

УДК 519.9

Зражевський Г.М.<sup>1</sup>, к. ф.-м. н., доц.,  
Сальнікова А.М.<sup>2</sup>, студент

**Чисельно-аналітичне дослідження  
детермінованих і хаотичних фазових  
траєкторій подвійного маятника.**

<sup>1</sup> Київський національний університет імені  
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова  
4д,

e-mail: [zgrig@univ.kiev.ua](mailto:zgrig@univ.kiev.ua)

<sup>2</sup> Київський національний університет імені  
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова  
4д,

e-mail: [salnikova1@ukr.net](mailto:salnikova1@ukr.net)

G.M. Zrazhevsky<sup>1</sup>, PhD, associate professor,  
A. M. Salnikova<sup>2</sup>, student

**Numerical and analytical research of  
deterministic and chaotic phase trajectories  
of double pendulum**

<sup>1</sup> Taras Shevchenko National University of Kyiv,  
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: [zgrig@univ.kiev.ua](mailto:zgrig@univ.kiev.ua)

<sup>2</sup> Taras Shevchenko National University of Kyiv,  
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: [salnikova1@ukr.net](mailto:salnikova1@ukr.net)

*У роботі проводяться чисельно-аналітичні дослідження детермінованих і хаотичних рухів нелінійної гамільтонової системи з двома ступенями вільності, що описує скінченні відхилення подвійного фізичного маятника. В результаті чисельних експериментів, підтверджений феномен існування при значних відхиленнях як хаотичних, так і детермінованих ізоенергетичних фазових траєкторій. Це явище пояснено шляхом застосування теореми КАМ.*

*Особливість роботи полягає в розробці та застосуванні нового підходу послідовного редукування гамільтоніана до сепарабельної форми шляхом розвинення в степеневий тригонометричний ряд. Вказаний метод повністю підтверджує результати класичних досліджень і призводить до формулювання необхідної умови інтегрованості системи, котра для даної задачі має простий фізичний сенс.*

*Ключові слова: гамільтонова система, динамічний хаос, канонічна теорія збурень, подвійний маятник.*

*In this paper considered a numerical and analytical study of deterministic and chaotic motions of nonlinear Hamiltonian system with two degrees of freedom which describes finite deviations of a double physical pendulum. As a result of numerical experiments was confirmed the phenomenon of existence the random and deterministic constant-energy phase trajectories. This fact is explained by the applying of the KAM theorem.*

*Feature of the work is development and applying of a new approach of a sequential reduction of the Hamiltonian to separable form by expansion in a power series in trigonometric functions. This method completely confirms the results of classical studies and leads to the formulation of the necessary conditions for the integrability of the system, which for this problem has a simple physical meaning.*

*Key Words: Hamiltonian system, dynamical chaos, canonical perturbation theory, the double pendulum.*

Статтю представив д.ф.-м.н. Жук Я. О.

**Вступ.**

В даній статті досліджуються деякі особливості динамічної поведінки подвійного фізичного маятника (ПФМ). ПФМ – одна із найпростіших гамільтонових систем з двома ступенями вільності, в якій, водночас із

детермінованою, спостерігається також хаотична поведінка [4, 6]. Дослідженню нелінійних гамільтонових систем, що допускають хаотичні режими збурення, присвячена широка література [6-10]. Предметом досліджень, як правило, є визначення параметрів локальної та глобальної

хаотизації, визначення їх меж. Системи із двома ступенями вільності, у зв'язку з відносною простотою описання і аналізу, застосовуються як моделі при дослідженні систем із багатьма ступенями вільності. Хоча, в деяких випадках, вони мають самостійне практичне застосування. Так, наприклад, дослідження збудження і керування ПФМ [8, 9] застосовуються при конструюванні маніпуляторів [4]. Варто зауважити, що більшість досліджень, так чи інакше, базуються на чисельних експериментах [6, 10], хоча теорія інтегровності динамічних систем [1, 2], в деяких випадках, дозволяє провести якісний аналіз переходу гамільтонової системи в хаотичний режим руху. Запропоноване дослідження також використовує в якості верифікації та підтвердження результатів чисельні розрахунки, однак основні зусилля докладені до спроби аналітичного і напіваналітичного аналізу, оснований на теорії інтегровності гамільтонових систем. У роботі також запропоновано новий підхід до застосування канонічної теорії збурень, оснований не на частковій лінеаризації системи відносно малого параметра, а на розвиненні гамільтоніана в ряд за природною системою функцій. При цьому застосовуються класичні методи теорії канонічних перетворень, аналізу перетинів Пуанкаре і показників Ляпунова, теореми КАМ [1, 2].

### Постановка задачі.

Розглянемо подвійний фізичний маятник (Рис. 1), що перебуває під дією сили тяжіння. Тертям в шарнірах  $O_1$ ,  $O_2$  і опором середовища нехтуємо.

