УДК 519.9

Хусаінов Д.Я.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Баштинець Я.[2], к. ф.-м. н., доц.,
Демченко Г.А.[3], студ.

## Оптимальне керування процесом нагрівання без запізнення

*Розглядається задача оптимального керування процесом нагрівання на прикладі одновимірного рівняння теплопровідності без запізнення при керуванні правою частиною. Отримано розв'язок у вигляді ряду за власними функціями задачі Штурма-Ліувіля.*

*Ключові слова: оптимальне керування, функція Гамільтона-Понтрягіна, рівняння тепло-провідності без запізнення.*

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: d.y.khusainov@gmail.com
[2] Брненський технічний університет, 61600, м.Брно, Чеська республіка, вул. Технічна 8, e-mail: bastinec@feec.vutbr.cz
[3] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: ann.demchenko@mail.ru

D.Ya. Khusainov[1], Prof. Dr.Sc.,
Ja. Bastinec[2], Doc., Ph.D.,
H. Demchenko[3], student.

## Optimal control of the heating process without delay

*We consider the problem of optimal control of the heating process on the example of the one-dimensional heat equation without delay and with right-hand side control. We obtain a solution in the form of series in eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem.*

*Key Words: optimal control, Hamilton-Pontryagin function, heat equation without delay.*

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: d.y.khusainov@gmail.com
[2] Brno University of Technology, 61600, Brno, Czech Republic, Technical str., 8, e-mail: bastinec@feec.vutbr.cz
[3] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: ann.demchenko@mail.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

### Вступ

В роботі розглядається задача оптимального керування процесом, що описується одновимірним рівнянням теплопровідності. Задачі оптимізації в системах з розподіленими параметрами розглядалися багатьма авторами. Можна, наприклад, вказати роботи [1-4]. В даній роботі розглядається рівняння теплопровідності без запізнення. Керування проводиться правою частиною. Для простоти, крайові умови вибрані нульовими. Розв'язок представлено у вигляді ряду за власними функціями задачі Штурма-Ліувіля.

### Оптимізація в рівнянні теплопровідності

Розглянемо задачу оптимального керування одновимірним рівнянням теплопровідності без запізнення

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t). \qquad (1.1)$$

Рівняння визначене при $t>0$ на проміжку $0<x<l$. Початкова умова має вигляд

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le l, \qquad (1.2)$$

а крайові умови нульові

$$u(0,t)\equiv 0,\ u(l,t)\equiv 0,\ t\ge 0, \qquad (1.3)$$

причому виконується умова «узгодження крайових і початкових умов»

$$\varphi(0)=0,\ \varphi(l)=0,$$

тобто функція $u(x,t)$ в крайових точках неперервна.

Під розв'язком (класичним) будемо розуміти функцію $u(x,t)$, двічі неперервно-диференційовану по аргументу $x\in(0,l)$ і один раз по аргументу $t\in(0,t_1)$. Необхідно знайти функцію керування $U(x,t)$, при якій в кінцевий момент $t=t_1$ часу виконується

$$u(x,t_1)\equiv\Psi(x),\ \Psi(0)=\Psi(l)=0,\ 0\le x\le l, \qquad (1.4)$$

а інтеграл від суми квадратів функції і

керування досягає мінімального значення

$$I[U]=\int_0^{t_1}\int_0^l\left[U^2(x,t)+u^2(x,t)\right]dxdt\to\min\ .(1.5)$$

**Отримання розв'язку**

Як випливає з принципу суперпозиції, розв'язок лінійного неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді суми розв'язків $u_0(x,t)$ однорідного рівняння з нульовими крайовими умовами (1.3) і заданими початковими умовами (1.2) та розв'язку $\bar{u}(x,t)$ неоднорідного рівняння з нульовими крайовими і початковими умовами та функцією керування $U(x,t)$, що забезпечує кінцеву умову (1.4) і оптимізацію даного критерію якості (1.5).

1. Для однорідного рівняння

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (2.1)$$

з умовами (1.2) і (1.3) розв'язок $u_0(x,t)$ шукається методом Фур'є (методом розділення змінних) у вигляді добутку двох функцій

$$u_0(x,t)=X(x)T(t).$$

Після підстановки в рівняння (2.1) і розділення змінних рівняння (2.1) розщеплюється на два звичайних рівняння

$$X''(x)+\lambda X(x)=0\,,\ X(0)=0\,,\ X(l)=0\,,$$

$$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0\,.$$

Ненульові розв'язки першого рівняння (задача Штурма-Ліувіля) мають вигляд

$$X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{l}x\,,\ \lambda=\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\ n=1,2,3,...$$

Розв'язки другого рівняння мають вигляд

$$T_n(t)=C_ne^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2t},\ n=1,2,3,...$$

І розв'язок однородного рівняння (2.1) має вигляд розкладу за власними функціями задачі Штурма-Ліувіля

$$u_0(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_ne^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2t}\sin\frac{\pi n}{l}x\,,$$

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{\pi n}{l}sds\,.$$

Таким чином, отримали

$$u_0(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{\pi n}{l}sds\right]e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2t}\sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (2.2)$$

розв'язок однорідного рівняння, яке задовольняє нульовим граничним і ненульовим початковим умовам.

