УДК 510.584

Олександр О. Лялецький , к.ф.-м.н.

Елементарне доведення теореми нормалізації для $\beta\eta$-редукції

В статті будується нове доведення теореми нормалізації для βη-редукції. Це доведення є більш прозорим та коротким, ніж оригінальне доведення, проведене Я.Клопом.

Ключові слова: безтипове λ-числення, βη-редукція, стратегія лівої редукції, теорема нормалізації, теорема про βη-нормальну форму.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: *aal@unicyb.kiev.ua*

Alexandre A. Lyaletsky, PhD (Physics and Mathematics)

An elementary proof of the Normalization theorem for $\beta\eta$-reduction

The paper contains a new proof of the Normalization theorem for βη-reduction. The new proof is much more transparent and shorter, in comparison with J.W.Klop's original proof.

Key Words: untyped λ-calculus, βη-reduction, leftmost strategy, Normalization theorem, βη-normal form theorem.

Kiev National Taras Shevchenko university, 03680, Kyiv, Glushkov st., 4d, e-mail: *aal@unicyb.kiev.ua*

Статтю представив д.т.н., проф. Кудин В.І.

Розглядається безтиповий варіант λ-числення. Всі базові визначення, результати та стандартні позначення, які використовуються в цій роботі, можуть бути знайдені в монографії [1].

Нагадаємо, що *стратегією лівої $\beta\eta$-редукції* називається однокрокова $\beta\eta$-стратегія $f_{\beta\eta}^{left}$, яка в кожному λ-термі t згортає найбільш зовнішнє з найлівіших входжень $\beta\eta$-редексів в t (якщо t містить хоча б одне таке входження). Аналогічно, *стратегія f_{β}^{left} лівої β-редукції* визначається як така β-стратегія, яка в кожному λ-термі t згортає найлівіше входження β-редекса в t (зауважимо, що в останньому визначені умова про найбільшу зовнішність β-редекса може бути опущена, оскільки кожний β-редекса однозначно визначається розташуванням свого першого символу в λ-термі t).

Також нагадаємо, що довільна R-стратегія f називається *нормалізуючою*, якщо з того, що λ-терм t має R-нормальну форму, випливає, що терм $f^n(t)$ є R-нормальною формою для деякого достатньо великого натурального числа $n > 0$.

В 1980 р. Я.Клоп отримав наступний відомий результат.

Теорема нормалізації для $\beta\eta$-редукції. $f_{\beta\eta}^{left}$ *є нормалізуючою $\beta\eta$-стратегією.*

Оригінальне доведення цієї теореми (див. [2, стор. 279-290]), проведене Я.Клопом, є громіздким та технічно дуже складним. Ми побудуємо інше, більш коротке та прозоре доведення на основі наступних відомих результатів:

Теорема нормалізації для β-редукції. f_{β}^{left} *є нормалізуючою β-стратегією* (див. [1, стор. 329-329] або [3]).

Теорема про $\beta\eta$-нормальну форму. *Довільний λ-терм має $\beta\eta$-нормальну форму тоді і тільки тоді, коли він має β-нормальну форму* (див. [1, стор. 384-386] або [4]).

Основна ідея нашого доведення полягає в наступному. Оскільки поняття η-редукції є сильно нормалізуємим, природно припустити, що теорему нормалізації для $\beta\eta$-редукції можна якимось чином отримати як наслідок теореми нормалізації для β-редукції. Більш конкретно, припускаючи, що теорема нормалізації для $\beta\eta$-редукції є хибною, за допомогою теореми про $\beta\eta$-нормальну форму ми побудуємо такий λ-терм, який має β-нормальну форму, але f_{β}^{left}-редукційний ланцюг якого не містить жодної β-нормальної форми – це, очевидно, суперечить теоремі нормалізації для β-редукції.