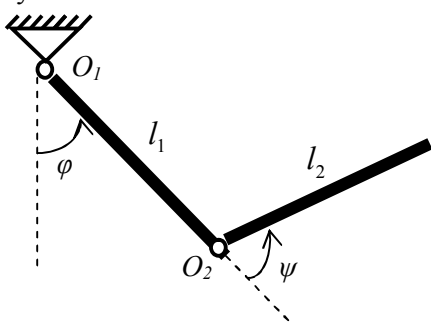


Рис.1. Подвійний фізичний маятник

Система має дві ступені вільності ( $\varphi, \psi$  - узагальнені координати Рис.1) і є консервативною. Функція Лагранжа:

$$L(\varphi, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) = T - \Pi = g \cos \varphi \left( \frac{1}{2} l_1 m_1 + l_1 m_2 \right) + \frac{1}{2} g l_2 m_2 \cos(\psi + \varphi) + \frac{1}{6} (l_1^2 (m_1 + 3m_2) \dot{\varphi}^2 + l_2^2 m_2 (\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 + 3 l_1 l_2 m_1 m_2 \cos \psi (\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \dot{\varphi} + l_2^2 m_2 \dot{\psi}^2) \quad (1)$$

Після введення позначень  $m_{21} = m_2 / m_1, l_{21} = l_2 / l_1$  визначає рівняння Лагранжа 2-го роду:

$$\begin{cases} l_{21} m_{21} (2l_{21} + \cos \psi) \ddot{\psi} + (2 + 6m_{21} + 2l_{21}^2 m_{21} + 6l_{21} m_{21} \cos \psi) \ddot{\varphi} = 3l_{21} m_{21} \sin \psi (\dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi} \dot{\psi}) - \\ - (3 - 6m_{21}) g \sin \varphi - 3g l_{21} m_{21} \sin(\psi + \varphi), \\ 2l_{21} \ddot{\psi} + (2l_{21} + 3 \cos \psi) \ddot{\varphi} = -3(\sin \psi \cdot \dot{\varphi}^2 + g \sin(\psi + \varphi)). \end{cases} \quad (2)$$

Очевидно, існує перший інтеграл – повна механічна енергія:

$$E = T + \Pi = \frac{1}{6} (l_1^2 (m_1 + 3m_2) \dot{\varphi}^2 + l_2^2 m_2 (\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 + 3 l_1 l_2 m_1 m_2 \cos \psi (\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \dot{\varphi} + l_2^2 m_2 \dot{\psi}^2) - g \cos \varphi \left( \frac{1}{2} l_1 m_1 + l_1 m_2 \right) - \frac{1}{2} g l_2 m_2 \cos(\psi + \varphi) = const \quad (3)$$

Існування другого інтеграла, згідно з теоремою Ліувілля [1], повинно забезпечити інтегровність (2). Проте він існує не для всіх початкових умов. Умови його існування є предметом дослідження.

### Попередні чисельні результати

Чисельні дослідження демонструють, що для різних значень енергії поведінка системи може бути як детермінованою, наприклад, при малих відхиленнях в околі положення стійкої рівноваги (тобто описується лінійною моделлю) Рис. 2, так і хаотичною Рис. 3 для скінченних відхилень.

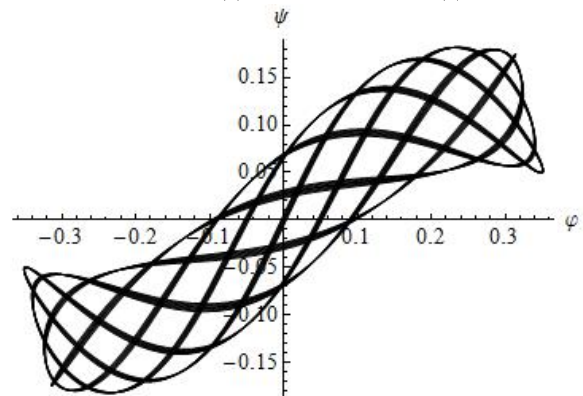


Рис.2. Детермінована траєкторія  
 $\varphi_0 = \pi / 10, \psi_0 = \pi / 18, \dot{\varphi}_0 = 0, \dot{\psi}_0 = 0$

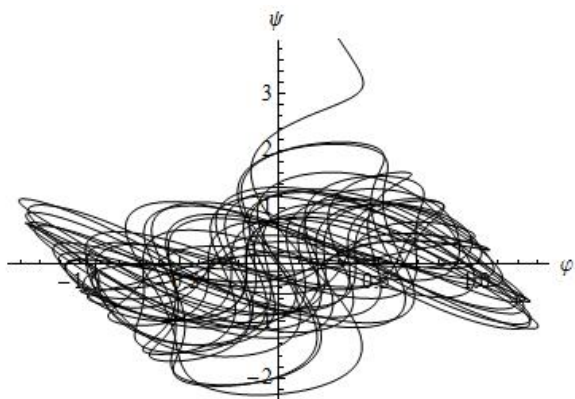


Рис.3. Хаотичні коливання  
 $\varphi_0 = \pi / 6, \psi_0 = \pi / 6, \dot{\varphi}_0 = 2, \dot{\psi}_0 = 1$

Конфігураційні траєкторії не можуть використовуватись в якості доказу хаотичної поведінки у фазовому просторі, однак на Рис.3 і Рис. 4 приведені відповідні перетини Пуанкаре [1].

