УДК 004.42:510.69

Нікітченко М.С., д. ф.-м. н., проф.,
Шкільняк С.С., д. ф.-м. н.

Вироджені семантичні моделі першопорядкових логік

Досліджено семантичні моделі першопорядкових логік квазіарних предикатів із порожньою предметною областю. Описано вироджені алгебри та вироджені композиційні системи. Розглянуто композиції функцій та предикатів, заданих на порожній множині, досліджено особливості композицій квантифікації.

Ключові слова: логіка, предикат, семантична модель, квантор.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр. Глушкова 4д
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

M.S. Nikitchenko, Doctor of Sciences (Phys.-Math.), Professor,
S.S. Shkilniak, Doctor of Sciences (Phys.-Math.).

Degenerate semantic models of first-order logics

We study semantic models of first-order logics of quasiary predicates with the empty universe. Degenerate algebras and degenerate composition systems are described. Compositions of functions and predicates over the empty set are considered, properties of quantifiers are studied.

Key words: logic, predicate, semantic model, quantifier.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Семантичні моделі класичної логіки предикатів передбачають наявність непорожніх предметних областей, тобто область інтерпретації (множина базових даних) має бути непорожньою. Як зазначено в [1], допущення порожніх предметних областей (див., напр., [2]) в цілому не дає особливих переваг. На підтвердження цього можна зауважити, що при формальному, теоретико-множинному трактуванні функцій, розгляд довільних функцій на $\varnothing$, зокрема, предикатів на $\varnothing$, дає єдину функцію $f_\varnothing$ із порожнім графіком. Тому модель мови із порожнім носієм $\varnothing$ виявляється тривіальною, вона взагалі не містить тотальних предикатів. Це пояснює, чому в класичній логіці однозначних тотальних предикатів моделі мови із порожнім носієм зазвичай не розглядаються.

Справа дещо змінюється при переході до логік квазіарних предикатів. Такі предикати – це часткові функції із нетривіальною множиною істиннісних значень $\{T, F\}$. Тому доцільно постулювати розширене трактування предикатів на $\varnothing$. Застосування (аплікацію) довільного предиката, заданого на $A = \varnothing$, будемо трактувати як імпульс (спонукання) до вироблення значення. Усі такі імпульси однакові (це $\varnothing$), тому для однозначного предиката можливими результатами його застосування до $\varnothing$ можуть бути T, F або невизначеність (відсутність результату); для неоднозначного предиката додається можливість одночасного T та F. Водночас такий розгляд власне функцій на A, тобто функцій вигляду ${}^VA \to A$, при $A = \varnothing$ дає єдину всюди невизначену функцію $f_\varnothing$.

Метою пропонованої роботи є дослідження семантичних моделей першопорядкових логік із порожньою предметною областю при розширеному трактуванні предикатів.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [3–5]. Будемо дотримуємось позначень цих робіт.

1. Вироджені алгебри та композиційні системи

V-іменною множиною (V-ІМ) над A називають довільну часткову однозначну функцію $\delta : V \to A$ із множини V предметних імен у множину A предметних значень.

Множину всіх V-ІМ над A позначають ${}^VA$.

V-квазіарним предикатом на A називають довільну (часткову неоднозначну, взагалі кажучи) функцію вигляду $P : {}^VA \to \{T, F\}$, де $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

Функції вигляду $P : {}^VA \to A$ називають V-квазіарними функціями на A.

Клас V-квазіарних предикатів на A позначимо як Pr^A, клас V-квазіарних функцій на A – як Fn^A.

Областю істинності та областю хибності предиката $P : {}^VA \to \{T, F\}$ називають множини

$$T(P) = \{d \in {}^VA \mid T \in P(d)\},$$
$$F(P) = \{d \in {}^VA \mid F \in P(d)\}.$$

© М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк, 2014

V-квазіарний предикат P на A:

– тотожно істинний, якщо $T(P) = {}^{V}A$ і $F(P) = \varnothing$;

– тотожно хибний, якщо $T(P) = \varnothing$ і $F(P) = {}^{V}A$;

– всюди невизначений, якщо $T(P) = F(P) = \varnothing$;

– тотально насичений, якщо $T(P) = F(P) = {}^{V}A$.

Тотожно істинний предикат будемо позначати як T, тотожно хибний – як F, всюди невизначений – як $\perp$, тотально насичений – як TF.

