К 517.9

Капустян О.В.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Капустян О.А.[2], к.ф.-м.н., зав.сект.,
Русіна А.В. [3], аспірант.

O.V. Kapustyan[1], Sc.D, professor
O.A. Kapustyan[2], PhD,
A.V Rusina[3], graduate student

Наближений синтез в імпульсній розподіленій задачі оптимального керування зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами.

Approximate synthesis in distributed impulsive optimal control problem with quickly-oscillating coefficients.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: kapustyanav@gmail.com
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: olena_kap@gmail.com
[3] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: rusina.alina@gmail.com

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: kapustyanav@gmail.com
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: olena_kap@gmail.com
[3] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: rusina.alina@gmail.com

В роботі обґрунтовано формулу наближеного оптимального керування в формі оберненого зв'язку (синтезу) в задачі оптимального керування розв'язками параболічного рівняння зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами, що зазнають імпульсного керованого збурення в фіксований момент часу.
Ключові слова: оптимальне керування, наближений синтез, імпульсне збурення.

One of the most important problem optimal control theory of distributed parameter systems is to obtain synthesis - optimal control in a feedback form. Wide class of both distributed and lumped control systems without constraints was explored in the earliest works. In the case when operator have quickly-oscillating coefficients is necessary to justify approximate formula for average synthesis, In this paper, optimal control function which has been expressed in a feedback form is found for the parabolic equations with quickly-oscillating coefficients and controlled impulsive perturbation at a fixed time. The exact formula for the synthesis was found and its approximate form that lies in substitution of quickly-oscillating parameters with averaged and infinite sum with finite was justified. We use Pontryagin's maximum principle, average theory.
Key Words: optimal control, approximate synthesis, impulsive perturbation.

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

Вступ.

Однією з важливих задач теорії оптимального керування розподіленими системами є побудова синтезу, тобто оптимального керування в формі оберненого зв'язку [1], [2]. Для широкого класу задач як з розподіленим [2], так і з зосередженим керуванням [3] без обмежень вдається одержати замкнену форму оптимального синтезу, параметри якої виражаються через власні функції та числа відповідного диференціального оператора. У випадку наявності у цьому операторі швидкоосциллюючих коефіцієнтів актуальною є задача обгрунтування формули наближеного усередненого синтезу [4], [5]. В данній роботі з цієї точки зору розглянута параболічна задача з розподіленим керуванням в правій частині та з імпульсною керованою дією [6]. На основі знайденої формули точного синтезу запропоновано та обґрунтовано процедуру побудови наближеного усередненого синтезу, яка полягає в заміні в формулі точного розв'язку всіх швидкоосцилюючих параметрів на усереднені, а всіх нескінчених сум на скінчені.

Постановка задачі.

Нехай $\Omega \subset R^n$ - обмежена область, $\varepsilon \in (0,1)$ - малий параметр, $Q = (0,T) \times \Omega$, $\theta \in (0,T)$ - фіксований момент імпульсного збурення, $a \neq -1, b \in R, c > 0, d > 0$-фіксовані. Керований процес $\{y, u, w\}$ описується задачею

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} = A^\varepsilon y + u(t,x), (t,x) \in Q \\ y\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ y\big|_{t=0} = y_0^\varepsilon, \end{cases} \quad (1)$$

$$y(\theta + 0, x) - y(\theta, x) = ay(\theta, x) + bw(x) \text{ - для м.в. } x \in \Omega, \quad (2)$$

$$J(y,u,w) = \int_\Omega y^2(T,x)dx + c\int_Q u^2(t,x)dtdx + d\int_\Omega w^2(x)dx \to \inf, \quad (3)$$

де $A^\varepsilon = div(a^\varepsilon \nabla)$, $a^\varepsilon(x) = a\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, a - вимірна, періодична матриця, що задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості: $\exists v_1 > 0, v_2 > 0 \,\forall \eta \in R^n$

$$v_1 \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\eta_i\eta_j \leq v_2 \sum_{i=1}^n \eta_i^2. \quad (4)$$