2. Розв'язок $\bar{u}(x,t)$ неоднорідного рівняння (1.1) також шукається у вигляді ряду

$$\bar{u}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

за власними функціями задачі Штурма-Ліувіля. Праву частину неоднорідного рівняння (1.1) можна розкласти в ряд за власними функціями

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,,$$

$$U_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^lU(s,t)\sin\frac{\pi n}{l}sds\,,\ n=1,2,3,\ldots.$$

Підставивши в неоднорідне рівняння і прирівнявши коефіцієнти при власних функціях, отримаємо систему рівнянь

$$T_n'(t)+\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2T_n(t)=U_n(t),\ n=1,2,3,... \qquad (2.3)$$

з нульовими початковими умовами $T_n(0)=0$. Згідно формулі Коші, розв'язок лінійного неоднорідного рівняння з довільною правою частиною $U_n(t)$, який задовольняє нульовим початковим умовам, має вигляд

$$T_n(t)=\int_0^te^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2(t-s)}U_n(s)ds\,. \qquad (2.4)$$

Для визначення кінцевих умов функція $\Psi(x)$ розкладається в ряд за власними функціями

$$\Psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n\sin\frac{\pi n}{l}x\,,$$

$$\Psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\Psi(s)\sin\frac{\pi n}{l}sds\,. \qquad (2.5)$$

І крайові умови мають вигляд $T_n(t_1)=\Psi_n$. Керуючі функції $U_n(t)$ шукаються таким чином, щоб виконувались кінцеві умови.

**Оптимальне керування.**

Перетворимо критерій якості наступним чином. Враховуючи, що функцію $U(x,t)$ розклали в ряд за власними функціями, перепишемо цільову функцію (1.5) у вигляді

$$I[U]==\int_0^{t_1}\int_0^l\left\{\left[\sum_{i=1}^{\infty}U_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\right]^2\right\}dxdt.$$

Перетворимо перший інтеграл наступним чином

$$\int_0^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\right]^2 dx =$$
$$= \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2(t)\sin^2\frac{\pi n}{l}xdx +$$
$$+ \int_0^l \sum_{m,n=1,n\neq m}^{\infty} U_n(t)U_m(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}x =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2(t)\int_0^l \sin^2\frac{\pi n}{l}xdx = \frac{1}{2}l\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2(t).$$

Аналогічно, для другого інтеграла отримаємо

$$\int_0^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\right]^2 dx = \frac{1}{2}l\sum_{n=1}^{\infty} T_n^2(t).$$

І цільова функція має вигляд

$$I[U] = \frac{l}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{t_1}\left[U_n^2(t) + T_n^2(t)\right]dt \to \min .$$

Таким чином, вихідну задачу (1.1) з оптимізацією квадратичного критерію якості (1.5) звели до розв'язання задачі оптимального керування зліченною системою рівнянь (2.3)

$$T_n'(t) + \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 T_n(t) = U_n(t),\ n = 1,2,3,...$$

що задовольняють крайовим умовам

$$T_n(0) = 0,\ T_n(t_1) = \Psi_n,$$
$$\Psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \Psi(s)\sin\frac{\pi n}{l}sds,$$

і мінімізації інтегральних критеріїв якості

$$I_n[U] = \int_0^{t_1}\left[U_n^2(t) + T_n^2(t)\right]dt \to \min,\ n = 1,2,3,... \quad (3.1)$$

Для мінімізації даного функціоналу використаємо принцип максимуму Гамільтона-Понтрягіна, який стверджує, що якщо процес $T_n^0(t)$ є оптимальним, то в будь-який момент часу $0 < t < t_1$ оптимальне керування $U_n^0(t)$ максимізує функцію Гамільтона-Понтрягіна $H_n(\psi_n(t), T_n(t))$, яка має вигляд

$$H_n(\psi_n(t), T_n(t)) = \psi_{0,n}(U_n^2(t) + T_n^2(t)) +$$
$$+ \psi_n(t)\left(U_n(t) - \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 T_n(t)\right).$$

