УДК 517.9

Халимон* О.О., аспірант

Розв'язання крайової задачі з періодичним джерелом для рівняння дифузії з дробовою похідною за простором

У роботі досліджується рівняння дифузії із похідною дробового порядку $\alpha \in (1,2)$ за простором. Отримано розв'язок крайової задачі без початкових умов із періодичним джерелом. Побудовано інтегральне перетворення, що пов'язує цей розв'язок із розв'язком класичної задачі для рівняння параболічного типу.

Ключові слова: дробова дифузія, дробова похідна, похідна Рімана-Ліувілля, похідна Капуто.

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м.Київ, пр-т Глушкова 4д,

e-mail: holyman.login@gmail.com

O. O. Khalymon*, PhD student

Solution of boundary value problem for the space-fractional diffusion equation

We've been considered α-order space-fractional diffusion equation with $\alpha \in (1,2)$ and got a solution of it's boundary value problem for periodic sourse without initial conditions. An integral transformation associating that solution with a classical one, also had been constructed.

Key Words: fractional diffusion, fractional derivative, Riemann-Liouville derivative, Caputo derivative.

*Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova pr-t., 4d,

e-mail: holyman.login@gmail.com

Статтю представив Кудін В.І., д.т.н., с.н.с.

Вступ

Процеси дифузії аномальної природи, що відхиляються від класичної гауссівської дифузії, зустрічаються у багатьох фізичних системах [1, 2, 3]. У роботі [2] розглядаються приклади систем із різних областей (геології, фізики, хімії, економіки), в яких були виявлені процеси аномальної дифузії. Зокрема, сюди можна віднести явища тепло-, масопереносу, розповсюдження забруднення у пористих середовищах [4]. Аномальна дифузія виникає у середовищах із самоподібною структурою. Навіть матеріали, котрі не мають фрактальної «архітектури» на мікрорівні, а володіють лише масштабною інваріантністю кількох порядків (мезорівень), мають унікальні фізичні властивості, що є наслідком їх самоподібної структури [5]. У зв'язку з цим постає проблема побудови адекватних математичних моделей таких середовищ.

Одним із найбільш плідних підходів є опис цих процесів за допомогою узагальнених рівнянь дифузії. Як правило, узагальнюють часову похідну [6, 7, 8, 9], замінюючи її на похідну деякого дробового порядку β у розумінні Рімана-Ліувілля або ж Капуто.

$$\frac{\partial}{\partial t}U(x,t) = K(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,t) + F(x,t); \ (1)$$

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}U(x,t) = K(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,t) + F(x,t); (2)$$

Якщо покласти $\beta = 1$, матимемо класичне рівняння дифузії (1). При $\beta \in (0,1)$ відповідні процеси дістали назву повільної дифузії чи субдифузії, при $\beta \in (1,2)$ — супердифузії; при $\beta = 2$ — хвильове рівняння. Тому інколи рівняння дробової дифузії називають також дифузійно-хильовими рівняннями (diffusion-wave equations). Ці узагальнення є досить добре вивченими: для систем типу (2) отримано апріорні оцінки для крайових задач першого та третього роду [10], знайдено фундаментальні розв'язки [11, 12], розв'язано задачі ідентифікації джерела [13], розроблено чисельні методи [14, 15] тощо.

Зазначимо, що узагальнення можна проводити й в інший спосіб. А саме, вести його не за часовою змінною, а за просторовими.

$$\frac{\partial}{\partial t}U(x,t) = K(x,t)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}U(x,t) + F(x,t); (3)$$

при цьому зазвичай розглядають $\alpha \in (1,2)$ (такі процеси теж називають супердифузією). При $\alpha = 2$ отримуємо рівняння (1), при $\alpha = 1$ класичне гіперболічне рівняння.

Дослідженню систем із дробовими похідними за простором присвячено кілька праць [15, 16, 17, 18]. Зокрема, у [18] в якості дробової похідної розглядався оператор Рісса-Вейля та було прослідковано зв'язок із блуканнями Леві.

