УДК 519.21

Демченко І.Ю., асп.
Чечельницький О.А., к. ф.-м. н., доц.,

Стаціонарні характеристики мережевої моделі послідовної структури

Досліджено стаціонарний режим мережевої моделі послідовної структури. Отриманий ергодичний розподіл процесу обслуговування.

Ключові слова: мережева модель, двовимірний пуассонівський вхідний потік, ергодичний розподіл.

[1-2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, Київ, пр-т Глушкова 4д
E-mail: irinka_8891@mail.ru,
alex_che@voliacable.com

Demchenko I.Y., a Ph.D student
Chechelnitsky O.A., Ph.D, Ass.Prof.

Stationary characteristics of the network model of a consistent structure

The stationary regime of the network model of a consistent structure is investigated here .An ergodic distribution was obtained for the service proces .

Key Words: network model, bivariate Poisson input flow, ergodic distribution.

[1-2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d
E-mail: irinka_8891@mail.ru,
alex_che@voliacable.com

Статтю представив д.т.н., професор Акіменко В.В.

1.Опис моделі.

Розглянемо модель мережі Джексона з послідовно паралельною структурою, елементи (вузли) якої функціонують як багатоканальні системи обслуговування. Будемо передбачати, що мережа складається з трьох вузлів E_1, E_2, E_3, двоє з яких E_1 та E_2 мають можливість обміну вимог між собою, після чого вимоги надходять на третій вузол E_3 , який можна вважати виконує функції контролю роботи перших двох вузлів. Вхідний потік є двовимірним пуассонівським вхідним потоком вимог $(\nu_1(t),\nu_2(t))$ з параметрами $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $b > 0$. Вимоги з потоку $\nu_1(t)$ прибувають на перший вузол обслуговування E_1, а вимоги з потоку $\nu_2(t)$ прибувають на другий E_2. Третій вузол E_3 приймає вимоги, які закінчили обслуговування на перших двох вузлах E_1 та E_2. Нехай $\mu_i > 0, i = 1,2,3$ параметри показникових розподілів часу обслуговування відповідно в першій, другій та третій системі. Позначимо через $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$ число вимог, які обслуговуються відповідно в першій, другій і третій системі в момент часу t.

Як вже зазначалось, перші два вузли E_1 та E_2 можуть обмінюватися вимогами. Після обслуговування в першому вузлі E_1 вимога з ймовірністю p_{12} надходить на обслуговування до другого вузла E_2 або з ймовірністю p_{13} надходить на контрольний вузол E_3. Аналогічно, після обслуговування в другому вузлі E_2 вимога з ймовірністю p_{21} переходить на обслуговування до першого вузла E_1 або з ймовірністю p_{23} надходить на контрольний вузол E_3. Після вузла E_3 вимоги залишають мережу.

Теорема. Процес обслуговування $\left(X_1(t), X_2(t), X_3(t)\right)$ у відкритій мережі $\left(E_1, E_2, E_3\right)$ з двовимірним пуассонівським вхідним потоком вимог $\nu(t)$ має ергодичний розподіл з генератрисою наступного вигляду:

$$\phi(z_1,z_2,z_3) = Mz_1^{X_1}z_2^{X_2}z_3^{X_3} =$$
$$= \exp\left\{-(a_1+c_1)(1-z_1)-(a_2+c_2)(1-z_2)- c_3(1-z_3)-c_4(1-z_1z_2)-c_5(1-z_1z_3)-c_6(1-z_2z_3)- -c_7(1-z_1^2)-c_8(1-z_2^2)-c_9(1-z_3^2)\right\}$$

Константи a_1 і a_2 мають вигляд: $a_1 = \theta_1/\mu_1$, $a_2 = \theta_2/\mu_2$, вектор $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ є розв'язком рівняння $\theta=\lambda+\theta P$, де $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$ і P є матрицею переходів по вузлах E_1 та E_2.

