УДК 512.55

Швиров В.В.[1], канд. фіз.-мат. наук

Про кількість допустимих послідовностей нерозкладних напівланцюгових кілець з нетеровою діагоналлю.

У роботі вивчаються властивості допустимих послідовностей нерозкладних напівланцюгових кілець з нетеровою діагоналлю та нільпотентним первинним радікалом. Зокрема, отримано формули для знаходження кількості таких послідовностей для випадків $c_1 \in \{1, 2, 3\}$, *де* c_1 *– перший елемент допустимої послідовності.*

Ключові слова: напівланцюгове кільце, допустима послідовність, ряд Купіша, числа Каталана.

[1]Луганський національний університет імені Тараса Шевченка, 91011, м. Луганськ, вул. Оборонна,2, e-mail: slavik_asas@mail.ru

Shvyrov V.V.[1], Ph.D.

On the number of admissible sequences for indecomposable serial rings with Noetherian diagonal.

We explore the properties of admissible sequences for indecomposable serial rings with Noetherian diagonal and nilpotent prime radical. The formula for calculating the number such sequences for case $c_1 \in \{1, 2, 3\}$, *where* c_1 *it first element of admissible sequence, are obtained.*

Key Words: serial ring, admissible sequence, Kupisch series, Catalan numbers.

[1]Luhansk Taras Shevchenko National Univesity, 91011, Luhansk, Oboronna str. 2, e-mail: slavik_asas@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Кириченко

1 Вступ.

У роботі вивчаються комбінаторні властивості допустимих послідовностей, знайдено звя'зки з числами Каталана, а також алгебраїчне застосування таких послідовностей. Крім того, отримано формули для обчислення кількості допустимих послідовностей у випадках $c_1 = 1$, $c_1 = 2$ або $c_1 = 3$.

Допустимі послідовності виникають при вивченні рядів Купіша напівланцюгових кілець див. [1]. Такі послідовності задовольняють деяким природнім обмеженням, які дозволяють обчислювати їх кількість. За допомогою допустимих послідовностей у роботі проводиться класифікація нерозкладних напівланцюгових кілець з нетеровою діагоналлю та нільпотентним первинним радікалом.

Відповідно до роботи [1] нагадаємо означення допустимої послідовності.

Нехай A напівланцюгове кільце, $e_1, \dots, e_n$ – множина базисних примітивних ідемпотентів, $J = J(A)$ – радікал Джекобсона кільця A. Перелік нерозкладних проективних модулів $Ae_1, \dots, Ae_n$ називається *рядом Купіша* кільця A. Якщо $Je_1 \neq 0$ та $c_i = c(Ae_i)$, де c_i – довжина відповідного модуля, тоді

$$Je_i \equiv Ae_{i-1}/J^{e_i-1}e_{i-1} \ (i = 2, \dots, n),$$

$$Je_1 \equiv Ae_n/J^{e_1-1}e_n.$$

Звідки, маємо

$$2 \leq c_i \leq c_{i-1} + 1, i = 2, \dots, n, \ c_1 \leq c_n + 1. \quad (1)$$

Будь-яка послідовність, яка задовольняє таким нерівностям називається *допустимою послідовністю.*

Хейнс та Вік у роботі [3] встановили, що кількість допустимих послідовностей для нерозкладного базисного напівланцюгового кільця з простим проективним модулем і n попарно неізоморфними нерозкладними проективними модулями ($n \geq 1$) є $(n-1)$-м числом Каталана.

Швиров В.В. у роботі [5] наводить подальші застосування чисел Каталана у теорії напівланцюгових кілець.

Твердження ([5]). *Число класів еквівалентних у розумінні Моріти нерозкладних напівланцюгових кілець із сагайдаком*

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & & 2 & & & n-1 & & n \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \dots & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$

та ізоморфними тілами ендоморфізмів простих A-модулів, дорівнює C_{n-1}.

Означення допустимої послідовності можна записати у еквівалентній формі наступним чином. Нехай $c_1, \dots, c_n$ – допустима послідовність. Запишемо її у зворотньому порядку $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1$ та визначимо послідовність $p_1, \dots, p_n$, де $p_1 = c_n$, $p_2 = c_2, \dots, p_n = c_1$.