Семантичними моделями першопорядкових композиційно-номінативних логік (КНЛ) є [3] композиційні системи квазіарних предикатів вигляду $({}^{V}A, Fn^{A}\cup Pr^{A}, C)$, де C задається множиною базових композицій відповідного рівня. Кожна така композиційна система задає дві алгебри: алгебру даних $(A, Fn^{A}\cup Pr^{A})$ та композиційну предикатну алгебру $(Fn^{A}\cup Pr^{A}, C)$. Терми композиційної алгебри можуть трактуватися як формули мови КНЛ відповідного рівня.

Для КНЛ кванторного рівня, або чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ), маємо $Fn^{A} = \varnothing$.

Наведемо множини базових композицій першопорядкових КНЛ відповідного рівня:

– $\{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ для ЧКНЛ;

– $\{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, =_{xy}\}$ для ЧКНЛ з рівністю;

– $\{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \equiv_{xy}\}$ для ЧКНЛ із строгою рівністю;

– $\{\neg, \vee, \mathrm{S}^{\bar{v}}, 'x, \exists x\}$ для КНЛ функціонального рівня;

– $\{\neg, \vee, \mathrm{S}^{\bar{v}}, 'x, \exists x, =\}$ для КНЛ функціонально-екваційного рівня;

– $\{\neg, \vee, \mathrm{S}^{\bar{v}}, 'x, \exists x, \equiv\}$ для КНЛ функціонально-екваційного рівня із строгою рівністю.

Для ЧКНЛ також виділяють підрівні: ε-ЧКНЛ (ЧКНЛ із предикатами-індикаторами εz наявності значення для змінних); ЧКНЛРР (ЧКНЛ із розширеними реномінаціями); ε-ЧКНЛРР (поєднують можливості ЧКНЛРР та ε-ЧКНЛ).

Алгебру даних $(A, Fn^{A}\cup Pr^{A})$ назвемо виродженою, якщо її носій $A = \varnothing$.

У випадку, коли $A = \varnothing$, існує єдина ІМ – порожнє дане $\varnothing$.

Зрозуміло, що за умови $A = \varnothing$ маємо ${}^{V}A = \{\varnothing\}$.

Відомі операції над V-ІМ (див. [3, 5]) природним чином поширюються на порожнє дане $\varnothing$. Результатом їх застосування теж буде $\varnothing$. Звідси отримуємо (тут $X \subseteq V$): $\varnothing\cap\varnothing = \varnothing$, $\varnothing\cup\varnothing = \varnothing$, $\varnothing\backslash\varnothing = \varnothing$, $\varnothing\|_{X} = \varnothing$, $\varnothing\|_{-X} = \varnothing$, $\varnothing\nabla\varnothing = \varnothing$, $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\varnothing) = \varnothing$, $r_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\varnothing) = \varnothing$.

Для кожного часткового однозначного предиката можливими результатами його застосування до $\varnothing$ можуть бути T, F, невизначеність; для тотального неоднозначного – T, F, T та F; для часткового неоднозначного – усі зазначені вище чотири можливості. Таким чином, на виродженій алгебрі даних існує:

1) два тотальних однозначних предикати:
– тотожно істинний предикат T,
– тотожно хибний предикат F;

1) три часткових однозначних предикати:
– тотожно істинний предикат T,
– тотожно хибний предикат F,
– всюди невизначений предикат $\perp$;

2) три тотальних неоднозначних предикати:
– тотожно істинний предикат T,
– тотожно хибний предикат F,
– тотально насичений предикат TF;

3) чотири часткових неоднозначних предикати:
– тотожно істинний предикат T,
– тотожно хибний предикат F,
– тотально насичений предикат TF,
– всюди невизначений предикат $\perp$.

Для цих предикатів маємо:

$T(\mathrm{T}) = \{\varnothing\}$, $F(\mathrm{T}) = \varnothing$; $T(\mathrm{F}) = \varnothing$, $F(\mathrm{F}) = \{\varnothing\}$;

$T(\perp) = F(\perp) = \varnothing$; $T(\perp) = F(\perp) = \varnothing$;

$T(\mathrm{TF}) = F(\mathrm{TF}) = \{\varnothing\}$.