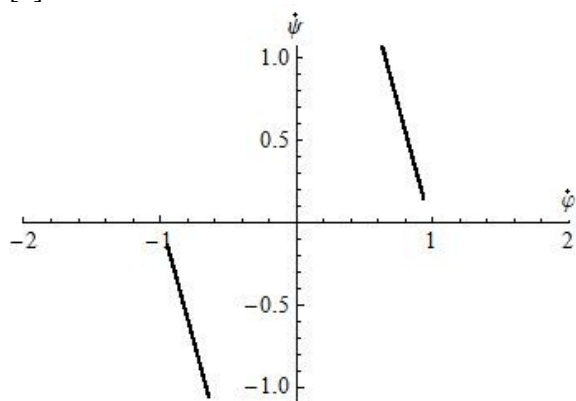


Рис. 4. Регулярний перетин Пуанкаре  
 $\varphi_0 = \pi / 10, \psi_0 = \pi / 18, \dot{\varphi}_0 = 0, \dot{\psi}_0 = 0$

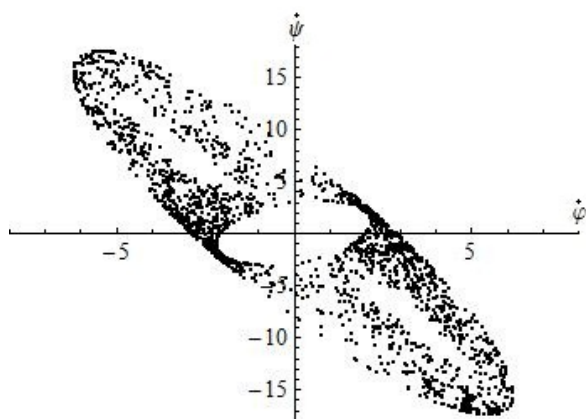


Рис. 5. Нерегулярний перетин Пуанкаре.  
 $\varphi_0 = \pi / 6, \psi_0 = \pi / 6, \dot{\varphi}_0 = 2, \dot{\psi}_0 = 1$

Детермінованість чи хаотичність поведінки візуально можна також спостерігати на діаграмах експоненційної розбіжності близьких (початкові

відхилення порядку  $10^{-4}$ ) траєкторій у фазовому просторі. Так, на Рис.6 наведені точки перетину (з постійним часовим кроком) для двох близьких у початковий момент часу фазових траєкторій у випадку детермінованої поведінки. Як бачимо, відхилення малі, а отже, слід очікувати степеневий характер розбіжності траєкторій. На Рис. 7 точки перетину для хаотичної поведінки системи. У цьому випадку відхилення скінченні, отже, траєкторії розбігаються експоненційно.

Така чутливість до початкових умов є однією із основних властивостей хаотичної поведінки [2]. При цьому виникає питання: чи існують детерміновані рухи системи для скінченних відхилень маятника (а отже, і при відносно великих значеннях енергії)? Чисельні дослідження, проведені в [10], дають позитивну відповідь на це питання. Надалі зосередимося на аналізі саме цього випадку.

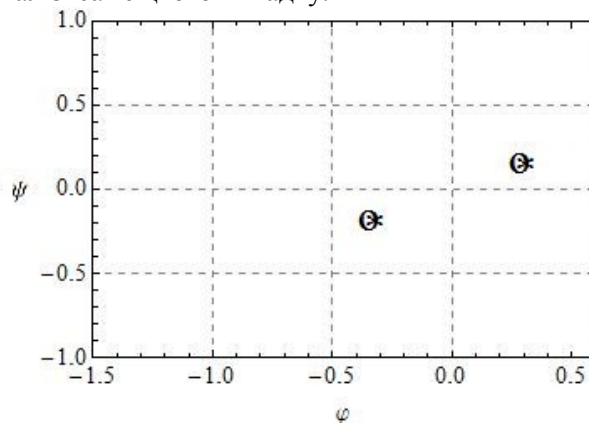


Рис. 6. Детермінована поведінка

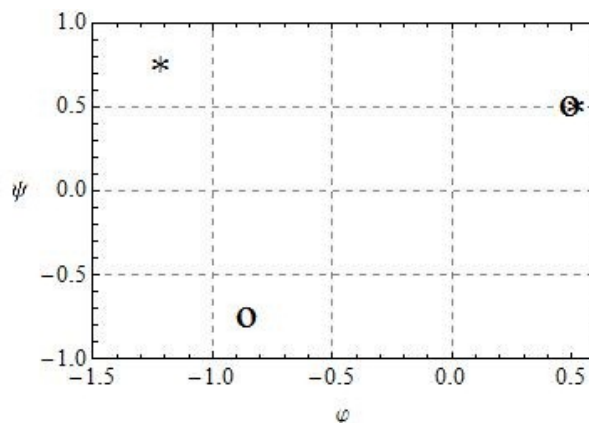


Рис. 7. Хаотична поведінка

#### Локальні та глобальні критерії хаотизації.

Одним із кількісних характеристик хаотизації процесу є показник Ляпунова, який визначає середню швидкість експоненційної розбіжності двох початково близьких траєкторій [2] і може використовуватись в якості критерію локального хаосу (оскільки обчислюється вздовж

конкретного розв'язку [5]). Величина енергії в даному випадку є глобальним параметром хаотизації.