Нехай $\{X_i^\varepsilon\}, \{\lambda_i^\varepsilon\}$ - розв'язки спектральної задачі

$$\begin{cases} A^\varepsilon X_i^\varepsilon = -\lambda_i^\varepsilon X_i^\varepsilon, \\ X_i^\varepsilon\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$\{X_i^\varepsilon\} \subset H_0^1(\Omega)$ - ортонормований базис в $L_2(\Omega)$, $0 < \lambda_1^\varepsilon \leq \lambda_2^\varepsilon \leq \cdots$, $\lambda_i^\varepsilon \to \infty, i \to \infty$.

В роботі доводиться, що задача (1)-(3) має єдиний розв'язок $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon, w^\varepsilon\}$ в класі $W_\theta(0,T) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, де $W_\theta(0,T)$- це клас функцій $y \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, таких що їх звуження на $(0,\theta)$ та (θ,T) мають узагальнені похідні по t з класів $L^2(0,\theta; H^{-1}(\Omega))$ та $L^2(\theta,T; H^{-1}(\Omega))$ відповідно. Зокрема, кожна функція з класу $W_\theta(0,T)$ є неперервною на $(0,T)\setminus\{\theta\}$ в нормі простору $L_2(\Omega)$ і будемо вважати, що в точці $t = \theta$ вона є неперервною зліва.

За допомогою принципу максимуму Понтрягіна [6] встановлюється програмний вигляд $u^\varepsilon, w^\varepsilon$, що при відсутності обмежень на керування дозволяє визначити формулу синтезу

$$u^\varepsilon[t,x,y^\varepsilon(t,x)] = \sum_{i=1}^\infty \beta_i^\varepsilon(t)\left(y^\varepsilon(t), X_i^\varepsilon\right)X_i^\varepsilon(x), \quad (6)$$

$$w^\varepsilon[x,y^\varepsilon(\theta,x)] = \sum_{i=1}^\infty \gamma_i^\varepsilon\left(y^\varepsilon(\theta), X_i^\varepsilon\right)X_i^\varepsilon(x), \quad (7)$$

де $\{\beta_i^\varepsilon(t)\}, \{\gamma_i^\varepsilon\}$ - відомі параметри, що залежать від $\{\lambda_i^\varepsilon\}$.

Основною метою роботи є обґрунтування того факту, що формули

$$u_N^0[t,x,y_N^\varepsilon(t,x)] = \sum_{i=1}^N \beta_i^0(t)\left(y_N^\varepsilon(t), X_i^0\right)X_i^0(x), \quad (8)$$

$$w_N^0[x,y_N^\varepsilon(\theta,x)] = \sum_{i=1}^N \gamma_i^0\left(y_N^\varepsilon(\theta), X_i^0\right)X_i^0(x), \quad (9)$$

де всі параметри замінені на усереднені, реалізують наближений синтез в задачі (1)-(3), тобто $\forall \eta > 0$

$$\left|J(y^\varepsilon, u^\varepsilon, w^\varepsilon) - J(y_N^\varepsilon, u_N^0[y_N^\varepsilon], w_N^0[y_N^\varepsilon])\right| < \eta$$

для достатньо великих $N \geq 1$ і достатньо малих $\varepsilon > 0$, де y_N^ε - розв'язок задачі (1)-(2) з керуванням u_N^0, w_N^0.

Основні результати.