Константи c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 визначаються як:

$$c_1=\frac{\eta_1}{\mu_1}-b\frac{\mu_1+\mu_2 p_{21}}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})},$$

$$c_2=\frac{\eta_2}{\mu_2}-b\frac{\mu_2+\mu_1 p_{12}}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})},$$

$$c_3=\frac{1}{\mu_3}(\mu_1 p_{13}c_1+\mu_2 p_{23}c_2+2\mu_3 c_9)$$

$$c_4=\frac{b}{(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})},$$

$$c_5=-\frac{\mu_1\mu_2 p_{21}+\mu_2(\mu_2+\mu_3)}{(\mu_1+\mu_2)(\mu_1\mu_2 p_{12}p_{21}-(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3))}$$

$$c_6=-\frac{\mu_1\mu_2 p_{12}+\mu_1(\mu_1+\mu_3)}{(\mu_1+\mu_2)(\mu_1\mu_2 p_{12}p_{21}-(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3))}$$

$$c_7=\frac{\mu_2 p_{21}b}{2\mu_1(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})}$$

$$c_8=\frac{\mu_1 p_{12}b}{2\mu_2(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})}$$

$$c_9=\frac{1}{2\mu_3}\{\mu_1 p_{13}c_5+\mu_2 p_{23}c_6\}$$

Де вектор $\eta=(\eta_1,\eta_2)$ є розв'язком системи рівнянь $\eta(I-P)=b$, $b=(b,b)$.

Доведення теореми.

Нехай $\xi(t)$, $t\ge 0$ - ланцюг Маркова з інфінітезімальною матрицею $Q=\|q_{ij}\|_{i,j=1}^4$, елементи якої мають наступний вигляд:

$$q_{ij}=\begin{cases}-\mu_i,\ i=1,2,3\\ \mu_i p_{ij,}\ i\ne j,\ i=1,2,3;\ j=1,2,3,4.\\ 0,\ i=4,\ j=1,2,3,4.\end{cases}$$

Через $p_{ij}(t)=P\{\xi(t)=j/\xi(0)=i\}$ будемо позначати ймовірності переходів ланцюга $\xi(t)$.

Введемо до розгляду два сімейства незалежних трьохвимірних випадкових величин з наступними розподілами. Трьохвимірна випадкова величина $\chi_k^1(t)$ нехай приймає значення $(1,0,0)$ з ймовірністю $p_{11}(t)$, значення $(0,1,0)$ з ймовірністю $p_{12}(t)$, значення $(0,0,1)$ з ймовірністю $p_{13}(t)$ та значення $(0,0,0)$ з ймовірністю $p_{14}(t)$. Випадкова величина $\chi_k^2(t)$ приймає значення $(1,0,0)$ з ймовірністю $p_{21}(t)$, значення $(0,1,0)$ з ймовірністю $p_{22}(t)$, значення $(0,0,1)$ з ймовірністю $p_{23}(t)$ та значення $(0,0,0)$ з ймовірністю $p_{24}(t)$.

Тоді з ймовірністю 1 для процесу обслуговування має місце наступне представлення:

$$(X_1(t),X_2(t),X_3(t))=\sum_{k=1}^{y_1(t)}\chi_k^1(t-t_k^1)+$$

$$+\sum_{k=1}^{y_2(t)}\chi_k^2(t-t_k^2)+\sum_{k=1}^{y_3(t)}\{\chi_k^1(t-t_k^3)+\chi_k^2(t-t_k^3)\},$$ де

$y_1(t)$, $y_2(t)$ та $y_3(t)$ - пуассоніські процеси з параметрами λ_1, λ_2 і b відповідно, $t_k^i, k=1,2,\ldots$, $i=1,3$ є моментами приходу вимог відповідно з потоку $y_i(t)$, $i=1,3$. Введемо до розгляду трьохвимірну генератрису вектора $(X_1(t),X_2(t),X_3(t))$:

$$\varphi(z_1,z_2,z_3,t)=Mz_1^{X_1(t)}z_2^{X_2(t)}z_3^{X_3(t)}.$$

Використовуючи властивості умовного математичного сподівання, можемо записати: $\varphi(z_1,z_2,z_3,t)=$

$$=M\left\{M\left\{z_1^{X_1(t)}z_2^{X_2(t)}z_3^{X_3(t)}/t_1,\ldots,t_{\nu(t)}\right\}\right\}=$$

$$=M\prod_{k=1}^{y_1(t)}A_1(z_1,z_2,z_3,t-t_k^1)M\prod_{k=1}^{y_2(t)}A_2(z_1,z_2,z_3,t-t_k^2)\times$$

$$\times M\prod_{k=1}^{y_3(t)}A_1(z_1,z_2,z_3,t-t_k^3)A_2(z_1,z_2,z_3,t-t_k^3),$$