На виродженій алгебрі множина предикатів $Pr^{\varnothing}$ задається так: $Pr^{\varnothing} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ для випадку класичної семантики, $Pr^{\varnothing} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}, \perp\}$ для випадку неокласичної семантики, $Pr^{\varnothing} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}, \mathrm{TF}\}$ для випадку пересиченої семантики, $Pr^{\varnothing} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}, \perp, \mathrm{TF}\}$ для випадку загальної семантики.

Множина $Fn^{\varnothing}$ функцій вигляду $\{\varnothing\}\to\varnothing$ складається з єдиного елемента $f_{\varnothing}$: $Fn^{\varnothing} = \{f_{\varnothing}\}$.

Вироджені композиційні системи квазіарних предикатів кванторного рівня мають вигляд $(\{\varnothing\}, Pr^{\varnothing}, C)$, де C задається базовими композиціями $\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$.

Дія базових пропозиційних композицій $\neg$ та $\vee$ традиційна. Для однозначних предикатів маємо:

$\neg\mathrm{T} = \mathrm{F}$, $\neg\mathrm{F} = \mathrm{T}$, $\neg\perp = \perp$;

$\mathrm{T}\vee\mathrm{T} = \mathrm{T}\vee\mathrm{F} = \mathrm{F}\vee\mathrm{T} = \mathrm{T}\vee\perp = \perp\vee\mathrm{T} = \mathrm{T}$,

$\perp\vee\mathrm{F} = \mathrm{F}\vee\perp = \perp\vee\perp = \perp$, $\mathrm{F}\vee\mathrm{F} = \mathrm{F}$;

Для неоднозначних предикатів маємо:

$\neg\mathrm{T} = \mathrm{F}$, $\neg\mathrm{F} = \mathrm{T}$, $\neg\perp = \perp$; $\neg\mathrm{TF} = \mathrm{TF}$;

$\mathrm{T}\vee\mathrm{T} = \mathrm{T}\vee\mathrm{F} = \mathrm{F}\vee\mathrm{T} = \mathrm{T}\vee\perp = \perp\vee\mathrm{T} = \mathrm{T}$,

$\mathrm{T}\vee\mathrm{TF} = \mathrm{FT}\vee\mathrm{T} = \mathrm{TF}\vee\perp = \perp\vee\mathrm{TF} = \mathrm{T}$,

$\mathrm{TF}\vee\mathrm{TF} = \mathrm{F}\vee\mathrm{TF} = \mathrm{TF}\vee\mathrm{F} = \mathrm{TF}$,

$\perp\vee\mathrm{F} = \mathrm{F}\vee\perp = \perp\vee\perp = \perp$, $\mathrm{F}\vee\mathrm{F} = \mathrm{F}$.

Звідси – дія $\neg$ та $\vee$ на тотальні предикати.

Композиція $\vee$ асоціативна й комутативна.

Зрозуміло, що дія похідних пропозиційних композицій &, $\to$, $\leftrightarrow$ теж традиційна.

Композиції реномінації $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ діють як тотожне відображення: $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) = P$, де $P \in Pr^{\varnothing}$.

Справді, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(\varnothing) = P(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\varnothing)) = P(\varnothing)$.

Композиції розширеної реномінації $\mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$ діють аналогічно: $\mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(P) = P$, де $P \in Pr^{\varnothing}$.

Справді, $\mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(P)(\varnothing) = P(r_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\varnothing)) = P(\varnothing)$.

Спеціальні предикати-індикатори εz наявності значення для предметних змінних [6] вводити немає сенсу, адже вони діють як T: $\varepsilon z(\varnothing) = \mathrm{T}$.

Кванторно-екваційний рівень фактично зливається із кванторним:

– спеціальні предикати рівності $=_{xy}$ діють як $\perp$: $=_{xy}(\varnothing) = \perp$;

– спеціальні предикати строгої рівності $\equiv_{xy}$ діють як T: $\equiv_{xy}(\varnothing) = \mathrm{T}$.

Розглянемо особливості логік функціональних рівнів. Вироджені композиційні системи квазіарних предикатів функціональних рівнів мають вигляд $(\{\varnothing\}, Fn^{\varnothing} \cup Pr^{\varnothing}, C)$, де C задається множиною базових композицій відповідного рівня, такі множини наведено вище.

Як зазначено вище, існує єдина функція на $\varnothing$, тобто функція вигляду $\{\varnothing\} \to \varnothing$ – це $f_{\varnothing}$.