Шукаємо розв'язок (1)-(3) у вигляді

$$y^\varepsilon(t,x) = \sum_{i=1}^\infty y_i^\varepsilon(t)X_i^\varepsilon(x),\ u^\varepsilon(t,x) = \sum_{i=1}^\infty u_i^\varepsilon(t)X_i^\varepsilon(x),$$

$$w^\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^\infty w_i^\varepsilon X_i^\varepsilon(x)$$

Тоді маємо злічену систему одномірних імпульсних задач оптимального керування:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y_i^\varepsilon(t) = -\lambda_i^\varepsilon y_i^\varepsilon + u_i^\varepsilon(t), \\ y_i^\varepsilon(0) = y_i^{0\varepsilon}, \\ y_i^\varepsilon(\theta+0) - y_i^\varepsilon(\theta) = a y_i^\varepsilon(\theta) + b w_i^\varepsilon, \\ \left(y_i^\varepsilon(T)\right)^2 + c\int_0^T \left(u_i^\varepsilon(t)\right)^2 dt + d\left(w_i^\varepsilon\right)^2 \to \inf, \end{cases} \quad (10)$$

де $y_i^{0\varepsilon} = \left(y_i^\varepsilon, X_i^\varepsilon\right)$. Використовуючи принцип максимуму Понтрягіна [6], одержуємо, що задача (10) має єдиний розв'язок, програмна форма якого визначається формулами

$$\forall t \in [0,T]\ u_i^\varepsilon = -\frac{(a+1)dy_i^{0\varepsilon} e^{-\lambda_i^\varepsilon T} K_i^\varepsilon(t)}{cd + cb^2 e^{-2\lambda_i^\varepsilon (T-\theta)} + \int_0^T \left(K_i^\varepsilon(t)\right)^2 dt}, \quad (11)$$

$$\forall t\in[0,T]\ w_i^\varepsilon=-\frac{bc\,e^{-\lambda_i^\varepsilon(T-\theta)}}{dK_i^\varepsilon(t)}u_i^\varepsilon(t),\quad (12)$$

$$K_i^\varepsilon(t)=\begin{cases}(a+1)e^{-\lambda_i^\varepsilon T}e^{\lambda_i^\varepsilon t}, t\in[0,\theta],\\ e^{-\lambda_i^\varepsilon T}e^{\lambda_i^\varepsilon t},\ t\in(\theta,T].\end{cases}$$

Позначимо

$$\alpha_i^\varepsilon(t)=\frac{(a+1)de^{-\lambda_i^\varepsilon T}K_i^\varepsilon(t)}{cd+cb^2e^{-2\lambda_i^\varepsilon(T-\theta)}+\int_0^T\left(K_i^\varepsilon(t)\right)^2dt}.$$

Тоді підставляючи (11), (12) в (10) і вилучаючи $y_i^{0\varepsilon}$, одержуємо керування в формі оберненого зв'язку

$$u_i^\varepsilon[t,y_i^\varepsilon(t)]=\beta_i^\varepsilon(t)y_i^\varepsilon(t),\quad (13)$$

$$w_i^\varepsilon[y_i^\varepsilon(\theta)]=\frac{bc}{d(a+1)}\beta_i^\varepsilon(\theta)y_i^\varepsilon(\theta),\quad (14)$$

$$\beta_i^\varepsilon(t)=e^{\lambda_i^\varepsilon t}\alpha_i^\varepsilon(t)\left(1+\int_0^t e^{\lambda_i^\varepsilon s}\alpha_i^\varepsilon(s)ds\right)^{-1},\ t\in[0,\theta],$$

$$\beta_i^\varepsilon(t)=e^{\lambda_i^\varepsilon t}\alpha_i^\varepsilon(t)\left(a+1+(a+1)\int_0^\theta e^{\lambda_i^\varepsilon s}\alpha_i^\varepsilon(s)ds+\frac{b^2c\alpha_i^\varepsilon(\theta)}{(a+1)d}e^{\lambda_i^\varepsilon\theta}+\int_0^t e^{\lambda_i^\varepsilon s}\alpha_i^\varepsilon(s)ds\right)^{-1},\ t\in(\theta,T].\quad (15)$$

Зауважимо, що з останньої формули функції β_i^ε рівномірно обмежені в сукупності на $[0,T]$:

$$\exists\beta>0\,\forall i\ge1\,\forall\varepsilon\in(0,1)\ \sup_{t\in[0,T]}\left|\beta_i^\varepsilon(t)\right|\le\beta.\quad (16)$$