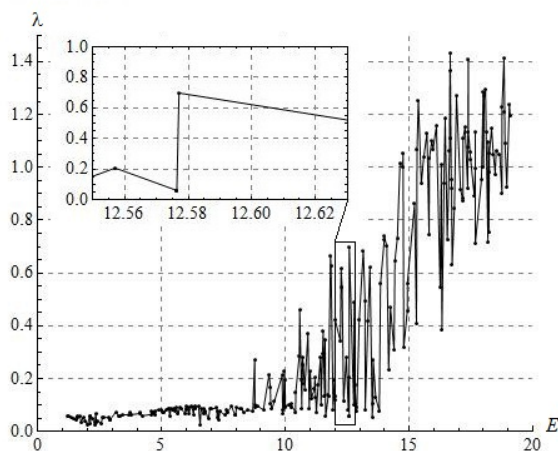


Рис. 8. Графік залежності показника Ляпунова від енергії

В багатьох нелінійних динамічних системах із ростом енергії з'являються хаотичні розв'язки [4, 6]. На Рис. 8 наведений графік залежності показника Ляпунова від величини енергії. Показник Ляпунова обраховується за допомогою алгоритму Бенеттин [2].

Як видно з Рис.8, показник Ляпунова в середньому починає зростати при перевищенні енергією певного критичного значення (ця межа залежить від параметрів системи). Отже, повна механічна енергія справді є параметром хаотизації, після досягнення якої критичного значення, система демонструє хаотичну поведінку. Однак легко також помітити, що варіативність кривої на Рис. 8 досить значна. Це свідчить про те, що при закритичних значеннях енергії, окрім хаотичної поведінки, існує також і детермінована. Характерним випадком є, наприклад, значення енергії  $E = 12.577$ , при якому при різних початкових умовах та за умови ізоенергетичності можлива як детермінована поведінка Рис. 9 (показник Ляпунова дорівнює 0.06), так і неінтегровна поведінка Рис. 10 (показний Ляпунова дорівнює 0.7).

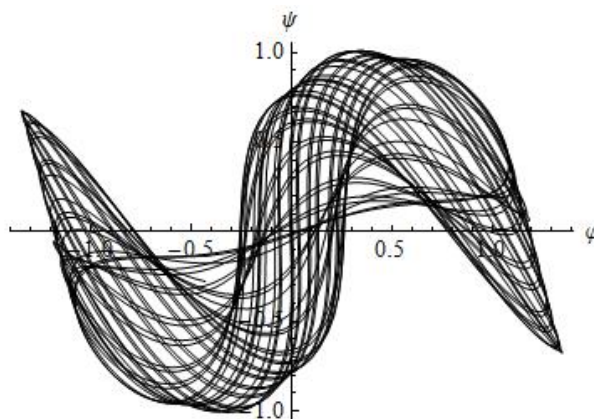


Рис. 9. Детермінована траєкторія ( $E = 12.577$ )  
 $\varphi_0 = \pi / 9, \psi_0 = 11\pi / 180, \dot{\varphi}_0 = 2.5, \dot{\psi}_0 = 1.2$

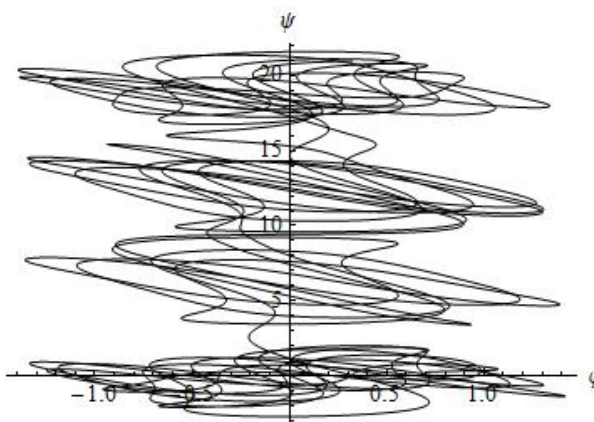


Рис. 10 Хаотична траєкторія ( $E = 12.577$ )  
 $\varphi_0 = 2\pi / 9, \psi_0 = 4\pi / 45, \dot{\varphi}_0 = 2, \dot{\psi}_0 = 0.96$

Надалі спробуємо пояснити цей феномен аналітично.