Спеціальна 0-арна композиція – функція деномінації $'x$ – діє так: $'x(\varnothing) = \varnothing$.

Композиція суперпозиції $\mathrm{S}^{\bar{v}}$ діє як тотожне відображення: $\mathrm{S}^{\bar{v}}(f_{\varnothing}, \overline{f_{\varnothing}}) = f_{\varnothing}$, $\mathrm{S}^{\bar{v}}(P, \overline{f_{\varnothing}}) = P$.

Спеціальні композиції слабкої рівності = та строгої рівності $\equiv$ діють наступним чином:

$=(f_{\varnothing}, f_{\varnothing}) = \perp$; $\equiv(f_{\varnothing}, f_{\varnothing}) = \mathrm{T}$.

Таким чином, пов'язані із функціями та рівністю можливості не можуть сповна проявитись для семантичних моделей з порожніми предметними областями. Тому при дослідженні вироджених моделей першопорядкових КНЛ можна обмежитись розглядом логік кванторного рівня – ЧКНЛ.

На вироджених моделях ЧКНЛ композиції реномінації та розширеної реномінації діють як тотожне відображення. Ситуація із композиціями квантифікації вже не настільки тривіальна.

Справді, визначення предикатів $\exists xP$ та $\forall xP$ можна подати так:

$d \in T(\exists xP) \Leftrightarrow$ існує a ($a \in A$ та $d\nabla x \mapsto a \in T(P)$);

$d \in F(\exists xP) \Leftrightarrow$ для всіх a ($a \in A \Rightarrow d\nabla x \mapsto a \in F(P)$);

$d \in T(\forall xP) \Leftrightarrow$ для всіх a ($a \in A \Rightarrow d\nabla x \mapsto a \in T(P)$);

$d \in F(\forall xP) \Leftrightarrow$ існує a ($a \in A$ та $d\nabla x \mapsto a \in F(P)$).

Проте "$a \in A$" хибне при $A = \varnothing$, звідки маємо:

– твердження "$a \in A$ та $d\nabla x \mapsto a \in T(P)$" та "$a \in A$ та $d\nabla x \mapsto a \in F(P)$" хибні;

– твердження "якщо $a \in A$, то $d\nabla x \mapsto a \in T(P)$" та "якщо $a \in A$, то $d\nabla x \mapsto a \in F(P)$" істинні.

Звідси твердження "$d \in T(\exists xP)$" та твердження "$d \in F(\forall xP)$" – хибні; твердження "$d \in F(\exists xP)$" та твердження "$d \in T(\forall xP)$" – істинні.

Таким чином, при $A = \varnothing$, отримуємо:

$T(\exists xP) = \varnothing$; $T(\forall xP) = {}^{V}A = \{\varnothing\}$;

$F(\exists xP) = {}^{V}A = \{\varnothing\}$; $F(\forall xP) = \varnothing$.

Отже, для $P \in Pr^{\varnothing}$ маємо: $\exists xP = \mathrm{F}$, $\forall xP = \mathrm{T}$.

Зауважимо, що подібні міркування для класичної логіки проведено в [2].

Для традиційно продовжених композицій квантифікації на предикати над $A = \varnothing$ закони де Моргана залишаються вірними: із $\exists xP = \mathrm{F}$ та $\forall xP = \mathrm{T}$ випливає $\neg\exists xP = \forall x\neg P$ та $\neg\forall xP = \exists x\neg P$. Водночас таке традиційне продовження композицій квантифікації веде до порушення фундаментального закону логіки: із $\forall xP$ не випливає $\exists xP$.

Мова ЧКНЛ та відображення I інтерпретації формул на семантичних моделях описано в [4]. Інтегрованими семантичними моделями, які пов'язують мову ЧКНЛ із алгеброю даних (A, Pr^{A}), є алгебраїчні системи з доданою сигнатурою – об'єкти вигляду $\boldsymbol{A} = ((A, Pr^{A}), I)$, які позначаємо (A, I) та називаємо моделями мови.

Предикат $I(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації на моделі мови $\boldsymbol{A}$, – позначаємо Φ_A.

Модель мови (A, I) вироджена, якщо $A = \varnothing$.

Вироджені моделі мови $(\varnothing, I)$ позначаємо $\boldsymbol{\varepsilon}$.