Таким чином, синтез в задачі (1)-(3) визначається формулами (6), (7), де β_i^ε визначається з (15),

$$\gamma_i^\varepsilon=\frac{bc}{d(a+1)}\beta_i^\varepsilon(\theta).$$

Переходимо до побудови наближеного усередненого синтезу. Нехай постійна матриця a^0 є усередненою для $a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $A^0=div(a^0\nabla)$, $\{X_i^0\}$, $\{\lambda_i^0\}$ - розв'язки відповідної спектральної задачі, причому спектр A^0 є простим, тобто

$$0<\lambda_1^0<\lambda_2^0<\cdots<\lambda_k^0<\cdots,\ \lambda_i^0\to\infty,\ i\to\infty.\quad (17)$$

Тоді для довільних $i\ge1$ справедливі граничні рівності [7]

$$\lambda_i^\varepsilon\to\lambda_i^0, X_i^\varepsilon\to X_i^0 \text{ в } L_2(\Omega) \text{ при } \varepsilon\to0.\quad (18)$$

Будемо вважати, що

$$y_0^\varepsilon\to y_0 \text{ слабо в } L_2(\Omega) \text{ при } \varepsilon\to0.\quad (19)$$

Виходячи з формули (15) одержуємо, що для всіх $t\in[0,T]$, та всіх $i\ge1$ при $\varepsilon\to0$

$$\beta_i^\varepsilon(t)\to\beta_i^0(t),\ \gamma_i^\varepsilon\to\gamma_i^0=\frac{bc}{d(a+1)}\beta_i^0(\theta),\quad (20)$$

де $\beta_i^0(t)$ задається формулою (15) з заміною λ_i^ε на λ_i^0.

Тепер розглянемо задачу

$$\begin{cases}\frac{\partial y}{\partial t}=A^\varepsilon y+u_N^0[t,x,y],(t,x)\in Q\\ y|_{\partial\Omega}=0,\\ y|_{t=0}=y_0^\varepsilon,\end{cases}\quad (21)$$

$$y(\theta+0,x)-y(\theta,x)=ay(\theta,x)+bw_N^0[x,y(\theta)] \text{ для м.в. } x\in\Omega,\quad (22)$$

де для $y\in L^2(\Omega)$, $z\in L^2(\Omega)$

$$u_N^0[t,x,y]=\sum_{i=1}^N\beta_i^0(t)(y(t),X_i^0)X_i^0(x),$$

$$w_N^0[x,z]=\sum_{i=1}^N\gamma_i^0(z,X_i^0)X_i^0(x),$$

Оскільки в силу (16)

$$\forall t\in[0,T]\ \left\|u_N^0[t,x,y]\right\|\le\beta\|y\|,\quad (23)$$

то задача (21) має єдиний розв'язок в класі $W(0,\theta)$ [8]. Оскільки $W(0,\theta)\in C([0,\theta];L^2(\Omega))$ і справедлива нерівність

$$\left\|w_N^0[x,z]\right\|\le\frac{bc}{d(a+1)}\beta\|z\|,\quad (24)$$

то імпульсна задача (21), (22) має єдиний розв'язок $y=y_N^\varepsilon(t,x)$ в класі $W_\theta(0,T)$.

Основним результатом роботи є теорема

Теорема. Для довільного $\eta>0$ існує $\overline{N}\ge1$, $\overline{\varepsilon}\in(0,1)$ такі що $\forall N\ge\overline{N}$, $\forall\varepsilon\in(0,\overline{\varepsilon})$

$$\left|J(y^\varepsilon,u^\varepsilon,w^\varepsilon)-J(y_N^\varepsilon,u_N^0[t,x,y_N^\varepsilon(t,x)],w_N^0[x,y_N^\varepsilon(\theta,x)])\right|<\eta,\quad (25)$$

де $\{y^\varepsilon,u^\varepsilon,w^\varepsilon\}$ - оптимальний процес в задачі (1)-(3), y_N^ε - розв'язок задачі (21), (22).