Загалом, рівняння фрактальної дифузії з дробовою похідною за простором лишаються маловивченими, що говорить про актуальність теми.

Дробові похідні

Позначимо $\Omega = [a,b], -\infty \le a \le b \le \infty$, тобто Ω може бути відрізком, променем або всією віссю.

Через $AC(\Omega)$ позначатимемо клас функцій $f(x)$ абсолютно неперервних на Ω. Зауважимо, що клас $AC(\Omega)$ збігається із класом первісних від інтегровних за Лебегом функцій.

Позначимо через I_a оператор інтегрування з фіксованою нижньою межею

$$(I_a f)(t) = \int_a^t f(s)\,ds,$$

а через I_a^n — його n-ий степінь.

Застосовуючи індукцію, легко отримати представлення I_a^n через I_a.

Лема 1. [10] *Нехай* $f: [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ — *локально інтегровна функція. Тоді* $\forall t \ge a$ *має місце формула Коші-Діріхле*

$$(I_a^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)ds.$$

За допомогою цієї рівності можна ввести означення інтегралу довільного додатнього порядку α:

Означення 1. Нехай $t \ge a$. *Інтегралом Рімана-Ліувілля* функції f називають вираз

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\,ds,$$

де $\Gamma(\cdot)$ — гама-функція Ейлера: $$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{\alpha-1}\,d\tau.$$

Побудований інтегральний оператор називають *лівостороннім інтегралом* [19] та інколи позначають I_{a+}^α . Розглядають також *правосторонні інтеграли*

$$(I_b^\alpha f)(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b |t-s|^{\alpha-1} f(s)\,ds,$$

де $t \le b$. Відповідно, позначають через I_{b-}^α.

Звісно, що і лівосторонній, і правосторонній інтеграли можна записати за допомогою єдиної формули

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{\mathrm{sgn}\,(t-a)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t |t-s|^{\alpha-1} f(s)\,ds.$$

Покладемо для повноти $I_b^\alpha f = f$.

Означення 2. Нехай $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $t\in[a,b]$, $0<\alpha\le 1$. Тоді оператори

$$D_a^\alpha f = \frac{d}{dt} I_a^{1-\alpha} f, \qquad D_b^\alpha f = \frac{d}{dt} I_b^{1-\alpha} f$$

називаються відповідно лівосторонньою та правосторонньою *похідною Рімана-Ліувілля*.

Отже, $D_a^\alpha f = D^1 \circ I_a^{1-\alpha}$. Аналогічно означуються похідні довільних додатніх порядків: для $\alpha\in[n,n+1)$ покладемо

$$D_a^\alpha f = \frac{d^n}{dt^n} I_a^{n-\alpha} f.$$

Утворювати суперпозицію дробового інтегрування та диференціювання цілого порядку можна й інакше.

Означення 3. *Похідною Капуто* називатимемо оператор

$${}^C D_a^\alpha f = I_a^{n-\alpha}\left(\frac{d^n}{dt^n} f\right),$$

де $n = \lceil\alpha\rceil$ — найменше ціле число, таке що $n\ge\alpha$.

Таким чином, ${}^C D_a^\alpha f = I_a^{n-\alpha}\circ D_t^n$.

Лема 2. Для *довільного s має місце наступна рівність*

$$\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t^{\alpha+1}}\,dt = \Gamma(-\alpha) s^\alpha, \tag{4}$$

де $\alpha\ne 0,1,2,\dots$.

<u>*Доведення*</u>. Здійснивши заміну $\tau = st$, $dt = \frac{1}{s}d\tau$, одержимо

$$\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t^{\alpha+1}}\,dt = s^\alpha \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{-(\alpha+1)}\,d\tau = \Gamma(-\alpha)s^\alpha.$$

■

Для подальших доведень на буде потрібна із [15] наступна

Лема 3. *Нехай a та b — деякі числа, $a\in(0,1)$. Тоді ряд*

$$\sum_{k=0}^\infty \left|\frac{\Gamma(1-ak-b)}{k!}\right| |z^k| \tag{5}$$

збігається при довільному z.