де при $i=1,2$

$$A_i(z_1,z_2,z_3,t)=p_{i4}(t)+z_1p_{i1}(t)+z_2p_{i2}(t)+z_3p_{i3}(t)$$

Для знаходження генератрис з останнього виразу знову скористаємося умовними математичними сподіваннями, але стосовно величини $y_i(t)$, $i=1,3$. Тоді можемо записати:

$$\varphi(z_1,z_2,z_3,t)=$$

$$=\varphi_1(z_1,z_2,z_3,t)\varphi_2(z_1,z_2,z_3,t)\varphi_3(z_1,z_2,z_3,t),$$

де $\varphi_1(z_1,z_2,z_3,t)=$

$$=M\left\{M\left\{\prod_{k=1}^{y_1(t)}A_1\left(z_1,z_2,z_3,t-t_k^1\right)/\,y_1(t)\right\}\right\}$$

$\varphi_2(z_1,z_2,z_3,t)=$

$$=M\left\{M\left\{\prod_{k=1}^{y_2(t)}A_2\left(z_1,z_2,z_3,t-t_k^2\right)/\,y_2(t)\right\}\right\}$$

$$\varphi_3(z_1,z_2,z_3,t)=M\left\{M\left\{\prod_{k=1}^{y_3(t)}A_1\left(z_1,z_2,z_3,t-t_k^3\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times A_2\left(z_1,z_2,z_3,t-t_k^3\right)/\,y_3(t)\right\}\right\}$$

При фіксації числа стрибків пуассонівських процесів $y_i(t)$, $i=1,3$ на довільному інтервалі часу $[0,t]$, моменти стрибків ведуть себе як незалежні випадкові величини, які мають рівномірний на $[0,t]$ розподіл. Тоді ми отримаємо:

$$\varphi_1(z_1,z_2,z_3,t)=M\left\{\frac{1}{t}\int_0^t A_1(z_1,z_2,z_3,u)\,du\right\}^{y_1(t)},$$

$$\varphi_2(z_1,z_2,z_3,t)=M\left\{\frac{1}{t}\int_0^t A_2(z_1,z_2,z_3,u)\,du\right\}^{y_2(t)},$$

$\varphi_3(z_1,z_2,z_3,t)=$

$$=M\left\{\frac{1}{t}\int_0^t A_1(z_1,z_2,z_3,u)A_2(z_1,z_2,z_3,u)\,du\right\}^{y_3(t)}$$

В останніх виразах коефіцієнт $\dfrac{1}{t}$ є щільністю рівномірного на проміжку $[0,1]$ розподілу.

Після відповідних перетворень з генератрисами $A_1(z_1,z_2,u)$ та $A_2(z_1,z_2,u)$ функція $\varphi(z_1,z_2,t)$ матиме наступний вигляд:

$$\varphi(z_1,z_2,t)=\exp\left\{-\left(a_1(t)+c_1(t)\right)(1-z_1)-\right.$$
$$-\left(a_2(t)+c_2(t)\right)(1-z_2)-c_3(t)(1-z_3)-$$
$$-c_4(t)(1-z_1z_2)-c_5(t)(1-z_1z_3)-c_6(t)(1-z_2z_3)-$$
$$\left.-c_7(t)\left(1-z_1^2\right)-c_8(t)\left(1-z_2^2\right)-c_9(t)\left(1-z_3^2\right)\right\},$$ де

$$a_1(t)=\left(\lambda_1\int_0^t p_{11}(u)\,du+\lambda_2\int_0^t p_{21}(u)\,du\right);$$

$$a_2(t)=\left(\lambda_1\int_0^t p_{12}(u)\,du+\lambda_2\int_0^t p_{22}(u)\,du\right);$$