Покладемо параметр $\psi_{0,n} = -1$. Тоді функція Гамільтона-Понтрягіна набуває вигляду

$$H_n(\psi_n(t), T_n(t)) = -U_n^2(t) - T_n^2(t) +$$
$$+ \psi_n(t)\left(U_n(t) - \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 T_n(t)\right).$$

Умова оптимальності має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial U_n(t)} H_n(\psi_n(t), T_n(t)) = -2U_n(t) + \psi_n(t) = 0.$$

Звідси

$$U_n(t) = \frac{1}{2}\psi_n(t). \quad (3.2)$$

Для знаходження величин $\psi_n(t)$ діємо наступним чином. Диференціальні рівняння, що відповідають спряженим змінним, мають вигляд

$$\frac{d\psi_n(t)}{dt} = -\frac{\partial H_n(\psi_n(t), T_n(t))}{\partial T_n(t)} =$$
$$= 2T_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 \psi_n(t). \quad (3.3)$$

Як випливає з (2.3),

$$T_n'(t) = U_n(t) - \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 T_n(t).$$

І, підставивши замість $U_n(t)$ його значення з (3.2), отримаємо систему

$$\begin{cases} T_n'(t) = \dfrac{1}{2}\psi(t) - \left(\dfrac{\pi n}{l}a\right)^2 T_n(t), \\ \psi_n'(t) = 2T_n(t) + \left(\dfrac{\pi n}{l}a\right)^2 \psi_n(t). \end{cases} \quad (3.4)$$

Систему розв'язуємо методом Ейлера. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} -\left(\dfrac{\pi n}{l}a\right)^2 - \lambda & \dfrac{1}{2} \\ 2 & \left(\dfrac{\pi n}{l}a\right)^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\lambda^2 - \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^4 - 1 = 0.$$

Власні числа дійсні, різного знаку і дорівнюють

$$\lambda_{1,n} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^4 + 1},\ \lambda_{2,n} = -\sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^4 + 1} \quad (3.5)$$

Знаходимо перший власний вектор.

1. Підставимо $\lambda_{1,n} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^4 + 1}$ і отримаємо

$$\left[-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^4 + 1}\right]\alpha_{1,n} + \frac{1}{2}\beta_{1,n} = 0,$$

$$2\alpha_{1,n} - \left[ \left( \frac{\pi n}{l} a \right)^2 - \sqrt{\left( \frac{\pi n}{l} a \right)^4 + 1} \right] \beta_{1,n} = 0 .$$

Звідси перший власний вектор має вигляд

$$\alpha_{1,n} = \frac{1}{2},\ \beta_{1,n} = \left( \frac{\pi n}{l} a \right)^2 + \sqrt{\left( \frac{\pi n}{l} a \right)^4 + 1} . \quad (3.6)$$

2. Підставимо $\lambda_{2,n} = -\sqrt{\left( \frac{\pi n}{l} a \right)^4 + 1}$ і отримаємо

$$\left[ -\left( \frac{\pi n}{l} a \right)^2 + \sqrt{\left( \frac{\pi n}{l} a \right)^4 + 1} \right] \alpha_{2,n} + \frac{1}{2} \beta_{2,n} = 0 ,$$

$$2\alpha_{2,n} - \left[ \left( \frac{\pi n}{l} a \right)^2 + \sqrt{\left( \frac{\pi n}{l} a \right)^4 + 1} \right] \beta_{2,n} = 0 .$$

Звідси другий власний вектор має вигляд

$$\alpha_{2,n} = -\frac{1}{2},\ \beta_{2,n} = -\left( \frac{\pi n}{l} a \right)^2 + \sqrt{\left( \frac{\pi n}{l} a \right)^4 + 1} . \quad (3.7)$$

Таким чином, розв’язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} T_n(t) \\ \psi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,n} e^{\lambda_{1,n} t} & \alpha_{2,n} e^{\lambda_{2,n} t} \\ \beta_{1,n} e^{\lambda_{1,n} t} & \beta_{2,n} e^{\lambda_{2,n} t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,n} \\ c_{2,n} \end{pmatrix},$$

або

$$T_n(t) = c_{1,n} \alpha_{1,n} e^{\lambda_{1,n} t} + c_{2,n} \alpha_{2,n} e^{\lambda_{2,n} t} ,$$

$$\psi_n(t) = c_{1,n} \beta_{1,n} e^{\lambda_{1,n} t} + c_{2,n} \beta_{2,n} e^{\lambda_{2,n} t} .$$