На виродженій алгебрі даних існує лише три часткових однозначних предикати (це T, F, $\perp$), три тотальних неоднозначних предикати (це T, F, TF) та лише чотири часткових неоднозначних предикати (це T, F, $\perp$, TF). Тому на вироджених моделях мови у відповідній семантиці кожний ПС та кожна формула можуть інтерпретуватися як один із зазначених предикатів.

При традиційному продовженні композицій квантифікації тоді маємо:

$\exists x(\Phi \to \exists x\Phi)_{\varepsilon} = \exists x(\forall x\Phi \to \Phi)_{\varepsilon} = \exists x(\neg\Phi \vee \Phi)_{\varepsilon} = \mathrm{F}$;

$\forall x(\neg\Phi \& \Phi)_{\varepsilon} = \mathrm{T}$.

Це зовсім не узгоджується із законами як традиційної логіки, так і логіки квазіарних предикатів, адже в цих логіках маємо: $\models \exists x(\Phi \to \exists x\Phi)$, $\models \exists x(\forall x\Phi \to \Phi)$, $\models \exists x(\neg\Phi \vee \Phi)$, $\models \neg\forall x(\neg\Phi \& \Phi)$.

Водночас для вироджених моделей маємо $\forall x(\Phi \to \exists x\Phi)_{\varepsilon} = \forall x(\forall x\Phi \to \Phi)_{\varepsilon} = \forall x(\neg\Phi \vee \Phi)_{\varepsilon} = \mathrm{T}$ та $\exists x(\neg\Phi \& \Phi)_{\varepsilon} = \mathrm{F}$. Це вже узгоджується із природними логічними властивостями $\models \forall x(\Phi \to \exists x\Phi)$, $\models \forall x(\forall x\Phi \to \Phi)$, $\models \forall x(\neg\Phi \vee \Phi)$, $\models \neg\exists x(\neg\Phi \& \Phi)$.

Наведемо ще декілька співвідношень для вироджених моделей мови:

$\forall x(\exists x\Phi\to\Phi)_\varepsilon = \forall x(\Phi\to\forall x\Phi)_\varepsilon = \mathrm{T}$;

$\exists x(\exists x\Phi\to\Phi)_\varepsilon = \exists x(\Phi\to\forall x\Phi)_\varepsilon = \mathrm{F}$;

$(\exists x\Phi\to\Phi)_\varepsilon = (\Phi\to\forall x\Phi)_\varepsilon = \mathrm{T}$.

2. Квантифікація тотальних однозначних предикатів вироджених алгебр

Постає природне питання, як можна коректно (не порушуючи фундаментальних законів логіки) визначити композиції квантифікації для вироджених алгебр із порожнім носієм у випадку логіки тотальних однозначних предикатів (фактично класичної логіки). Для вироджених алгебр тоді існує лише два предикати – T та F.

.Таблиця 1. Квантифікація предикатів

	P	$\exists xP$	$\forall xP$	Зауваження
1	T F	T F	T F	M; $\exists x$, $\forall x$ –тотожно
2	T F	T F	F T	$\exists x$ – тотожно; $\forall x$ як $\neg$
3	T F	T F	T T	асиметрія
4	T F	T F	F F	асиметрія
5	T F	F T	T F	$\exists x$ як $\neg$; $\forall x$ – тотожно
6	T F	F T	F T	M; $\exists x$ та $\forall x$ – як $\neg$;
7	T F	F T	T T	асиметрія
8	T F	F T	F F	асиметрія
9	T F	T T	T F	асиметрія
10	T F	T T	F T	асиметрія
11	T F	T T	T T	$\exists x$, $\forall x$ дають T
12	T F	T T	F F	M; $\exists x$ дає T, $\forall x$ дає F;
13	T F	F F	T F	асиметрія
14	T F	F F	F T	асиметрія
15	T F	F F	T T	M; $\exists x$ дає F, $\forall x$ дає T
16	T F	F F	F F	$\exists x$, $\forall x$ дають F

Розглянемо (табл. 1) всі випадки, які можуть приймати $\exists xP$ та $\forall xP$, якщо $P\in\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$. При цьому відмітимо випадки (позначаємо як M), коли виконуються закони де Моргана.

Відкидаючи випадки, коли невірні закони де Моргана, далі розглядаємо випадки 1, 6, 12, 15.

Випадок 15 – це традиційне продовження композицій квантифікації, для нього маємо наведені вище порушення фундаментальних законів логіки.