$$c_1(t)=b\int_0^t\left(p_{14}(u)p_{21}(u)+p_{11}(u)p_{24}(u)\right)du;$$

$$c_2(t)=b\int_0^t\left(p_{14}(u)p_{22}(u)+p_{12}(u)p_{24}(u)\right)du;$$

$$c_3(t)=b\int_0^t\left(p_{13}(u)p_{24}(u)+p_{23}(u)p_{14}(u)\right)du;$$

$$c_4(t)=b\int_0^t\left(p_{11}(u)p_{22}(u)+p_{12}(u)p_{21}(u)\right)du;$$

$$c_5(t)=b\int_0^t\left(p_{11}(u)p_{23}(u)+p_{13}(u)p_{21}(u)\right)du;$$

$$c_6(t)=b\int_0^t\left(p_{13}(u)p_{22}(u)+p_{12}(u)p_{23}(u)\right)du$$

$$c_7(t)=b\int_0^t p_{11}(u)p_{21}(u)\,du;$$

$$c_8(t)=b\int_0^t p_{12}(u)p_{22}(u)\,du;$$

$$c_9(t)=b\int_0^t p_{13}(u)p_{23}(u)\,du.$$

Для знаходження границі при $t\to+\infty$ функції $\varphi(z_1,z_2,z_3,t)$ треба відповідні границі останніх інтегралів.

Запишемо систему диференційних рівнянь:

$$\begin{cases}p'_{11}(t)=-\mu_1p_{11}(t)+\mu_2p_{21}p_{12}(t)\\ p'_{12}(t)=\mu_1p_{12}p_{11}(t)-\mu_2p_{12}(t)\\ p'_{21}(t)=\mu_2p_{21}p_{22}(t)-\mu_1p_{21}(t)\\ p'_{22}(t)=-\mu_2p_{22}(t)+\mu_1p_{12}p_{21}(t)\end{cases}$$

Взявши інтеграл від 0 до $+\infty$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}-1=-\mu_1p_{11}^*+\mu_2p_{21}p_{12}^*\\ 0=\mu_1p_{12}p_{11}^*-\mu_2p_{12}^*\\ 0=\mu_2p_{21}p_{22}^*-\mu_1p_{21}^*\\ -1=-\mu_2p_{22}^*+\mu_1p_{12}p_{21}^*\end{cases},$$

де $p_{ij}^*=\int_0^{+\infty}p_{ij}(t)\,dt$. Позначимо через P^* матрицю з елементами p_{ij}^* : $P^*=\left\|p_{ij}^*\right\|_{i,j=1}^2$. З останньої системи лінійних алгебраїчних рівнянь знаходимо: $P^* = (I-P)^{-1}\Delta^{-1}(\mu)$, де $I = \left\|\delta_{ij}\right\|_{i,j=1}^{2}$ - одинична матриця, $\Delta(\mu) = \left\|\delta_{ij}\mu_i\right\|_{i,j=1}^{2}$ - діагональна матриця, δ_{ij} - символ Кронекера. Тоді

$$a = (a_1, a_2) = \lambda P^* = \lambda (I-P)^{-1}\Delta^{-1}(\mu) = \left(\frac{\theta_1}{\mu_1}, \frac{\theta_2}{\mu_2}\right).$$

Позначимо через x_i, $i = 1,4$:

$$x_1 = \int_0^{+\infty} p_{11}(u) p_{22}(u) du, \quad x_2 = \int_0^{+\infty} p_{12}(u) p_{21}(u) du$$

$$x_3 = \int_0^{+\infty} p_{11}(u) p_{21}(u) du, \quad x_4 = \int_0^{+\infty} p_{12}(u) p_{22}(u) du.$$

З системи Колмогорова знайдемо перехідні ймовірності $p_{11}(t)$, $p_{12}(t)$, $p_{22}(t)$ і $p_{21}(t)$:

$$p_{11}(t) = e^{s_1 t}\frac{s_1+\mu_2}{s_1-s_2} - e^{s_2 t}\frac{s_2+\mu_2}{s_1-s_2}$$

$$p_{12}(s) = e^{s_1 t}\frac{\mu_1 p_{12}}{s_1-s_2} - e^{s_2 t}\frac{\mu_1 p_{12}}{s_1-s_2}$$

$$p_{22}(s) = e^{s_1 t}\frac{s_1+\mu_1}{s_1-s_2} - e^{s_2 t}\frac{s_2+\mu_1}{s_1-s_2}$$

$$p_{21}(s) = e^{s_1 t}\frac{\mu_2 p_{21}}{s_1-s_2} - e^{s_2 t}\frac{\mu_2 p_{21}}{s_1-s_2}, \quad \text{де}$$

$$s_{1,2} = \frac{-(\mu_1+\mu_2) \pm \sqrt{(\mu_1-\mu_2)^2 + 4\mu_1\mu_2 p_{12} p_{21}}}{2}$$