За цих позначень, нерівності (1) можуть бути записані у вигляді:

$$2 \le p_i \le p_{i+1} + 1, i = 1, \dots, n-1, \qquad p_n \le p_1 + 1. \quad (2)$$

Послідовності, які записані в такій формі будемо називати зворотними допустимими послідовностями.

Такі нерівності природнім чином з'являються у роботі Губарені Н.М., Кириченка В.В. [2]. Нагадаємо деякі означення з цієї роботи.

Означення 1.1. ([2]). Нехай A – напівланцюгове кільце з нетеровою діагоналлю та нільпотентним первинним радікалом. Первинним рядом A-модуля M є

$$M \supset M\mathcal{L} \supset \dots \supset M\mathcal{L}^{k-1} \supset M\mathcal{L}^k = 0,$$

де $\mathcal{L}$ – первинний радикал. Мінімальне число k, таке, що $M\mathcal{L}^k = 0$, називається довжиною первинного ряду, будемо позначати його через $pl(M)$.

Нехай $1 = f_1 + \ldots + f_n$ розклад $1 \in A$ у суму ідемпотентів, що відповідають вершинам первинного сагайдаку $PQ(A)$. Будемо позначати $pl_i = pl(f_iA)$ для $i = 1, \dots, n$.

Теорема 1. *([2]) Нехай A – напівланцюгове нерозкладне кільце з нетеровою діагоналлю і нільпотентним первинним радикалом $\mathcal{L}$.*
(a) якщо первинний сагайдак A є ланцюгом:

$$\left\{\begin{matrix} 1 & & 2 & & & & n-1 & & n \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{matrix}\right\},$$

тоді $2 \le pl_i \le pl_{i+1} + 1$ для $i = 1, \dots, n-1$ і $pl_n = 1$.
(b) якщо первинний сагайдак A є циклом:

$$\left\{\begin{matrix} 1 & & 2 & & & & n-1 & & n & & 1 \\ \bullet & \to & \bullet & \to & \dots & \to & \bullet & \to & \bullet & \to & \bullet \end{matrix}\right\},$$

тоді $2 \le pl_i \le pl_{i+1} + 1$ для $i = 1, \dots, n-1$, і $2 \le pl_n \le pl_1 + 1$.

Така нумерація нерозкладних проективних A-модулів для напівланцюгових артінових кілець вперше розглядалася Купішем [4]. Послідовність $f_1A, \dots, f_nA$, впорядкована таким чином і для якої справедливі умови теореми, називається *узагальненим рядом Купіша* напівланцюгового кільця. У випадку (a) він є єдиним, у випадку (b), ряд є єдиним з точністю до циклічної перестави.

Вважаючи два кільця еквівалентними, якщо вони мають однакові узагальнені ряди Купіша (див. [2]), у роботі [6] доведено наступний результат:
Твердження ([6]). *Кількість класів еквівалентності нерозкладних напівланцюгових кілець з нетеровою діагоналлю та нільпотентним первинним радикалом, первинний сагайдак яких є ланцюгом довжини n, є $(n-1)$-м числом Каталана.*

Цей результат відповідає випадку $c_1 = 1$ ($p_n = 1$, пункт a) теореми 1). Якщо первинний сагайдак кільця A є циклом, тобто $c_1 \ge 2$ ($p_n \ge 2$), то ситуація є більш складною. Проте, у випадках $c_1 = 2$ та $c_1 = 3$ (відповідно $p_n = 2$, $p_n = 3$), вдалося отримати формулу для обчислення кількості допустимих послідовностей.

2 Числа Каталана та допустимі послідовності.

Числа Каталана утворюють послідовність натуральних чисел, яка з'являється в різних комбінаторних задачах. n-те число Каталана C_n можна обчислити за формулою:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad n \ge 0.$$

Перші числа Каталана для $n = 0, 1, 2, \dots$ це: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, … . У відомій монографії Р. Стенлея [8] наводиться біля 70 різних застосувань чисел Каталана.