Для випадку 12 теж порушуються закони логіки, адже маємо $\exists x(\neg\Phi\&\Phi)_\varepsilon = \mathrm{T}$, $\forall x(\neg\Phi\vee\Phi)_\varepsilon = \mathrm{F}$.

Для випадку 6 $\forall x(\neg\Phi\vee\Phi)_\varepsilon = \exists x(\neg\Phi\vee\Phi)_\varepsilon = \mathrm{F}$, $\forall x(\neg\Phi\&\Phi)_\varepsilon = \mathrm{T}$; теж порушуються закони логіки.

Залишається випадок 1, коли $\exists x$ та $\forall x$ діють як тотожне відображення. Формально він не відрізняється від випадку предикатів традиційної алгебри з 1-елементним носієм. Для предикатів такої алгебри діють лише закони пропозиційної логіки.

Таким чином, випадок 1 залишається єдиним коректним для класичної логіки варіантом визначення композицій квантифікації предикатів вироджених алгебр із порожнім носієм, проте він не є формальним продовженням цих композицій із традиційного випадку алгебр із непорожнім носієм (таким є випадок 15).

3. Особливості квантифікації квазіарних предикатів

При традиційному продовжених композицій квантифікації на предикати над $A = \varnothing$ закони де Моргана вірні, проте порушуються важливі закони логіки, зокрема, із $\forall xP$ не випливає $\exists xP$

Коректним варіантом визначення композицій $\exists x$ та $\forall x$ над предикатами виродженої алгебри є їх задання як тотожних відображень на $Pr^{\varnothing}$. Тоді $\exists xP = \forall xP = P$. У цьому випадку для композицій $\exists x$ та $\forall x$ теж виконуються закони де Моргана.

Отже, для таких вироджених композиційних систем нетривіальними є лише пропозиційні композиції, які діють традиційно.

Дамо тепер визначення композицій квантифікації, що підходить як для предикатів алгебр із непорожнім носієм, так і для предикатів вироджених алгебр із порожнім носієм.

Для предикатів $\exists xP$ та $\forall xP$ визначаємо:

$d\in T(\exists xP) \Leftrightarrow A \neq \varnothing$ та

існує a ($a\in A$ та $d\nabla x\mapsto a\in T(P)$);

$d\in F(\exists xP) \Leftrightarrow A \neq \varnothing$ та

для всіх a ($a\in A \Rightarrow d\nabla x\mapsto a\in F(P)$);

$d\in T(\forall xP) \Leftrightarrow A \neq \varnothing$ та

для всіх a ($a\in A \Rightarrow d\nabla x\mapsto a\in T(P)$);

$d\in F(\forall xP) \Leftrightarrow A \neq \varnothing$ та

існує a ($a \in A$ та $d \nabla x \mapsto a \in F(P)$).

При умові $A \neq \varnothing$ отримуємо традиційне визначення $\exists xP$ та $\forall xP$.

При умові $A = \varnothing$ маємо $T(\exists xP) = F(\exists xP) = \varnothing$ та $T(\forall xP) = F(\forall xP) = \varnothing$.

Отже, $\exists xP = \forall xP = \perp$ для кожного $P \in Pr^{\varnothing}$.

Тому $\exists x\Phi_{\varepsilon} = \forall x\Phi_{\varepsilon} = \perp$ для кожної формули Φ.

Зрозуміло, що для так визначених композицій $\exists x$ та $\forall x$ над предикатами вироджених алгебр виконуються закони де Моргана.

Таким чином, для вироджених композиційних систем часткових предикатів із умовою $\exists xP = \forall xP = \perp$ теж фактично діють лише закони пропозиційної логіки.

Опишемо композиції розширеної квантифікації [5] над предикатами виродженої алгебри.

Розглянемо варіант визначення композицій $\exists x$ та $\forall x$ над предикатами виродженої алгебри як тотожних відображень на множині $Pr^{\varnothing}$. Тоді композиції розширеної квантифікації $\exists_{\perp}x$ та $\forall_{\perp}x$ теж діють як тотожні відображення. Справді, у всіх семантиках для кожного $P \in Pr^{\varnothing}$ маємо:

$$\exists_{\perp}xP = \exists xP \vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P) = P \vee P = P;$$

$$\forall_{\perp}xP = \forall xP \,\&\, \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P) = P \,\&\, P = P.$$

Розглянемо тепер варіант визначення $\exists x$ та $\forall x$ над предикатами виродженої алгебри, коли $\exists xP = \forall xP = \perp$ для кожного $P \in Pr^{\varnothing}$. Тоді можна розглядати лише випадки загальної семантики та неокласичної семантики.