Підрахувавши відповідні інтеграли, знайдемо значення констант x_1, x_2, x_3 та x_4. Це дає можливість записати:

$$c_4 = \left((\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})\right)^{-1},$$

$$x_3 = c_4 \mu_2 p_{21} (2\mu_1)^{-1}, x_4 = c_4 \mu_1 p_{12} (2\mu_2)^{-1}.$$

Константи розподілу c_7, c_8 матимуть вигляд:

$$c_7 = \frac{\mu_2 p_{21} b}{2\mu_1(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})},$$

$$c_8 = \frac{\mu_1 p_{12} b}{2\mu_2(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})}$$

В свою чергу для констант c_1, c_2 граничного розподілу можемо записати наступний вираз:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (b,b)P^* - \begin{pmatrix} c_4 \\ c_4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} c_7 \\ c_8 \end{pmatrix}, \text{ або}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (b,b)(I-P)^{-1}\Delta^{-1}(\mu) - \begin{pmatrix} c_4 \\ c_4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} c_7 \\ c_8 \end{pmatrix}$$

Нехай вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ є розв'язком системи рівнянь $\eta(I-P) = b$, де $b = (b,b)$. Тоді

$$c_1 = \frac{\eta_1}{\mu_1} - b\frac{\mu_1+\mu_2 p_{21}}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})},$$

$$c_2 = \frac{\eta_2}{\mu_2} - b\frac{\mu_2+\mu_1 p_{12}}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})}$$

Далі, скориставшись аналогічним підходом, знайдемо значення констант c_5, c_6, c_9:

$$c_5 = -\frac{\mu_1\mu_2 p_{21} + \mu_2(\mu_2+\mu_3)}{(\mu_1+\mu_2)\left(\mu_1\mu_2 p_{12}p_{21} - (\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3)\right)}$$

$$c_6 = -\frac{\mu_1\mu_2 p_{12} + \mu_1(\mu_1+\mu_3)}{(\mu_1+\mu_2)\left(\mu_1\mu_2 p_{12}p_{21} - (\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3)\right)}$$

$$c_9 = \frac{1}{2\mu_3}\left\{\mu_1 p_{13} c_5 + \mu_2 p_{23} c_6\right\}.$$

Теорема доведена.

Зробимо ряд висновків. Структура процесу обслуговування в стаціонарному режимі налічує дев'ять незалежних компонент. Це означає, що в стаціонарному режимі компоненти процесу обслуговування мають наступну будову: $X_1 = x_1 + x_4 + x_5 + 2x_7$, $X_2 = x_2 + x_4 + x_6 + 2x_8$, $X_3 = x_3 + x_5 + x_6 + 2x_9$, де $x_i, i = 1,9$ незалежні випадкові величини, розподілені за законами Пуассона з параметрами: $a_1 + c_1$ для x_1, $a_2 + c_2$ для x_2 та c_i для x_i, $i = \overline{3,9}$. А тому наша модель в процесі свого функціонування послаблює залежність між компонентами потоків вимог.

Список використаних джерел

1. Grifiths R.S., Milne R.K. A class of bivariate Poisson process //Multivar Anul. Issue 8. - 1978. - №3. - P.380-396.
2. Anisimov V.V., Lebedev E.A. Stochastic service network. - K.: Lybyd, 1992. - 205p. (in Russian)
3. Chechelnitsky A.A. Kucherenko O.V. Diffusion properties of two-dimensional systems with Erlang Poisson flow requirements //Computational and Applied Mathematics. - 2010. - №2(101). - P.150-155 (in Russian)

Надійшла до редакції 02.12.2013