#### Аналітичні дослідження. Сепарабельне наближення.

Гамільтоніан системи має вигляд:

$$\begin{aligned}
 H(\varphi, \psi, p_\varphi, p_\psi) = & ((-24p_\psi^2 - m_{21}(72p_\psi^2 + \\
 & + l_{21}^2(g(8 + 15m_{21})(1 + (2 + l_{21})m_{21})) + \\
 & + 24(p_\psi - p_\varphi)^2)) + l_{21}m_{21}(72p_\psi(p_\varphi - p_\psi)\cos\psi \quad (4) \\
 & + 9gl_{21}m_{21}(1 + (2 + l_{21})m_{21})\cos 2\psi) / 2l_{21}^2m_{21} \times \\
 & \times (9m_{21}\cos 2\psi - 15m_{21} - 8) - gl_{21}m_{21}(\cos\varphi(1 + \\
 & + 2m_{21}) + \cos(\psi + \varphi)) / 2 = const
 \end{aligned}$$

Розвинемо гамільтоніан в ряд за степенями  $\sin \psi$ . Перший член ряду має вигляд:

$$\begin{aligned}
 H_0 = & \frac{6}{4 + 3m_{21}} p_\varphi^2 - \frac{6(2 + 2l_{21})}{l_{21}(4 + 3m_{21})} p_\psi p_\varphi + \\
 & + \frac{6(1 + (3 + 3l_{21} + l_{21}^2)m_{21})}{l_{21}^2m_{21}(4 + 3m_{21})} p_\psi^2 + \quad (5) \\
 & g(1 + (2 + l_{21})m_{21}) \sin^2(\varphi/2) = \beta_1 = const
 \end{aligned}$$

Він, очевидно, описує нелінійну систему Гамільтона, в якій  $\psi$  – циклічна координата, а отже, така система є інтегрованою (на додаток до інтеграла  $\beta_1$  існує додатковий інтеграл імпульсу  $p_\psi = \beta_\psi = const$ ). Помітимо, що розклад з точністю до другого порядку має вигляд:

$$H = H_0 + H_1 + o(\sin^2 \psi), \text{ де} \quad (6)$$

$$H_1 = \frac{1}{2} g l_{21} m_{21} \sin \varphi \sin \psi$$

Оскільки (5) сепарабельна, перейдемо до змінних дія – кут [2]. Змінні дії визначаються за формулою:

$$J_k = \frac{1}{2\pi} \oint p dk = const, k = \varphi, \psi, \quad (7)$$

де  $\gamma_k$  – незалежні інваріантні криві.

Опускаючи викладки, для  $J_\varphi$  маємо:

$$J_\varphi = \frac{\sqrt{4g(4+3m_{21})(b-a)}}{\sqrt{3m_{21}l_{21}}} \times \quad (8)$$

$$\times E \left[ \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{a}{b} \right), \sqrt{\frac{2b}{b-a}} \right], \text{ де}$$

$$a = 3p_\psi^2 + l_{21}^2 m_{21} (g + 2gm_{21} + gm_{21}l_{21} - 2\beta_1), \quad (9)$$

$$b = l_{21}^2 m_{21} (g + 2gm_{21} + gm_{21}l_{21}),$$

а  $E(k, \varphi)$  – еліптичний інтеграл другого роду.

Функція обмеженої дії такого канонічного перетворення з урахуванням циклічності  $\psi$  має вигляд:

$$W(\varphi, \psi, \beta_\psi, \beta_1) = \beta_\psi \psi + \frac{1}{6l_{21}m_{21}} (3\beta_\psi (3+2l_{21}) \times \quad (10)$$

$$\times m_{21} \varphi - 2\sqrt{3gm_{21}(4+3m_{21})(3\beta_\psi^2 + 2\beta_1 l_{21}^2 m_{21})} \times$$

$$\times E \left[ \frac{\varphi}{2}, \frac{2l_{21}^2 m_{21} (g + 2gm_{21} + gm_{21}l_{21})}{3\beta_\psi^2 + 2\beta_1 l_{21}^2 m_{21}} \right])$$

Також очевидно, що в даному випадку,  $J_\psi = \beta_\psi$ .

Змінні кути, що визначаються як:

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\partial W(\varphi, \psi, J_\psi, \beta_1(J_\varphi, J_\psi))}{\partial J_\varphi} \\ \theta_2 = \frac{\partial W(\varphi, \psi, J_\psi, \beta_1(J_\varphi, J_\psi))}{\partial J_\psi} \end{cases} \quad (11)$$

зручно представити через вихідні інтеграли (які мають фізичний сенс, що суттєво спрощують подальший аналіз). Оскільки

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial J_\varphi}{\partial \beta_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial J_\varphi}, \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta_\psi} = - \frac{\partial J_\varphi}{\partial \beta_\psi} / \frac{\partial J_\varphi}{\partial \beta_1} \end{cases} \quad (12)$$

і отже:

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\partial W}{\partial \beta_1} / \frac{\partial J_\varphi}{\partial \beta_1} \\ \theta_2 = - \frac{\partial W}{\partial \beta_1} \frac{\partial J_\varphi}{\partial \beta_\psi} / \frac{\partial J_\varphi}{\partial \beta_1} + \frac{\partial W}{\partial \beta_\psi} \end{cases} \quad (13)$$

легко отримати у позначеннях (9):

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{2} F \left[ \frac{\varphi}{2}, \frac{2b}{3\beta_\psi^2 + 2\beta_1 l_{21}^2 m_{21}} \right] / \\ / F \left[ \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{a}{b} \right), \frac{2b}{3\beta_\psi^2 + 2\beta_1 l_{21}^2 m_{21}} \right] \\ \theta_2 = \psi + \varphi (1 + 3/2l_{21}) \end{cases} \quad (14)$$

де  $F(\varphi, k)$  – еліптичний інтеграл першого роду.

