - другої. Оскільки ε_1 та ε_2 довільні, виберемо їх так, щоб виконувалась рівність: $-n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 = 0$. Отримуємо $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{n_1}{n_2}$. При даних значеннях відхилень рівність $\sum_{i=1}^{n} x_i = c$ виконується.

Це означає, що вектор $(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda)$ є допустимим розв'язком, причому для нього $\lambda > 0$. Отримуємо протиріччя, отже, остаточно маємо $\lambda > 0$. Твердження доведено.

Дослідження розв'язку задачі (4)-(7)

Оскільки функції належності агентів є правосторонніми нечіткими числами трапецевидного типу, то позначимо через x_k^L лівий кінець інтервалу нечіткості відповідного нечіткого числа, а через x_k^R - правий кінець. Тоді бажана частка витрат агента *k* представляється нечітким числом $(x_k^L, x_k^R), \forall k \in N$. Сума бажаних часток витрат агентів також буде нечітким числом: $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^L, \sum_{k=1}^{n} x_k^R\right)$. Функція належності цього нечіткого числа визначається за формулою:

$$\mu_\Sigma(z)=\begin{cases} 1, z\le\sum_{k=1}^n x_k^L; \\ \dfrac{\sum_{k=1}^n x_k^R - z}{\sum_{k=1}^n x_k^R-\sum_{k=1}^n x_k^L}, \sum_{k=1}^n x_k^L \le z\le \sum_{k=1}^n x_k^R; . \\ 0, z\ge \sum_{k=1}^n x_k^R. \end{cases}$$

Позначимо $\lambda_0=\mu_\Sigma(c)=\dfrac{\sum_{k=1}^n x_k^R - c}{\sum_{k=1}^n x_k^R-\sum_{k=1}^n x_k^L}$.

Твердження 2. $\lambda=\lambda_0$ є розв'язком задачі (4)-(7). При цьому чіткі частки витрат агентів визначаються за формулою:
$$x_k = x_k^R-\lambda_0\left(x_k^R-x_k^L\right),\ \forall k\in N. \qquad (8).$$

Доведення. Покажемо, що обмеження задачі (4)-(7) задовольняються. З огляду на вигляд функцій належності агентів, обмеження (5) може бути записане у вигляді $\dfrac{x_k^R-x_k}{x_k^R-x_k^L}\ge\lambda$, $\forall k\in N$.

Підставимо $x_k = x_k^R-\lambda_0\left(x_k^R-x_k^L\right)$:
$$\frac{x_k^R-x_k^R+\lambda_0\left(x_k^R-x_k^L\right)}{x_k^R-x_k^L}=\lambda_0.$$

Отже, обмеження (5) виконуються для $\forall k\in N$ як обмеження-рівності.

Підставимо (8) у обмеження (6). Маємо:
$$\sum_{k=1}^n\left[x_k^R-\lambda_0\left(x_k^R-x_k^L\right)\right]=\sum_{k=1}^n x_k^R-\lambda_0\sum_{k=1}^n\left(x_k^R-x_k^L\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^n x_k^R-\frac{\sum_{k=1}^n x_k^R-c}{\sum_{k=1}^n x_k^R-\sum_{k=1}^n x_k^L}\left(\sum_{k=1}^n x_k^R-\sum_{k=1}^n x_k^L\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^n x_k^R-\sum_{k=1}^n x_k^R+c=c.$$

Отже, обмеження (6) також виконуються.

Оскільки $\lambda_0=\dfrac{\sum_{k=1}^n x_k^R - c}{\sum_{k=1}^n x_k^R-\sum_{k=1}^n x_k^L}$, то очевидним є виконання обмеження $0<\lambda_0<1$. Покажемо, що обмеження (7) також виконуються.

Розглянемо деякого агента k, для якого $x_k = x_k^R-\lambda_0\left(x_k^R-x_k^L\right)$. Можливі два випадки: $k\in N_1$ і $k\in N_2$. Для $k\in N_1$ маємо: $x_k=\hat{x}_k-\lambda_0\left(\hat{x}_k-(1-\alpha)\hat{x}_k\right)=\hat{x}_k-\alpha\lambda_0\hat{x}_k=$ $=\hat{x}_k(1-\alpha\lambda_0)>0$, оскільки $\alpha<1, \lambda_0<1$.