Для того, щоб провести цю побудову, нам знадобляться деякі допоміжні технічні результати. Для їх зручного формулювання введемо наступні позначення.

a) Якщо Δ_0 та Δ_1 є входженнями $\beta\eta$-редексів в деякий λ-терм t, то запис $\Delta_0 < \Delta_1$ означає, що Δ_0 розташований в t строго лівіше, ніж Δ_1.

b) Нехай t та t' – довільні λ-терми. Замість $f^{left}_{\beta\eta}(t) = t'$ та $f^{left}_{\beta}(t) = t'$ ми будемо писати, відповідно, $t \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{} t'$ та $t \xrightarrow[\beta\text{-}left]{} t'$. Запис $t \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{}_{\beta} t'$ означає, що виконуються обидва співвідношення $t \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{} t'$ та $t \to_\beta t'$.

c) Зафіксуємо деякий однокроковий $\beta\eta$-редукційний ланцюг $p \xrightarrow{\triangle}_{\beta\eta} q$. Якщо w є входженням $\beta\eta$-редекса в p і якщо він має єдиний залишок в q, то цей залишок буде позначатися через $\overrightarrow{w}$. Аналогічно, якщо w є входженням $\beta\eta$-редекса в q й існує таке єдине входження $\beta\eta$-редекса в p, єдиним залишком якого є w, то це входження буде позначатися через $\overleftarrow{w}$ (іншими словами, $\overleftarrow{w}$ – це єдиний "ко-залишок" входження w).

Лема 1. *Нехай задано якийсь двокроковий $\beta\eta$-редукційний ланцюг вигляду*

$$u \xrightarrow{\triangle_\eta}_{\eta} v_0 \xrightarrow[\beta\text{-}left]{\triangle^0_\beta} v_1 \ ,$$

причому $\triangle_\eta < \overleftarrow{\triangle}^0_\beta$. Тоді, для деякого терму v_0', має місце наступна діаграма:

$$\begin{tikzcd}
& u \arrow[dl, dashed, "\beta\text{-}left", "\beta"'] \arrow[dr, "\eta"] \arrow[dd, phantom, "\overleftarrow{\triangle}^0_\beta \quad \triangle_\eta"] & \\
v_0' \arrow[dr, dashed, "\eta"'] \arrow[rr, phantom, "\overrightarrow{\triangle}_\eta \quad \triangle^0_\beta"'] & & v_0 \arrow[dl, "\beta\text{-}left", "\beta"'] \\
& v_1 &
\end{tikzcd} ,$$

де $\overleftarrow{\triangle}^0_\beta$ та $\overrightarrow{\triangle}_\eta$ є входженнями β- та η-редексів у відповідні λ-терми. Більш того, якщо терм v_1 має найлівіше входження β-редекса, то $\overrightarrow{\triangle}_\eta < \overleftarrow{\triangle}^1_\beta$ в термі v_0'.

Доведення. Оскільки $\triangle_\eta < \overleftarrow{\triangle}^0_\beta$, можливі тільки два наступні випадки: $\triangle_\eta \cap \overleftarrow{\triangle}^0_\beta = \varnothing$ або $\triangle_\eta \supset \overleftarrow{\triangle}^0_\beta$. Але в обох випадках можна просто змінити порядок згортання редексів, що розглядаються: спочатку в u згорнути $\overleftarrow{\triangle}^0_\beta$ і таким чином отримати v_0', а потім в v_0' згорнути $\overrightarrow{\Delta}_\eta$. Зрозуміло, що результуючим λ-термом знову є v_1. Друге твердження очевидне. □□

Будемо писати $t \underset{<,\ \neq\varnothing}{\twoheadrightarrow}_{\eta} t'$, якщо існує багатокроковий η-редукційний ланцюг вигляду

$$t \equiv t_0 \xrightarrow{\triangle_0}_{\eta} t_1 \xrightarrow{\triangle_1}_{\eta} \ldots \xrightarrow{\triangle_{n-1}}_{\eta} t_n \equiv t' \ ,$$

в якому згортається хоча б один η-редекс і в якому $\triangle_i < \overleftarrow{\triangle}_{i+1}$ для будь-якого i. Зауважимо, що якщо для якихось λ-термів t та t' має місце $t \underset{<,\ \neq\varnothing}{\twoheadrightarrow}_{\eta} t'$, то, очевидно, існує рівно один η-редукційний ланцюг зазначеного вигляду.