Легко переконатися, що  $\theta_1(-\varphi) = -\theta_1(\varphi)$ , крім того, при зміні  $\varphi$  від  $-\varphi_{\max}$  до  $\varphi_{\max}$ ,  $\theta_1$  змінюється від  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ .

При цьому  $\omega_1 = \frac{\partial H_0(J_\varphi, J_\psi)}{\partial J_\varphi}$ ,  $\omega_2 = \frac{\partial H_0(J_\varphi, J_\psi)}{\partial J_\psi}$ ,

чи, з урахуванням (11):

$$\begin{cases} \omega_1 = \left( \frac{\partial J_\varphi(\beta_1, \beta_\psi)}{\partial \beta_1} \right)^{-1} \\ \omega_2 = \frac{\partial J_\varphi(\beta_1, \beta_\psi)}{\partial \beta_\psi} \left( \frac{\partial J_\varphi(\beta_1, \beta_\psi)}{\partial \beta_1} \right)^{-1} \end{cases} \quad (15)$$

Остаточні вирази, придатні для розрахунків, у позначеннях (9) мають вигляд:

$$\begin{cases} \omega_1 = \pi \sqrt{\frac{6\beta_1 l_{21}^2 m_{21} - 9J_\psi^2}{4l_{21}^2 m_{21} (4+3m_{21})}} / \\ / E \left[ \frac{1}{2} \operatorname{arccos} \left( \frac{b}{a} \right), \frac{2b}{3\beta_\psi^2 + 2\beta_1 l_{21}^2 m_{21}} \right] \\ \omega_2 = 3\beta_\psi / l_{21}^2 m_{21} \end{cases} \quad (16)$$

Проаналізуємо отриманий чисельним шляхом в попередньому розділі феномен для двох ізоенергетичних рухів (Рис. 9, Рис. 10):

1)  $E = 12.577$ ,

$\varphi_0 = \pi/9, \psi_0 = 11\pi/180, \dot{\varphi}_0 = 2.5, \dot{\psi}_0 = 1.2$ ;

2)  $E = 12.577$ ,

$\varphi_0 = 2\pi/9, \psi_0 = 4\pi/45, \dot{\varphi}_0 = 2, \dot{\psi}_0 = 0.96$ .

Для першого випадку 1)  $\omega_1/\omega_2 = 0.33601$ . Показник Ляпунова 0.06. Рух детермінований. Відповідний перетин Пуанкаре поданий на Рис. 12.

Для другого випадку  $\omega_1/\omega_2 \approx 0.38469$ , показник Ляпунова дорівнює 0.7 і рух хаотичний, як впливає із перетину Пуанкаре Рис. 13.

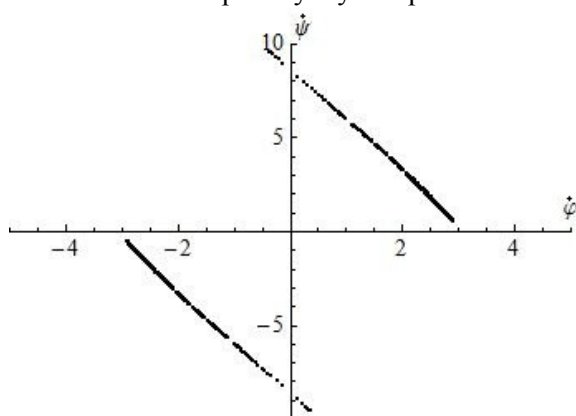


Рис. 12. Перетин Пуанкаре регулярного руху 1)

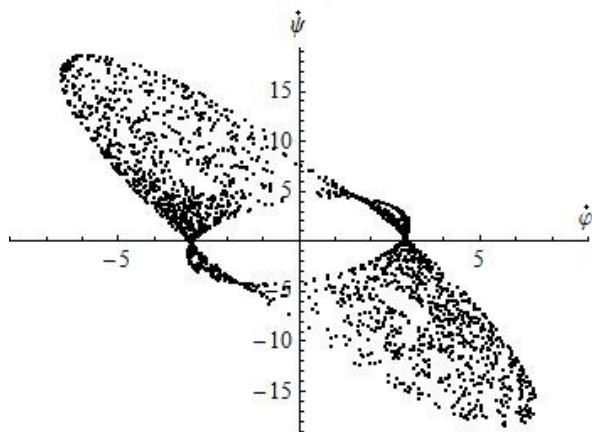


Рис. 13. Перетин Пуанкаре хаотичного руху 2)

Для аналізу рухів, відповідно до теореми КАМ [1], оцінимо резонансність відношення частот. Такий аналіз легко провести на основі Рис. 14, Рис. 15, на яких зображені фігури Ліссажу, що відповідають змінам  $\sin \omega_1 t$  (вісь  $x$ ) та  $\sin \omega_2 t$  (вісь  $y$ ).