<u>*Доведення*</u>. Вирахуємо радіус збіжності ряду (5):

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\Gamma(1-ak-b)}{k!}\frac{(k+1)!}{\Gamma(1-ak-a-b)}\right| =$$

$$= \frac{k+1}{|a|^a k^{-a}} = \infty.$$

Отже, ряд вигляду (5) є збіжним при довільному z.

■

Рівняння дифузії з дробовою похідною за простором

В області $\Omega_+^2 = \{(x,t): x\ge 0, -\infty < t < +\infty\}$ розглядається крайова задача без початкових умов для рівняння гіперболічного типу:

$$\frac{\partial}{\partial t} v = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v, \tag{6}$$

$$v(0,t) = Ae^{i\omega t}. \tag{7}$$

Тут $v = v(x,t)$ та $v\in AC(\Omega_+^2)$.

Розв'язок задачі (6)-(7) має наступний вигляд $v(x,t) =$

$$= A\exp\left[-\sqrt{\frac{\omega}{2\lambda^2}} + i\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\lambda^2}}x + \omega t\right)\right]. \tag{8}$$

Дійсна частина цього розв'язку $\tilde{v} = \mathrm{Re}(v)$ задовольняє рівняння (6), граничну умову

$$v(0,t) = A\cos\omega t \tag{9}$$

та умови обмеженості $|v(x,t)| < M$, де M — додатня стала, має вигляд $\tilde{v}(x,t) =$

$$= A\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\lambda^2}}x\right)\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\lambda^2}}x\right). \tag{10}$$

Якщо узагальнити просторову похідну у правій частині рівняння (6), отримаємо наступну задачу дровобої дифузії:

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \lambda^2 \, {}_xD_+^\alpha u, \tag{11}$$

$$u(0,t) = Ae^{i\omega t}. \tag{12}$$

Тут $1 < \alpha < 2$, $u = u(x,t)$, $u \in AC(\Omega_+^2)$, ${}_xD_+^\alpha$ — правостороння дробова похідна у розуміння Рімана-Ліувілля. Помітимо, що ${}_xD_+^\alpha e^{qx} =$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{q\zeta}}{(x-\zeta)^\alpha}d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{q(x-\eta)}}{\eta^\alpha}d\eta =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left[e^{qx}\int_0^\infty e^{-q\eta}\eta^{-\alpha}\,d\eta\right] =$$

$$= \frac{q^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left[e^{qx}\Gamma(1-\alpha)\right] = q^\alpha e^{qx}. \tag{13}$$

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді

$$u(x,t) = Ae^{ax+bt}, \tag{14}$$

де a та b — деякі сталі. Підставивши вираз (14) у рівняння (11) та у граничну умову (12), враховуючи (13), отримуємо

$$b = i\omega;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(Ae^{ax+bt}\right) = Abe^{ax+bt},$$

$$\lambda^2 \, {}_xD_+^\alpha\left(Ae^{ax+bt}\right) = \lambda^2 Ae^{bt}\left({}_xD_+^\alpha e^{ax}\right) =$$

$$= \lambda^2 Ae^{bt}a^\alpha e^{ax};$$

звідки

$$a = \pm\left(\frac{i\omega}{\lambda^2}\right)^{1/\alpha}.$$

З умов обмеженості $|u(x,t)| < M$, як і в «класичному» випадку, обираємо

$$a = -\left(\frac{i\omega}{\lambda^2}\right)^{1/\alpha}.$$

Отже, маємо

$$u(x,t) = A\exp\left(i\omega t - x\left(\frac{i\omega}{\lambda^2}\right)^{1/\alpha}\right).$$

$i^{1/\alpha}$ не є аналітичною функцією змінної α, її можна розглядати як сім'ю функцій виду

$$i^{1/\alpha} = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{2k\pi}{\alpha}\right)\right].$$