При дослідженні числових послідовностей зручно використовувати "Онлайн енциклопедію цілих послідовностей" або OEIS (див. [7]). Цей ресурс містить велику кількість послідовностей, які нумеруються посиланнями виду *Annnnnn*. Наприклад, послідовність чисел Каталана має посилання виду A000108 у OEIS.

Позначимо через $T(n,k)$ – кількість допустимих послідовностей довжини n, для яких

$c_1 = k$. Нехай $k \in \{1, 2, 3\}$, за цих умов, якщо $a_i = x$, то наступний елемент a_{i+1}, може приймати значення з множини $\{2, \ldots, x, x + 1\}$, $i = 2, \ldots, n$.

Кожному числу $T(n, k)$ поставимо у відповідність кореневе планарне дерево $T_{n,k}$ з коренем k, яке має n поколінь. За побудовою, кожен вузол $c_i = x$ цього дерева буде мати рівно $x + 1$ нащадків, які будуть приймати значення $2, \ldots, x + 1$ відповідно. На рис. 1,2 наведено приклади дерев $T_{4,1}$ та $T_{4,2}$, відповідно. Якщо $n < 10$ для скорочування можна записати допустимі послідовності як: $c_1c_2 \ldots c_n$ замість $c_1, c_2, \ldots, c_n$. У таких позначеннях, дерево на рис. 1. визначає наступні допустимі послідовності:

$1222, 1223, 1232, 1233, 1234.$

Дерево $T_{4,2}$ визначає допустимі послідовності:

2222, 2223, 2232, 2233, 2234, 2322, 2323, 2332, 2333, 2334, 2342, 2343, 2344, 2345.

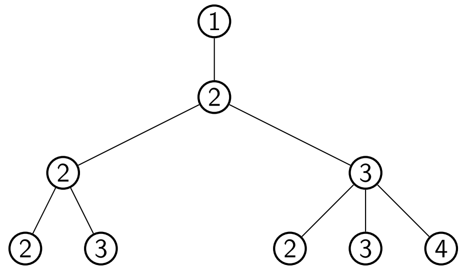

Рис. 1. Дерево $T_{4,1}$.

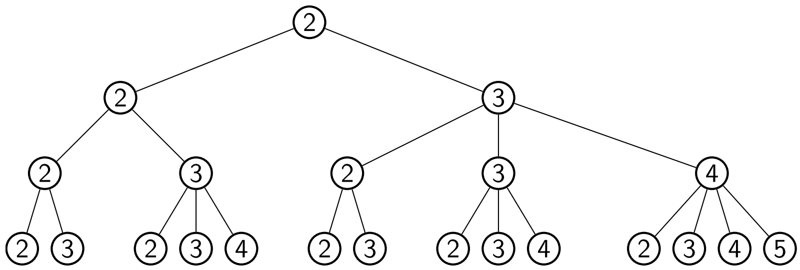

Рис. 2. Дерево $T_{4,2}$.

Якщо $c_1 > 3$, то, зважаючи на нерівність $c_1 \le c_n + 1$, маємо $c_n \ge c_1 - 1$, або $c_n \ge 3$

Наступне твердження доведено у роботі [6], твердження 2 та 3 встановлюють подальші властивості чисел $T_{n,k}$.

Твердження 1. *(див. [6])* $T(n, 1) = C_{n-1}$.

Твердження 2. $T(n, 2) = C_n$.

Доведення. Нехай $T_{n,1}, T_{n,2}$ – дерева побудовані за числами $T(n, 1), T(n, 2)$, відповідно. Легко бачити, що дерево $T_{n,2}$ може бути утворене із дерева $T_{n,1}$ сдвигом його вгору та добудовою ще одного покоління.

Дійсно, нехай $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ – довільна допустима послідовність довжини $n + 1$, для якої $c_1 = 1$. За визначенням допустимої послідовності, c_2 задовольняє нерівності:

$$2 \le c_2 \le c_1 + 1,$$

отже $c_2 = 2$. Це означає, що кожній допустимій послідовності довжини $n+1$ та $c_1 = 1$, відповідає допустима послідовність довжини n, для якої $c_1 = 2$. Звідси, за твердженням 1, $T(n, 2) = C_n$.