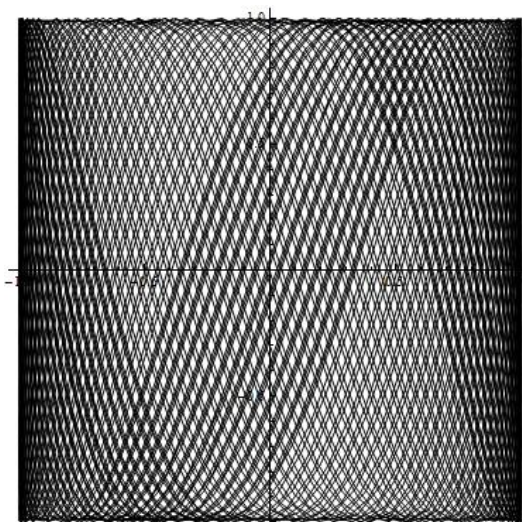


Рис. 14. Фігура Ліссажу для 1)

Повне покриття області траєкторіями на Рис. 14 свідчить про ірраціональність відношення  $\omega_1/\omega_2$ .

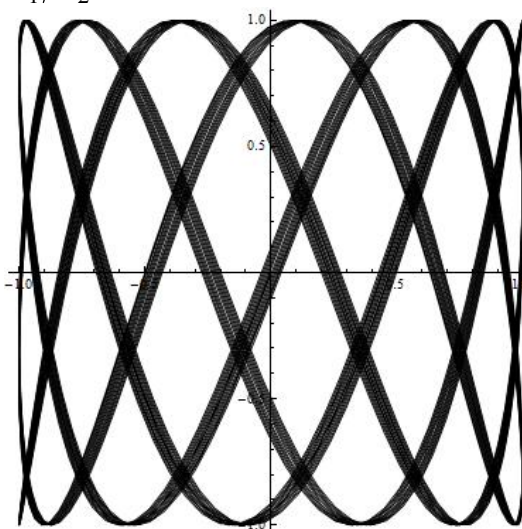


Рис. 15. Фігура Ліссажу для 2)

Із заповненості траєкторіями області змін (відсутності чи присутності періодичності кривої) видно, що у випадку 1) відношення частот ірраціональне, для 2) – раціональне. Відтак, відповідно до теореми КАМ, для початкових умов 1) існує область змін гамільтоніана, в якій система залишається інтегрованою, а тор в редукованому фазовому просторі, на якому лежить траєкторія, деформується, але не руйнується.

Проте цей феномен може бути також пояснений із використанням іншої необхідної умови детермінованості руху.

**Канонічні збурення сепарабельного  
наближення.**

Застосуємо канонічну теорію збурень для врахування наступного члена ряду (6):

$$H(\vec{\theta}, \vec{J}) = H_0(\vec{J}) + H_1(\vec{\theta}, \vec{J}), \quad (17)$$

де  $H_1 = 1/2 g l_{21} m_{21} \sin \psi(\theta_1, \theta_2) \sin \varphi(\theta_1)$  – наступний член розкладу  $H$  за степенями  $\sin \psi$ .

Нехай нові змінні дія – кут  $\vec{K}, \vec{\Phi}$ . Тоді, очевидно:

$$H_0(\vec{J}) = \hat{H}_0(\vec{K}), \quad (18)$$

$$\vec{\omega}^0(\vec{K}) \nabla_{\theta} \hat{W}_1 + H_1(\vec{\theta}) = \hat{H}_1(\vec{K}), \quad (19)$$

де  $\hat{W}_0 = \vec{\theta} \cdot \vec{K}$ ,  $\hat{W}_1$  – наступний член розкладу  $\hat{W}$  за степенями  $\sin \psi(\vec{\theta})$ . Усереднюючи (19) за  $\vec{\theta}$  на  $[-\pi, \pi]$ , з урахуванням мультиперіодичності за  $\vec{\theta}$ , а також відсутності постійної складової в  $\nabla_{\theta} \hat{W}_1$ , отримаємо:

$$\hat{H}_1(\vec{K}) = \bar{H}_1(\vec{K}) \quad (20)$$

При підрахунку

$$\bar{H}_1(\vec{K}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} 1/2 g l_{21} m_{21} \sin \psi(\theta_{\varphi}, \theta_{\psi}) \sin \varphi(\theta_{\varphi}) d\theta_2$$

врахуємо, що  $\theta_2 = \psi + \varphi(1 + 3/2l_{21})$ , а отже:

$$\bar{H}_1(\vec{K}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \frac{d\theta_1}{d\varphi} d\varphi \int_{-\pi-\varphi(1+3/2l_{21})}^{\pi-\varphi(1+3/2l_{21})} 1/2 g l_{21} m_{21} \sin \psi \sin \varphi d\psi = 0$$

Таким чином, з точністю до  $\sin^2 \psi$   $\hat{H}(\vec{K}) = H_0(\vec{J})$ , і гамільтонова система, як і раніше, інтегровна.

Однак необхідною умовою застосування канонічної теорії збурень у даному варіанті є  $|\sin \psi| < 1$  (необхідна умова збіжності степеневого розкладу). Ця умова не буде виконуватись у випадку прогресивної зміни  $\psi$ . У цьому випадку розв'язок буде хаотичним. Легко бачити (Рис. 9, Рис. 10), що у випадку 1) зміни  $\psi$  мають коливальний характер, а у випадку 2) – прогресивний. Таким чином, у даному випадку, введена необхідна умова підтверджена і може використовуватись поряд із класичною умовою нерезонансності відношення частот.