Доведення. Розглянемо допоміжну задачу

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial t}=A^\varepsilon z+u^0[t,x,z],(t,x)\in Q\\ z|_{\partial\Omega}=0,\\ z|_{t=0}=y_0^\varepsilon,\end{cases}\quad (26)$$

$$z(\theta+0,x)-z(\theta,x)=az(\theta,x)+bw^0[x,z(\theta)],\quad (27)$$

Імпульсна задача (26), (27) в класі $W_\theta(0,T)$ має єдиний розв'язок $z^\varepsilon(t,x)$, причому для м.в. $t\in(0,T)\setminus\{\theta\}$ справедлива оцінка

$$\frac{d}{dt}\|z^\varepsilon(t)\|^2+2\nu_1\|z^\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1}\le 2\beta\|z^\varepsilon(t)\|^2 \quad (28)$$

і з нерівності Гронуола одержуємо:

$$\forall t\in[0,\theta]\ \ \|z^\varepsilon(t)\|^2\le\|y_0^\varepsilon\|^2e^{2\beta\theta}, \quad (29)$$

$$\int_0^\theta\|z^\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1}dt\le\frac{1}{2\nu_1}\|y_0^\varepsilon\|^2\left(2\beta\theta e^{2\beta\theta}+1\right). \quad (30)$$

Тоді послідовність $\{z^\varepsilon\}$ обмежена в $W(0,\theta)\subset C([0,\theta];L^2(\Omega))$ і лема про компактність [8] гарантує, що існує функція $z\in W(0,\theta)$ така, що по підпослідовності

$$z^\varepsilon\to z \text{ в } L^2((0,\theta)\times\Omega) \text{ і м.с. в } (0,\theta)\times\Omega,$$
$$z^\varepsilon(t)\to z(t) \text{ в } L^2(\Omega) \text{ м.с. і слабо } \forall t\in[0,\theta],$$
$$z^\varepsilon\to z \text{ слабо в } L^2\left(0,\theta;H_0^1(\Omega)\right). \quad (31)$$

Легко перевірити, що

$$u^0[t,x,z^\varepsilon]\to u^0[t,x,z] \text{ в } L^2((0,\theta)\times\Omega). \quad (32)$$

Тоді в силу $A^\varepsilon\xrightarrow{G}A^0$ з [9] одержуємо, що z - розв'язок задачі (26) з оператором A^0 та початковими даними y^0, причому при $\varepsilon\to 0$

$$z^\varepsilon\to z \text{ в } C([\delta,\theta];L^2(\Omega))\ \forall\delta>0. \quad (33)$$

Оскільки для будь-яких $z_1,z_2\in L^2(\Omega)$

$$\left\|w^0[x,z_1]-w^0[x,z_2]\right\|\le\frac{bc}{d(a+1)}\beta\|z_1-z_2\|, \quad (34)$$

$$w^0[x,z^\varepsilon(\theta)]\to w^0[x,z(\theta)] \text{ в } L^2(\Omega). \quad (35)$$

Тоді в $L^2(\Omega)$

$$z^\varepsilon(\theta+0)\to z(\theta)+az(\theta)+bw^0[x,z(\theta)] \quad (36)$$

Розглядаючи задачу (26) на інтервалі (θ,T) з

$$z^\varepsilon(\theta+0)=z^\varepsilon(\theta)+az^\varepsilon(\theta)+bw^0[x,z^\varepsilon(\theta)],$$

і використовуючи (28) на (θ,T), одержуємо

$$\forall t\in(\theta,T]\ \ \|z^\varepsilon(t)\|^2\le\|z^\varepsilon(\theta+0)\|^2e^{2\beta(T-\theta)}, \quad (37)$$

$$\int_\theta^T\|z^\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1}dt\le\frac{1}{2\nu_1}\|z^\varepsilon(\theta+0)\|^2\left(2\beta(T-\theta)e^{2\beta(T-\theta)}+1\right). \quad (38)$$