Для $k\in N_2$ маємо: $x_k=(1+\beta)\hat{x}_k-\lambda_0\left((1+\beta)\hat{x}_k-\hat{x}_k\right)=(1+\beta)\hat{x}_k-\beta\lambda_0\hat{x}_k=$ $=\hat{x}_k\left(1+\beta-\beta\lambda_0\right)>0$.

Тобто, обмеження (7) виконуються для $\forall k\in N$. Це означає, що запропонований розв'язок є допустимим. Покажемо його оптимальність.

Припустимо, що існує деяке $\lambda>\lambda_0$, яке є розв'язком задачі (4)-(7). Це означає, що всі обмеження (5) виконуються строго відносно λ_0:
$$\frac{x_k^R-x_k}{x_k^R-x_k^L}\ge\lambda>\lambda_0,\ \forall k\in N. \qquad (9)$$

З (9) випливає, що для $\forall k\in N$ виконується нерівність $x_k<x_k^R-\lambda_0\left(x_k^R-x_k^L\right)$. Підсумовуючи ці нерівності по $k=\overline{1,n}$ і враховуючи (6), отримуємо, що $c<c$. Маємо протиріччя.

Отже, $\lambda=\lambda_0$ є розв'язком задачі (4)-(7). Твердження доведено.

Дослідження властивостей розв'язків

Для чітких методів розподілу є добре розроблена система аксіом, які їх характеризують [7]. Однією з таких аксіом є аксіома «рівного ставлення до рівних».

Говорять, що метод r задовольняє аксіомі Рівного Ставлення до Рівних, якщо для будь-яких двох агентів i та j з рівності їх початкових запасів випливає рівність їх часток витрат ($b_i=b_j\Rightarrow x_i=x_j, \forall i,j\in N$).

Твердження 3. Якщо деякий чіткий метод розподілу витрат задовольняє аксіомі Рівного Ставлення до Рівних, то його нечітке узагальнення також задовольняє цій аксіомі.

Доведення. Розглянемо деяких двох агентів $i,j\in N$, для яких $b_i=b_j$. Оскільки чіткий метод розподілу витрат задовольняє аксіомі Рівного Ставлення до Рівних, то для цих агентів виконується рівність $\hat{x}_i=\hat{x}_j$. З останньої рівності випливає, що $x_i^L=x_j^L$ і $x_i^R=x_j^R$. А отже, враховуючи формулу (8), виконується рівність $x_i=x_j$. Тобто нечітке узагальнення початкового методу розподілу витрат також задовольняє аксіомі Рівного Ставлення до Рівних. Твердження доведено.

Говорять, що метод r задовольняє аксіомі Узгодженості з Нулем (УзН), якщо агент з нульовим запасом грошей не впливає на розподіл витрат серед інших агентів:

$$b_i = 0 \Rightarrow r(N,c,b)_{[N\setminus i]} = r\left(N\setminus i, c, b_{[N\setminus i]}\right) \forall c, N, b, i.$$

Очевидно, що нечіткі узагальнення методів розподілу витрат, що задовольняють аксіомі (УзН), також задовольняють цій аксіомі.

Говорять, що метод r задовільняє аксіомі Незалежності від Шкали, якщо виконується умова: $r(N,kc,kb) = kr(N,c,b), k>0$. Дійсно, частка витрат кожного агента не повинна залежати від того, в якій валюті виражені витрати.

Твердження 3. Якщо деякий чіткий метод розподілу витрат задовольняє аксіомі Незалежності від Шкали, то його нечітке узагальнення також задовольняє цій аксіомі.

Доведення. Нехай для чіткого методу виконуються співвідношення: $\hat{x}'_i = k\hat{x}_i, \forall i \in N$, де $k>0$. Маємо:

$$\hat{x}_i'^{L} = (1-\alpha)\hat{x}'_i = k(1-\alpha)\hat{x}_i = k\hat{x}_i^{L}, \forall i \in N_1;$$
$$\hat{x}_i'^{L} = \hat{x}'_i = k\hat{x}_i = k\hat{x}_i^{L}, \forall i \in N_2;$$
$$\hat{x}_i'^{R} = \hat{x}'_i = k\hat{x}_i = k\hat{x}_i^{R}, \forall i \in N_1;$$
$$\hat{x}_i'^{R} = (1+\beta)\hat{x}'_i = k(1+\beta)\hat{x}_i = k\hat{x}_i^{R}, \forall i \in N_2.$$