За визначенням допустимих послідовностей, маємо деякі властивості чисел $T(n, k)$. А саме, для будь-якого $k \in N$, $T(1, k) = 1$; для $k \ge 3$, $T(2, k) = 3$.

Твердження 3. $T(n, 3) = C_{n+1} - C_n$.

Доведення. Потрібно знайти кількість усіх допустимих послідовностей виду $c_1, c_2, \ldots, c_n$ довжини n, для яких $c_1 = 3$.

Нехай $d = c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ – довільна допустима послідовність довжини $n + 1$, для якої $c_1 = 2$. За визначенням допустимої послідовності, c_2 задовольняє нерівності: $2 \le c_2 \le c_1 + 1$, отже, $c_2 = 2$ або $c_2 = 3$. За твердженням 2, загальна кількість таких послідовностей буде дорівнювати $T(n + 1, 2) = C_{n+1}$.

Кожній послідовності виду d довжини $n+1$ зіставимо послідовність $c_2, \ldots, c_{n+1}$ довжини n, яку отримано відкиданням першого члену c_1. Після цього, отримаємо набір послідовностей, у якому деякі мають перший член 2, а деякі перший член 3. Знову, за твердженням 2, кількість допустимих послідовностей $T(n, 2)$ дорівнює C_n. Отже, із числа C_{n+1} потрібно відняти кількість усіх послідовностей перший член яких дорівнює двом. Звідси,

$$T(n, 3) = C_{n+1} - C_n.$$

Означення 2.1. Запишемо числа $T(n,k)$ у вигляді нескінченної матриці T (див. таблиця 1.), яку будемо називати *матрицею Каталана.* Елементи цієї матриці $t_{ij} = T(n,k)$.

$$\begin{array}{cccc} T(1,1) & T(1,2) & T(1,3) & \dots \\ T(2,1) & T(2,2) & T(2,3) & \dots \\ T(3,1) & T(3,2) & T(3,3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T(n,1) & T(n,2) & T(n,3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Таблиця 1.

Перший стовпчик матриці Каталана містить послідовність чисел Каталана (див. табл. 2), якій відповідає послідовність A000108 у OEIS. Другий стовчик містить послідовнисть чисел Каталана, але зі зміщенням. Числа у третьому стовпці утворюють послідовність A000245 у OEIS, яка має багато застосувань у комбінаториці.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots \\ 2 & 5 & 9 & \dots \\ 5 & 14 & 28 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n-1} & C_n & C_{n+1}-C_n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Таблиця 2.

Зауважимо, що перші три стовпця матриці Каталана збігаються з діагональними рядками у трикутнику Каталана, він може бути записаний у наступному вигляді (див. рис. 3).

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & & & & \\ \mathbf{1} & 1 & & & \\ \mathbf{2} & 2 & 1 & & \\ \mathbf{5} & 5 & 3 & 1 & \\ \mathbf{14} & 14 & 9 & 4 & 1 \end{array}$$

Рис. 3. Трикутник Каталана.

Взагалі, для чисел $T(n,k)$, де $k > 3$ ситуація є більш складною. За визначенням допустимої послідовності $c_n \geq c_1 + 1$, отже, потрібно вже розглядати декілька випадків.

3 Застосування допустимих послідовностей.

Зважаючи на теорему 1, введемо наступну класифікацію напівланцюгових кілець.

Означення 3.1. Нехай A, B – напівланцюгові нерозкладні кільця з нетеровою діагоналлю і нільпотентним первинним радикалом. $s_A = pl_1, \dots, pl_n$ та $s_B = pl_1, \dots, pl_m$ – відповідні допустимі послідовності кілець A і B. Будемо говорити, що кільце A еквівалентно за Купішем кільцю B, якщо $n = m$ та $s_A = s_B$, а саму еквівалентність називати еквівалентністю Купіша.

Наступна теорема встановлює кількість класів за еквівалентністю Купіша у випадках $p_n = 1$, $p_n = 2$ та $p_n = 3$. Цей результат дозволяє класифікувати згадані вище напівланцюгові кільця за їх допустимими послідовностями.