Для того, аби розв'язок мав сенс для всіх $\alpha \in (1,2)$, слід обрати функцію, котра відповідає значенню $k = 0$, тобто головне значення:

$$i^{1/\alpha} = \exp\left(\frac{\pi i}{2\alpha}\right).$$

Отже,

$$u(x,t) = A\exp\left(i\omega t - x\,\frac{\omega^{1/\alpha}}{\lambda^{2/\alpha}}\exp\left(\frac{\pi i}{2\alpha}\right)\right) =$$

$$= A\exp\left(x\,\frac{\omega^{1/\alpha}}{\lambda^{2/\alpha}}\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right)\times$$

$$\times\left[\cos\left(\omega t - x\,\frac{\omega^{1/\alpha}}{\lambda^{2/\alpha}}\sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + i\sin\left(\omega t - x\,\frac{\omega^{1/\alpha}}{\lambda^{2/\alpha}}\sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right)\right]. \tag{15}$$

Дійсна частина розв'язку $\tilde{u} = \mathrm{Re}(u)$ задовольняє рівнянню (11) та граничній умові

$$u(0,t) = A\cos\omega t, \tag{16}$$

має наступний вигляд

$$\tilde{u}(x,t) = A\exp\left(x\,\frac{\omega^{1/\alpha}}{\lambda^{2/\alpha}}\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right)\times$$

$$\times\cos\left(\omega t - x\,\frac{\omega^{1/\alpha}}{\lambda^{2/\alpha}}\sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right).$$

Важливим є наступне

Зауваження 1. $\tilde{u}(x,t) \to \tilde{v}(x,t)$ при $\alpha \to 2$.

Сформулюємо тепер основний результат роботи.

Теорема 1. *Розв'язки (15) та (8) пов'язані співвідношенням:*

$$u(x,t) = \int_0^\infty \mathcal{K}(x,\tau)v(\tau,t)\,d\tau, \tag{17}$$

де

$$\mathcal{K}(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,\Gamma\left(-\frac{n}{\alpha}\right)}\frac{x^n}{\tau^{\frac{n}{\alpha}+1}}.$$

Доведення. Використання формул доповнення (добуток гама-функції та синуса) дозволяє оцінити збіжність ряду $\mathcal{K}(x,\tau)$, увівши допоміжний ряд наступним чином:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,\Gamma\left(-\frac{n}{\alpha}\right)}\frac{x^n}{\tau^{\frac{n}{\alpha}+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{x^n}{\tau^{\frac{n}{\alpha}+1}}\frac{\sin\left(-\frac{n}{\alpha}\right)}{\pi}\Gamma\left(1+\frac{n}{\alpha}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{\alpha}\right)}{\pi n!}\right|\left|\frac{x^n}{\tau^{n/\alpha}}\right|. \tag{18}$$

Помітимо, що ряд (18) має вигляд (5), коли покласти $a = \alpha^{-1}$, $b = 0$ та $z = \frac{x}{\tau^{1/\alpha}}$, а отже, за лемою 3, збігається для довільного z. Тоді, використовуючи (4), маємо

$$\int_0^\infty \mathcal{K}(x,\tau)v(\tau,t)\,d\tau = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,\Gamma\left(-\frac{n}{\alpha}\right)}\frac{x^n}{\tau^{\frac{n}{\alpha}+1}}\times$$

$$\times\exp\left(i\omega t + x\left(\frac{i\omega}{\lambda^2}\right)^{1/\alpha}\right)d\tau =$$

$$= e^{i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!\,\Gamma\left(-\frac{n}{\alpha}\right)}\int_0^\infty \exp\left(\tau\left(\frac{i\omega}{\lambda^2}\right)^{1/\alpha}\right)\tau^{-\left(\frac{n}{\alpha}+1\right)}\,d\tau =$$