#### Висновки

У роботі проведений чисельно-аналітичний аналіз детермінованої і хаотичної поведінки гамільтонової динамічної системи, що описує скінченні відхилення подвійного фізичного маятника.

Шляхом аналізу перетинів Пуанкаре показано, що детерміновані режими коливальні можливі як у випадку малих, так і великих амплітуд коливальних.

Побудована залежність першого показника Ляпунова від повної енергії. Показано, що хаотизація фазового потоку пропорційна величині повної енергії. Підмічена велика варіативність показника Ляпунова для різноманітних траєкторій з однаковими значеннями повної енергії.

Запропонований новий підхід до аналізу хаотизації системи, оснований на розвиненні гамільтоніана в степеневий ряд за природним набором функцій. На основі цього підходу застосований класичний метод канонічних збурень. Виведена необхідна умова локальної інтегровності динамічної системи.

Наведений чисельний приклад, що ілюструє коректність введеної умови інтегровності. Шляхом аналізу резонансності кругових частот змінних «кут» для нульового наближення і застосування теореми КАМ у цьому випадку, проілюстрований збіг класичного і запропонованого підходів до аналізу хаотизації поведінки даної системи.

На основі застосування модифікованого методу канонічних збурень показано, що врахування першого наближення не змінює кругові частоти змінних «кут» а також не впливає на умови хаотизації системи.

#### Список використаних джерел

1. Гаральд Іро. Класична механіка: переклад з німецької — Львів: ЛНУ, 1999. — 464 с.
2. М. Табор Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике: перевод с английского – Москва: Эдиториал УРСС, 2001. – 320 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Р. Лекции по аналитической механике. – Москва: Наука, 1966. – 300 с.
4. Russ Tedrake, Massachusetts Institute of Technology, Underactuated Robotics: Learning, Planning, and Control for Efficient and Agile Machines, Course Notes for MIT 6.832, 2009, 129 p.
5. Benettin G., Galgani L., Strelcyn JM. Kolmogorov entropy and numerical experiments. Phys Rev A, 1976, Vol. 14, No. 6, P. 2338–2345.
6. T. Stachowiak, T. Okada, A numerical analysis of chaos in the double pendulum,

- Journal of Chaos, Solitons and Fractals, 2006, Vol. 29, P. 417–422.
7. O.I. Olusola, U.E.Vincent, A.N.Njah, Synchronization, multistability and basin crisis in coupled pendula, Journal of Sound and Vibration, 2010, Vol. 329, P. 443–456.
  8. J. J. Thomsen, Chaotic dynamics of the partially follower-loaded elastic double pendulum, Journal of Sound and Vibration, 1995, Vol. 884, Is. 3, P. 385 – 405.
  9. Ruiqi Wang, Zhujun Jing, Chaos control of chaotic pendulum system, Journal of Chaos, Solitons and Fractals, 2004, Vol. 21, P. 201 – 207.
  10. A. Ohlhoff, P. H. Richter, Forces in the Double Pendulum, ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 00, 2006, P. 1 – 22.
  11. Troy Shinbrot, Celso Grebogi, Jack Wisdom, James A. Yorke, Chaos in a double pendulum, American Journal of Physics, 1992, Vol. 60, Is. 6, P. 491 – 499.
- References**
1. IRO, H. (1999) *Classical mechanics: translation from German*. Lviv: LNU.
  2. TABOR, M. (2001) *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics. Translation from English*. Moscow: Editorial URSS.
  3. GANTMACHER, F. (1966) *Lectures in analytical mechanics*. Moscow: Nauka.
  4. TEDRAKE, R. (2009) *Underactuated Robotics: Learning, Planning, and Control for Efficient and Agile Machines*, Massachusetts Institute of Technology, Course Notes for MIT 6.832.
  5. BENETTIN, G., GALGANI, L. and STRELCYN, J. (1976) Kolmogorov entropy and numerical experiments. Phys Review A 14 (6), p. 2338–2345.
  6. STACHOWIAK, T., OKADA, T. (2006) A numerical analysis of chaos in the double pendulum, Journal of Chaos, Solitons and Fractals 29, p. 417–422. Available from: www.sciencedirect.com.
  7. OLUSOLA, O., VINCENT, U. and NJAH, A. (2010) Synchronization, multistability and basin crisis in coupled pendula, Journal of Sound and Vibration 329, p. 443–456.
  8. THOMSEN, J. (1995) Chaotic dynamics of the partially follower-loaded elastic double pendulum, Journal of Sound and Vibration 884 (3), p. 385 – 405.
  9. WANG, R., JING, Z. (2004) Chaos control of chaotic pendulum system, Journal of Chaos, Solitons and Fractals 21, p. 201 – 207.
  10. OHLHOFF, A., RICHTER, P. (2006) Forces in the Double Pendulum, ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 00, p. 1 – 22.
  11. SHINBROT, T. et al. (1992) Chaos in a double pendulum, American Journal of Physics 60 (6), p. 491 – 499.

Надійшла до редколегії 17.04.14