Для визначення сталих $c_1$, $c_2$ використаємо початкові умови

$$T_n(0) = 0 ,\ T_n(t_1) = \Psi_n .$$

Підставивши їх в отримані розв’язки, маємо

$$c_{1,n} \alpha_{1,n} + c_{2,n} \alpha_{2,n} = 0 ,$$

$$c_{1,n} \alpha_{1,n} e^{\lambda_{1,n} t_1} + c_{2,n} \alpha_{2,n} e^{\lambda_{2,n} t_1} = \Psi_n .$$

Розв’язавши записану систему лінійних алгебраїчних рівнянь, отримаємо

$$T_n(t) = \frac{\Psi_n}{\alpha_{1,n} \left( e^{\lambda_{1,n} t_1} - e^{\lambda_{2,n} t_1} \right)} \alpha_{1,n} e^{\lambda_{1,n} t} - \\ - \frac{\Psi_n}{\alpha_{2,n} \left( e^{\lambda_{1,n} t_1} - e^{\lambda_{2,n} t_1} \right)} \alpha_{2,n} e^{\lambda_{2,n} t} ,$$

$$\psi_n(t) = \frac{\Psi_n}{\alpha_{1,n} \left( e^{\lambda_{1,n} t_1} - e^{\lambda_{2,n} t_1} \right)} \beta_{1,n} e^{\lambda_{1,n} t} - \\ - \frac{\Psi_n}{\alpha_{2,n} \left( e^{\lambda_{1,n} t_1} - e^{\lambda_{2,n} t_1} \right)} \beta_{2,n} e^{\lambda_{2,n} t} .$$

І оптимальне керування кожним з рівнянь (2.3) має вигляд

$$U_n(t) = \frac{1}{2} \psi_n(t) =$$

$$= \frac{\Psi_n}{2\left( e^{\lambda_{1,n} t_1} - e^{\lambda_{2,n} t_1} \right)} \left( \frac{\beta_{1,n}}{\alpha_{1,n}} e^{\lambda_{1,n} t} - \frac{\beta_{2,n}}{\alpha_{2,n}} e^{\lambda_{2,n} t} \right) . \quad (3.8)$$

Остаточно, оптимальне керування має вигляд

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n}{2\left( e^{\lambda_{1,n} t_1} - e^{\lambda_{2,n} t_1} \right)} \times \\ \times \left( \frac{\beta_{1,n}}{\alpha_{1,n}} e^{\lambda_{1,n} t} - \frac{\beta_{2,n}}{\alpha_{2,n}} e^{\lambda_{2,n} t} \right) \sin \frac{\pi n}{l} x .$$

Використавши залежності (2.2), (2.4), отримаємо, що розв’язок, який відповідає оптимальному керуванню (3.8), має вигляд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{l} \left[ \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds \right] e^{-\left( \frac{\pi n}{l} a \right)^2 t} \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n}{2\left( e^{\lambda_{1,n} t_1} - e^{\lambda_{2,n} t_1} \right)} \left[ \int_0^t e^{-\left( \frac{\pi n}{l} a \right)^2 (t-s)} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\beta_{1,n}}{\alpha_{1,n}} e^{\lambda_{1,n} s} - \frac{\beta_{2,n}}{\alpha_{2,n}} e^{\lambda_{2,n} s} \right) ds \right] \sin \frac{\pi n}{l} x ,$$

де величини $\lambda_{1,n}$, $\lambda_{2,n}$, $\alpha_{1,n}$, $\alpha_{2,n}$, $\beta_{1,n}$, $\beta_{2,n}$ визначені в (3.5) - (3.7), а величини $\Psi_n$ в (2.4).

## Список використаних джерел


1. *Butkovskiy A.G.* The optimal control theory of systems with distributed parameters. – Moscow: Nauka, 1965. – 474 p. (in Russian).
2. *Butkovskiy A.G.* Control methods for systems with distributed parameters. – Moscow: Nauka, 1975. – 568 p. (in Russian).
3. *Egorov A.I.* Optimal control of thermal and diffusion processes. – Moscow: Nauka, 1978. – 464 p. (in Russian).
4. *Ionkin N.I.* Solution of a boundary value problem with a nonclassical boundary condition in the theory of heat conduction // Differential equations. – 1977. – **T 13**, N 2. – P.294-304. (in Russian).
5. *Kapustyan V.O., Kapustyan O.A., Mazur O.K.* Optimal control problem for the Poisson equation with nonlocal boundary conditions // Nonlinear Oscillations. – 2013. – **T 16**, N 3. – P.350-358. (in Ukrainian).


Надійшла до редколегії 20.12.2013