$$= e^{i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!\,\Gamma\left(-\frac{n}{\alpha}\right)}\Gamma\left(-\frac{n}{\alpha}\right)\left(\frac{i\omega}{\lambda^2}\right)^{n/\alpha} =$$

$$= e^{i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{(i\omega)^{n/\alpha}}{\lambda^{\frac{2n}{\alpha}}} =$$

$$= e^{i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\lambda^{-\frac{2n}{\alpha}}(i\omega)^{\frac{n}{\alpha}}}{n!} =$$

$$= e^{i\omega t}\exp\left(\left(\frac{i\omega}{\lambda^2}\right)^{1/\alpha}x\right) =$$

$$= \exp\left(i\omega t + x\left(\frac{i\omega}{\lambda^2}\right)^{1/\alpha}\right).$$

■

Висновки

Дробові похідні за простором використовуються для моделювання процесів аномальної дифузії, за якої частинки розповсюджуються швидше, аніж це передбачає класична модель.

Для розв'язання задачі дробової дифузії типу (11)-(12) достатньо розв'язати відповідну «класичну задачу» (6)-(7) та застосувати інтеральне перетворення (17).

Список використаних джерел

1. *Metzler R., Klafter J.* The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. // Phys. Rep. – 2000. – vol.339. – P.1-77.

2. *Metzler R., Klafter J.* The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. // J. Phys. A.: Math. – 2004. – vol.37.

3. *Vasiliev V.V., Simak L.A.* Fractional calculus and approximation methods in dynamic systems modeling. // Ukrainian NAS – 2008. (in Russian).

4. *Nakhushev A.M.* Fractional calculus and it's applications. // Fizmat-lit – 2003. (in Russian).

5. *Zeleny L.M., Milovanov A.V.* Fractal topology and strange kinetics: from percolation theory to problems in cosmic electrodynamics. // Progress of Phisical Sciences. – 2004. – vol.174, №8. – P.809-852. (in Russian).

6. *Oldham K., Spanier J.* The fractional calculus. // Academic Press. – London, New York. – 1973.

7. *Podlubny I.* Fractional differential equations. // Academic Press. – San Diego. – 1999.

8. *Schneider W. R., Wyss W.* Fractional diffusion and wave equations. // J. Math.Phys. – 1989. – vol.30. – P.134-144.

9. *Wyss W.* Fractional diffusion equation. // J. Math. Phys. – 1986. – vol.27. – P.2782-2785.

10. *Alikhanov A.A.* A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order eqations. // Differential equations. – 2010. – vol.46., №5. – P.660-666.

11. *Eidelman S.D., Kochubei A.N.* Cauchy problem for fractional diffusion equatoins. // Differential equations. – 2004. – vol.199, №2. – P.211-255.

12. *Mainardi F.* The fundamental solutions for the fractional duffusion-wave equation. // Appl. Math. Lett. – 1996. – vol.9, №6. – P.23-28.

13. *Sakamoto K., Yamamoto M.* Inverse sourse problem with a final overdeterminatoin for a fractional diffusion equation. // Mathematical control and related fields. – 2011. – vol.1, №4.

14. *Lin Y., Xu C.* Finite difference-spectral approximations for the time-fractional diffusion equation. // Journal of Computational Physics. – 2007. – vol.225. – P.1533-1552.

15. *Ivashchenko D.S.* Numerical analysis of direct and inverse problems for time-fractional diffusion equation. // PhD theses. – Tomsk. – 2008. (in Russian).

16. *Huang J., Nie N., Tang Y.* A second order finite difference-spectral method for space fractional diffusion equation. // CAF. – 2008.

17. *Prehl J.* Diffusion on fractals and space-fractional diffusion equations. // Chemnitz University of Technology – 2004.

18. *Meerschaert M.M., Tadjeran C.* Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations. // Applied Numerical Mathematics. – 2006. – vol.56, №1. – P.80-90.

19. *Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.* Fractional order integrals and derivatives and their applications. // Science and technology. – 1987. (in Russian).

Надійшла до редколегії 19.09.13