Отже, $\hat{x}_i'^{R} = k\hat{x}_i^{R}, \hat{x}_i'^{L} = k\hat{x}_i^{L}, \forall i \in N$. Для λ_0 маємо:

$$\lambda'_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k'^{R} - c'}{\sum_{k=1}^{n} x_k'^{R} - \sum_{k=1}^{n} x_k'^{L}} = \frac{k\sum_{k=1}^{n} x_k^{R} - kc}{k\sum_{k=1}^{n} x_k^{R} - k\sum_{k=1}^{n} x_k^{L}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^{R} - c}{\sum_{k=1}^{n} x_k^{R} - \sum_{k=1}^{n} x_k^{L}} = \lambda_0.$$

Отже, для довільного агента i отримуємо: $x'_i = x_i'^{R} - \lambda'_0\left(x_i'^{R} - x_i'^{L}\right) = kx_i^{R} - k\lambda_0\left(x_i^{R} - x_i^{L}\right) = kx_i$. Твердження доведено.

Метод r задовольняє аксіомі Впорядкування, якщо виконується умова: $b_i \le b_j \Rightarrow x_i \le x_j$ для $i, j \in N$.

Твердження 4. Якщо деякий чіткий метод розподілу витрат задовольняє аксіомі Впорядкування, то його нечітке узагальнення також задовольняє цій аксіомі.

Доведення. Маємо, що $b_i \le b_j \Rightarrow \hat{x}_i \le \hat{x}_j$ для $i, j \in N$. Тоді для цих агентів $x_i^{L} \le x_j^{L}$, $x_i^{R} \le x_j^{R}$. Розглянемо різницю $x_j - x_i = x_j^{R} - \lambda_0\left(x_j^{R} - x_j^{L}\right) - x_i^{R} + \lambda_0\left(x_i^{R} - x_i^{L}\right) = \left(x_j^{R} - x_i^{R}\right)\left(1-\lambda_0\right) + \lambda_0\left(x_j^{L} - x_i^{L}\right) \ge 0$.

А отже $x_i \le x_j$. Твердження доведено.

Висновки

Основною ідеєю нечітких узагальнень методів розподілу, що пропонуються, є поділ множини агентів на дві підмножини, де агенти із першої підмножини платять менше своєї частки витрат, а агенти із другої - покривають утворений дефіцит. Дана ідея фактично використовується у прогресивному оподаткуванні. Оскільки розв'язок нечіткої задачі розподілу витрат завжди існує і може бути описаний аналітично, то такі узагальнення є придатними для застосування на практиці. Більше того, вони дозволяють враховувати не тільки нечіткість реальних даних, але й нерівність між агентами.

Список використаних джерел

1. *O'Neill B.* A problem of rights arbitration from the Talmud. - Mathematical Social Sciences, 2, 1982. - pp. 345-371.
2. *Aumann R. and Mashler M.* Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. - Journal of Economic Theory, 36, 1985, - pp. 195-213.
3. *Young, H.P.* Distributive justice in taxation. - Journ. of Econ.Theory, 1988, - pp. 321-335.
4. *William Thomson.* Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: an update, Working Papers 578, University of Rochester, 2013. – pp.157-182.
5. *Voloshyn O., Mashchenko S.* Decision making models and methods.. - К.: «Taras Shevchenko National University of Kyiv», 2010. – 336 c. (in Ukr.).
6. *Herrero, C. and Villar A.* The Three Musketeers: four classical solutions to bankruptcy problems. - Mathematical Social Sciences, vol.42(3), 2001. - pp. 307-328.
7. *Moulin, H.* Axiomatic Cost and Surplus-Sharing // Working Papers 2001-06, Rice University, Department of Economics, 2001. – 152p.
8. *Moulin, H.* Axioms of cooperative decision making.- M: Mir, 1991. – 464p. (in Rus.).
9. *Voloshyn O., Laver V.* Generalization of Distributing Methods for Fuzzy Problems // "Information Theories & Applications", Vol. 20, Number 4, 2013. – P. 303-310.

Надійшла до редколегії 15.10.2013