Через $\underset{\beta\text{-}left \neq \varnothing}{\twoheadrightarrow}$ позначимо транзитивне замикання відношення $\xrightarrow[\beta\text{-}left \neq \varnothing]{}$. Отже, для будь-яких λ-термів t та t' співвідношення $t \xrightarrow[\beta\text{-}left \neq \varnothing]{} t'$ означає, що $(f^{left}_{\beta})^n(t) = t'$ для деякого натурального числа $n > 0$, причому число n визначається за термами t та t' однозначно.

Лема 2. *Нехай задано двокроковий $\beta\eta$-редукційний ланцюг вигляду*

$$u \underset{<,\ \neq\varnothing}{\twoheadrightarrow}_{\eta} v_0 \underset{\beta\text{-}left \neq\varnothing}{\twoheadrightarrow}_{\beta} v_1 \ ,$$

причому $\triangle_{n-1} < \overleftarrow{\triangle}_\beta$, де $\triangle_\beta$ позначає найлівіше входження β-редекса в v_0, а $\triangle_{n-1}$ – останній згортаємий η-редекс в η-редукційному ланцюгу, який відповідає співвідношенню $u \underset{<,\ \neq\varnothing}{\twoheadrightarrow}_{\eta} v_0$. Тоді має місце наступна діаграма:

$$\begin{tikzcd}
& u \arrow[dl, dashed, "\beta\text{-}left \neq \varnothing"'] \arrow[dr, "{<,\ \neq\varnothing}", "\eta"'] & \\
v_0' \arrow[dr, dashed, "{<,\ \neq\varnothing}"', "\eta"] & & v_0 \arrow[dl, "\beta\text{-}left \neq \varnothing"] \\
& v_1 &
\end{tikzcd}$$

для деякого λ-терму v_0', причому якщо $\triangle$ – таке *входження $\beta\eta$-редекса в терм v_1, що останній β-редекс, який згортається в редукційному ланцюгу $v_0 \underset{\beta\text{-}left \neq\varnothing}{\twoheadrightarrow} v_1$, розташований строго лівіше, ніж $\overleftarrow{\triangle}$, має найлівіше, то останній η-редекс, який згортається в редукційному ланцюгу $v_0' \underset{<,\ \neq\varnothing}{\twoheadrightarrow}_{\eta} v_1$, розташований строго лівіше, ніж $\overleftarrow{\triangle}$.*

Доведення. Перше твердження є наслідком ітеративного застосування леми 1. Друге твердження очевидне. □□

Нове доведення теореми нормалізації для $\beta\eta$-редукції. Припустимо супротивне. Тоді існує такий λ-терм t, який має $\beta\eta$-нормальну форму, але $f_{\beta\eta}^{left}$-редукційний ланцюг

$$t \equiv t_0 \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{} t_1 \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{} t_2 \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{} \cdots \qquad (1)$$

якого не містить жодного терма, який є $\beta\eta$-нормальною формою. Зауважимо, що з теореми про $\beta\eta$-нормальну форму випливає, що t, а отже й кожний терм t_i мають якісь β-нормальні форми.

Оскільки стратегія $f_{\beta\eta}^{left}$ є однокроковою, в цьому ланцюгу кожний терм t_{i+1} утворюється з терма t_i згортанням або β-, або η-редекса. Оскільки поняття η-редукції є сильно нормалізованим, в ланцюгу (1) згортається нескінчена кількість β-редексів. Отже, можливі тільки два наступні випадки, для кожного з яких ми знайдемо в (1) терм t_i, який не має β-нормальної форми, і таким чином отримаємо суперечність.