У випадку загальної семантики маємо:

$$\exists_{\perp}xP = \exists xP \vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P) =$$

$$= \perp \vee P = \begin{cases} \perp, & \text{якщо } P = \mathrm{F} \text{ або } P = \perp, \\ \mathrm{T}, & \text{якщо } P = \mathrm{T} \text{ або } P = \mathrm{TF}; \end{cases}$$

$$\forall_{\perp}xP = \forall xP \,\&\, \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P) =$$

$$= \perp \,\&\, P = \begin{cases} \perp, & \text{якщо } P = \mathrm{T} \text{ або } P = \perp, \\ \mathrm{F}, & \text{якщо } P = \mathrm{F} \text{ або } P = \mathrm{TF}. \end{cases}$$

Звідси отримуємо:

$$\exists_{\perp}x\neg P = \begin{cases} \perp, & \text{якщо } P = \mathrm{T} \text{ або } P = \perp, \\ \mathrm{T}, & \text{якщо } P = \mathrm{F} \text{ або } P = \mathrm{TF}; \end{cases}$$

$$\forall_{\perp}x\neg P = \begin{cases} \perp, & \text{якщо } P = \mathrm{F} \text{ або } P = \perp, \\ \mathrm{F}, & \text{якщо } P = \mathrm{T} \text{ або } P = \mathrm{TF}. \end{cases}$$

У випадку неокласичної семантики маємо:

$$\exists_{\perp}xP = \exists xP \vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P) =$$

$$= \perp \vee P = \begin{cases} \perp, & \text{якщо } P = \mathrm{F} \text{ або } P = \perp, \\ \mathrm{T}, & \text{якщо } P = \mathrm{T}; \end{cases}$$

$$\forall_{\perp}xP = \forall xP \,\&\, \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P) =$$

$$= \perp \,\&\, P = \begin{cases} \perp, & \text{якщо } P = \mathrm{T} \text{ або } P = \perp, \\ \mathrm{F}, & \text{якщо } P = \mathrm{F}; \end{cases}$$

$$\exists_{\perp}x\neg P = \begin{cases} \perp, & \text{якщо } P = \mathrm{T} \text{ або } P = \perp, \\ \mathrm{T}, & \text{якщо } P = \mathrm{F}; \end{cases}$$

$$\forall_{\perp}x\neg P = \begin{cases} \perp, & \text{якщо } P = \mathrm{F} \text{ або } P = \perp, \\ \mathrm{F}, & \text{якщо } P = \mathrm{T}. \end{cases}$$

Висновки

В роботі досліджено вироджені семантичні моделі першопорядкових композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів. Характерна їх особливість – порожність предметної області. Описано вироджені алгебри та вироджені композиційні системи. Розглянуто композиції функцій та предикатів, заданих на порожній множині. Значну увагу приділено композиціям квантифікації, досліджено різні варіанти визначення цих композицій над предикатами виродженої алгебри.

Список використаних джерел

1. *S. C. Kleene.* Mathematical Logic. – New York: John Wiley & Sons. – 1967. – 398 p.
2. *A. Mostowski.* On the Rules of Proof in the Pure Functional Calculus of the First Order // The Jounal of Symbolic Logic. – 1951. – Vol. 16. – № 2. – p. 107–111.
3. *Nikitchenko M.S., Shkilniak S.S.* Mathematical Logic and Theory of Algorithms. – Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet, 2008. – 528 p. (in Ukrainian).
4. *Nikitchenko M.S., Shkilniak S.S.* Composition-nominative logics of quasiary predicates: semantic aspects // Visnyk, Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – № 4. – P. 165–172 (in Ukrainian).
5. *Nikitchenko M.S., Shkilniak O.S., Shkilniak S.S.* Logics of partial predicates with extended renominations and quantifier // Visnyk, Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2013. – № 2. – P. 210–215 (in Ukrainian).
6. *Nikitchenko M.S., Shkilniak S.S.* Composition-nominative logics with special variable definedness predicates // Visnyk, Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2013. – Special edition. – P. 128–133 (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 29.12.2013