Враховуючи оцінку (29) одержуємо остаточно $\forall t\in[0,T]$

$$\|z^\varepsilon(t)\|\le\left(a+1+\frac{bc}{d(a+1)}\beta\right)\|y_0^\varepsilon\|e^{\beta T}. \quad (39)$$

Звідси маємо, що послідовність $\{z^\varepsilon\}$ обмежена в $W(\theta,T)$. Тоді аналогічно попереднім міркуванням по підпослідовності z^ε збігається до деякої функції $z\in W(\theta,T)$ на (θ,T) в сенсі (31), причому z - розв'язок задачі (26) на (θ,T) при $\varepsilon=0$, причому при $\varepsilon\to 0$ в силу (36) $z^\varepsilon\to z$ в $C([\theta,T];L^2(\Omega))$.

Отже, $z\in W_\theta(0,T)$ - розв'язок задачі (26), (27) при $\varepsilon=0$, мають місце збіжності

$$z^\varepsilon\to z \text{ в } L^2(Q) \text{ і м.с. в } Q,$$
$$z^\varepsilon\to z \text{ слабо в } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \quad (40)$$
$$\forall\delta>0\ \ z^\varepsilon\to z \text{ в}$$
$$C([\delta,\theta];L^2(\Omega))\cap C([\theta+\delta,T];L^2(\Omega))$$

і оскільки задача (26), (27) має єдиний розв'язок, то збіжність в (40) іде по всій послідовності. Тоді маємо, що $\forall\eta>0\ \ \exists\varepsilon_1\in(0,1)$ таке, що $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$

$$\left|J\left(z^\varepsilon,u^0[t,x,z^\varepsilon],w^0[x,z^\varepsilon(\theta)]\right)-J\left(z,u^0[t,x,z],w^0[x,z(\theta)]\right)\right|<\frac{\eta}{3}. \quad (41)$$

Тепер покажемо, що $\forall\eta>0\ \exists N_2\ge 1$ $\exists\varepsilon_2\in(0,1)$ такі, що $\forall N\ge N_2\ \ \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$

$$\begin{aligned}&\left|J\left(y_N^\varepsilon,u_N^0[t,x,y_N^\varepsilon],w_N^0[x,y_N^\varepsilon(\theta)]\right)-\right.\\&\left.-J\left(z^\varepsilon,u^0[t,x,z^\varepsilon],w^0[x,z^\varepsilon(\theta)]\right)\right|<\frac{\eta}{3}.\end{aligned} \quad (42)$$

Оскільки y_N^ε (аналогічно до z^ε) задовольняє (39), $u_N^0[t,x,y_N^\varepsilon]$ задовольняє (23), w_N^0 задовольняє (24), то існує константа $C_1>0$:

$$\begin{aligned}&\left|J\left(y_N^\varepsilon,u_N^0[t,x,y_N^\varepsilon(t,x)],w_N^0[x,y_N^\varepsilon(\theta)]\right)-\right.\\&\left.-J\left(z^\varepsilon,u^0[t,x,z^\varepsilon(t,x)],w^0[x,z^\varepsilon(\theta)]\right)\right|\le\\&\le C_1\left(\|y_N^\varepsilon(T)-z^\varepsilon(T)\|+\left(\int_0^T\left\|u_N^0[t,y_N^\varepsilon]-u^0[t,z^\varepsilon]\right\|^2dt\right)^{\frac12}+\right.\\&\left.+\left\|w_N^0[t,y_N^\varepsilon(\theta)]-w^0[t,z^\varepsilon(\theta)]\right\|\right)\end{aligned} \quad (43)$$