1. В ланцюгу (1), починаючи з деякого терма t_j, згортаються тільки β-редекси. В цьому випадку хвіст ланцюга (1), який починається з терма t_j, можна переписати в наступному вигляді:

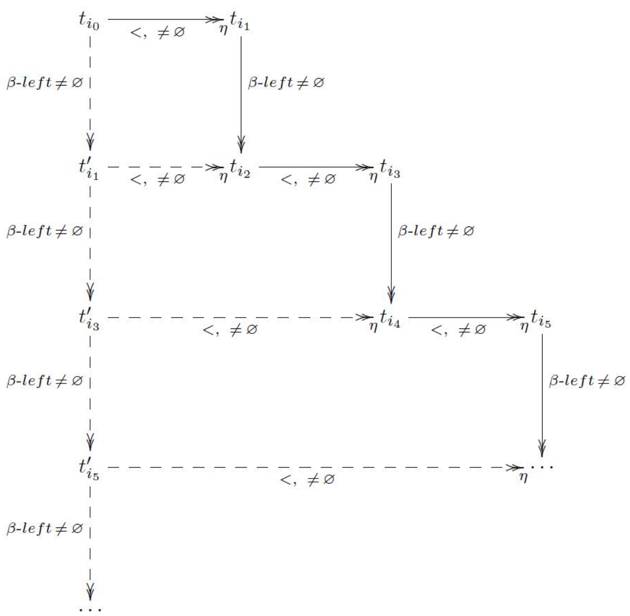
$$t_j \xrightarrow[\beta\text{-}left]{} t_{j+1} \xrightarrow[\beta\text{-}left]{} t_{j+2} \xrightarrow[\beta\text{-}left]{} \cdots ,$$

оскільки кожний $f_{\beta\eta}^{left}$-ланцюг, в якому згортаються тільки β-редекси, одночасно є й f_{β}^{left}- ланцюгом. За теоремою нормалізації для β-редукції терм t_j не має β-нормальної форми.

2. В ланцюгу (1) згортається нескінчена кількість η-редексів. Знову приймаючи до уваги, що кожний $f_{\beta\eta}^{left}$- ланцюг, в якому згортаються тільки β-редекси, також є й f_{β}^{left} - ланцюгом, (1) можна переписати у вигляді:

$$t \equiv t_0 \twoheadrightarrow_{\beta} t_{i_0} \xrightarrow[<,\ \neq\varnothing]{}\!\!\!\!\twoheadrightarrow_{\eta} t_{i_1} \xrightarrow[\beta\text{-}left\neq\varnothing]{}\!\!\!\!\twoheadrightarrow t_{i_2} \xrightarrow[<,\ \neq\varnothing]{}\!\!\!\!\twoheadrightarrow_{\eta} t_{i_3} \xrightarrow[\beta\text{-}left\neq\varnothing]{}\!\!\!\!\twoheadrightarrow t_{i_4} \xrightarrow[<,\ \neq\varnothing]{}\!\!\!\!\twoheadrightarrow_{\eta} \cdots$$

За допомогою леми 2 ми можемо з хвоста цього ланцюга, що починається термом t_{i_0}, побудувати наступну діаграму:



Ліва сторона цієї фігури є нескінченим f_{β}^{left}-ланцюгом, звідки з теореми нормалізації для β-редукції випливає, що t_{i_0} не має β-нормальної форми.

Теорема доведена повністю. □□

Висновки. В роботі побудовано нове доведення теореми нормалізації для $\beta\eta$-редукції. Це доведення використовує тільки елементарні методи й є значно більш коротким та прозорим у порівнянні з оригінальним доведенням Я.Клопа.

Список використаних джерел

1. *Barendregt H.P.* The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics. – Moscow: Mir., 1985.– 606 p. (in Russion)
2. *Klop J.W.* Combinatory reduction systems (PhD Thesis). – Utrecht university, 1980. – 323 p.
3. *Curry H.B., Feys R., Craig W.* Combinatory logic (Vol.1). – Amsterdam: North-Holland, 1958. – 417 p.
4. *Curry H.B., Hindley J., Seldin J.P.* Combinatory logic (Vol. 2). – Amsterdam: North-Holland, 1972. – 520 p.

Надійшла до редколегії 09.12.2013