Теорема 2. *Кількість класів за еквівалентністю Купіша, нерозкладних напівланцюгових кілець з нетеровою діагоналлю, нільпотентним первинним радікалом, первинний сагайдак яких має n вершин дорівнює:*

a) C_{n-1}, якщо $p_n = 1$;

b) C_n, якщо $p_n = 2$;

c) $\frac{3n}{n+2}C_n$, якщо $p_n = 3$,

де $p_1, \dots, p_n$ – допустима послідовність, що визначає еквівалентність.

Доведення. Для доведення теореми достатньо скористатися твердженнями 1,2 та 3. Дійсно, за теоремою 1, для напівланцюгового кільця з нетеровою діагоналлю, нільпотентним первинним радікалом, первинний сагайдак якого є ланцюгом довжини n, мають місце нерівності:

$$2 \leq pl_i \leq pl_{i+1} + 1,$$

для $i = 1, \dots, n-1$ і $pl_n = 1$.

Кожній допустимій послідовності $p_1, \dots, p_n$ зіставимо зворотню допустиму послідовність $c_1, \dots, c_n$. За твердженням 1, кількість допустимих послідовностей для яких $c_1 = 1$ дорівнює C_{n-1}.

Якщо первинний сагайдак є циклом, тоді $2 \leq pl_i \leq pl_{i+1} + 1$ для $i = 1, \dots, n-1$, і $2 \leq pl_n \leq pl_1 + 1$. Розглянемо випадок, коли

$p_n = 2$. За твердженням 2, кількість допустимих послідовностей $T(n,2)$ дорівнює C_n.

У випадку $p_n = 3$, за твердженням 3, кількість допустимих послідовностей $T(n,3)$ дорівнює $C_{n+1} - C_n$. Звідси, маємо:

$$
\begin{aligned}
T(n,3) &= C_{n+1} - C_n = \\
&= \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+2)!} - \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \\
&= \frac{(2n+2))! - (2n)!(n+1)(n+2)}{(n+1)!(n+2)!} = \\
&= \frac{(2n)!3n(n+1)}{(n+1)!(n+2)!} = \\
&= \frac{(2n)!3n}{n!(n+1)!(n+2)} = \frac{3n}{n+2}C_n.
\end{aligned}
$$

Приклад. Безпосередьо за визначенням допустимої послідовності застосовуючи VBA-макрос обчислено усі допустимі послідовності для значень $T(1,3),\ T(2,3), T(3,3), T(4,3)$.

Таблиця 3. Допустимі послідовності для $k = 3$.

$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
3	34	345	3456
	33	344	3455
	32	343	3454
		342	3453
		334	3452
		333	3445
		332	3444
		323	3443
		322	3442
			3434
			3433
			3432
			3423
			3422
			3345
			3344
			3343
			3342
			3334
			3333
			3332
			3323
			3322
			3234
			3233
			3232
			3223
			3222
T(1,3)=1	T(2,3)=3	T(3,3)=9	T(4,3)=28

Література

1. F.W. Anderson, K. R. Fuller. *Rings and Categories of modules.* — Springer values, New York and Berlin, 2nd ed., 1992. — 385 p.

2. N. M. Gubareni, V. V. Kirichenko. Serial Rings with T-nilpotent Prime Radical // *Algebras and Representations Theory.* — 2006. — № 9. — P. 147—160.

3. J. O. Hanes, D. D. Wick. The number of admissible sequences for indecomposable serial rings with simple projective module // *Proc. of the Louisianna-Mississippi Section of Math.* Ass. of America, Spring 2000.

4. H. Kupisch. Beitgräde zur Theorie nichthalbeinfacher Ringe mit Minimalbedingung // *Crelles Journal.* — 1959. — V. 201. — P. 100—112.

5. V.V. Shvyrov. On the number of ideals of upper triangular ring // *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Ser. Physics & Math.* 2007. №2. pp. 36–40.

6. V.V. Shvyrov. On the number of equevalence classes of indecomposable serial rings // *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Ser. Physics & Math.* 2011. №4. pp. 56–60.

7. N.J.A. Sloane, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Notices Amer. Math. Soc. 50 (2003), 912-915.

8. R.P. Stanley (1999): *Enumerative Combinatorics, Vol. 2.* Cambridge University Press. (pp. 212-229)

Надійшла до редколегії 03.09.2013