Для різниці $w_N^\varepsilon=y_N^\varepsilon-z^\varepsilon$ маємо задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w_N^\varepsilon}{\partial t}=A^\varepsilon w_N^\varepsilon+\displaystyle\sum_{i=1}^N\beta_i^0(t)\left(w_N^\varepsilon(t),X_i^0\right)X_i^0(x)+f_N^\varepsilon(t,x),\\ w_N^\varepsilon\big|_{\partial\Omega}=0,\\ w_N^\varepsilon\big|_{t=0}=0,\end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{aligned}&w_N^\varepsilon(\theta+0,x)-w_N^\varepsilon(\theta,x)=aw_N^\varepsilon(\theta,x)+\\&+b\sum_{i=1}^N\gamma_i^0\left(w_N^\varepsilon(\theta),X_i^0\right)X_i^0(x)+g_N^\varepsilon(x),\end{aligned} \quad (45)$$

$$f_N^\varepsilon(t,x) = -\sum_{i=N+1}^{\infty} \beta_i^0(t)\left(z^\varepsilon, X_i^0\right)X_i^0(x),$$

$$g_N^\varepsilon(x) = -\sum_{i=N+1}^{\infty} \gamma_i^0\left(z^\varepsilon(\theta), X_i^0\right)X_i^0(x).$$

З рівності Парсеваля, одержимо

$$\left\|f_N^\varepsilon(t)\right\|^2 \le \beta^2 \sum_{i=N+1}^{\infty}\left(z^\varepsilon(t), X_i^0\right)^2 \le$$
$$\le 2\beta^2 \sum_{i=N+1}^{\infty}\left(z(t), X_i^0\right)^2 + 2\beta^2\left\|z^\varepsilon(t) - z(t)\right\|^2, \quad (46)$$

$$\left\|g_N^\varepsilon\right\|^2 \le 2\frac{b^2c^2}{d^2(a+1)^2}\beta^2 \sum_{i=N+1}^{\infty}\left(z(\theta), X_i^0\right)^2 +$$
$$+2\frac{b^2c^2}{d^2(a+1)^2}\beta^2\left\|z^\varepsilon(\theta) - z(\theta)\right\|^2, \quad (47)$$

де z - розв'язок задачі (26), (27) при $\varepsilon = 0$.

З (44) маємо оцінки для м.в. $t \in (0,T) \setminus \{\theta\}$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w_N^\varepsilon(t)\right\|^2 + \nu_1\left\|w_N^\varepsilon(t)\right\|_{H_0^1}^2 \le \beta^2\left\|w_N^\varepsilon(t)\right\|^2 + \left(f_N^\varepsilon(t), w_N^\varepsilon(t)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left\|w_N^\varepsilon(t)\right\|^2 \le \left(2\beta^2+1\right)\left\|w_N^\varepsilon(t)\right\|^2 + \left\|f_N^\varepsilon(t)\right\|^2. \quad (48)$$

Тоді з леми Гронуола

$$\forall t \in [0,\theta] \ \left\|w_N^\varepsilon(t)\right\|^2 \le e^{\left(2\beta^2+1\right)\theta}\int_0^\theta \left\|f_N^\varepsilon(t)\right\|^2 dt, \quad (49)$$

$$\forall t \in (\theta,T] \ \left\|w_N^\varepsilon(t)\right\|^2 \le \left\|w_N^\varepsilon(\theta+0)\right\|^2 e^{\left(2\beta^2+1\right)(T-\theta)} + $$
$$+e^{\left(2\beta^2+1\right)T}\int_\theta^T \left\|f_N^\varepsilon(t)\right\|^2 dt, \quad (50)$$

Таким чином, з (45)-(50) виводимо існування такої константи, $C_2 > 0$ що для всіх $t \in [0,T]$

$$\left\|w_N^\varepsilon(t)\right\|^2 \le C_2\left(\int_0^T \sum_{i=N+1}^{\infty}\left(z(t), X_i^0\right)^2 dt + \int_0^T \left\|z^\varepsilon(t) - z(t)\right\|^2 dt + \right.$$
$$\left. + \left\|z^\varepsilon(\theta) - z(\theta)\right\|^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty}\left(z(\theta), X_i^0\right)^2\right). \quad (51)$$

Зі збіжностей (40) маємо, що другий і третій доданок в (51) не залежать від N і прямують до нуля при $\varepsilon \to 0$.

Для всіх $t \in [0,T]$ в силу нерівності Бесселя

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}\left(z(t), X_i^0\right)^2 \to 0, \ N \to \infty.$$

В силу оцінки (39), застосованої до функції $z(t)$,

$$\left|\sum_{i=N+1}^{\infty}\left(z(t), X_i^0\right)^2\right| \le \left(a + 1 + \frac{b}{a+1}\beta\right)^2 \left\|y_0\right\|^2 e^{2\beta T}.$$

Отже, за теоремою Лебега перший доданок в (51) прямує до 0 при $N \to \infty$. Звідси одержуємо (42).

Залишилось показати, що $\forall \eta > 0$ існує $\varepsilon_3 \in (0,1)$ таке, що $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$

$$\left|J\left(y^\varepsilon, u^\varepsilon, w^\varepsilon\right) - J\left(z, u^0[t,x,z], w^0[x, z(\theta)]\right)\right| < \frac{\eta}{3}, \quad (52)$$

де z - розв'язок задачі (26), (27) при $\varepsilon = 0$.

Зауважимо, що y^ε задовольняє ті самі апріорні оцінки, що і z^ε.

Покажемо, що при $\varepsilon \to 0$ в $L^2((0,\theta)\times\Omega)$

$$u^\varepsilon(t,x) = u^\varepsilon\left[t,x,y^\varepsilon(t,x)\right] \to u^0\left[t,x,y(t,x)\right]. \quad (53)$$

В силу (18), (20) для м.в. $(t,x) \in (0,\theta)\times\Omega$, для всіх $i \ge 1$ при $\varepsilon \to 0$

$$\beta_i^\varepsilon(t)\left(y^\varepsilon(t), X_i^\varepsilon\right)X_i^\varepsilon(x) \to \beta_i^0(t)\left(y(t), X_i^0\right)X_i^0(x). \quad (54)$$

Тоді з оцінки (39), застосованої до $y^\varepsilon(t)$, за теоремою Лебега для всіх $M > 1$ в $L^2((0,\theta)\times\Omega)$

$$\sum_{i=1}^{M} \beta_i^\varepsilon(t)\left(y^\varepsilon(t), X_i^\varepsilon\right)X_i^\varepsilon \to \sum_{i=1}^{M} \beta_i^0(t)\left(y(t), X_i^0\right)X_i^0. \quad (55)$$

При цьому аналогічно до попередніх міркувань з теореми Лебега в $L^2((0,\theta)\times\Omega)$

$$\sum_{i=M+1}^{\infty} \beta_i^0(t)\left(y(t), X_i^0\right)X_i^0 \to 0 \ \text{при} \ M \to \infty. \quad (56)$$

Тоді, скориставшись оптимальністю,

$$\forall t \in [0,\theta] \ \forall i \ge 1 \ \left|u_i^\varepsilon(t)\right| \le \frac{\left(|a|+1\right)^2}{c}\left|y_i^{0\varepsilon} e^{-\lambda_i^\varepsilon T}\right|. \quad (57)$$

Оскільки $y_0^\varepsilon \to y_0$ слабо в $L^2(\Omega)$, $A^\varepsilon \xrightarrow{G} A^0$, то з [9] одержуємо в $L^2(\Omega)$

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i^{0\varepsilon} e^{-\lambda_i^\varepsilon T} X_i^\varepsilon(x) \to \sum_{i=1}^{\infty} y_i^0 e^{-\lambda_i^0 T} X_i^0(x). \quad (58)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(y_i^{0\varepsilon} e^{-\lambda_i^\varepsilon T}\right)^2 \to \sum_{i=1}^{\infty}\left(y_i^0 e^{-\lambda_i^0 T}\right)^2, \varepsilon \to 0. \quad (59)$$

В силу (18) $y_i^{0\varepsilon} = \left(y_0^\varepsilon, X_i^\varepsilon\right) \to y_i^0 = \left(y_0, X_i^0\right)$ для всіх $i \ge 1$, отже

$$\forall i \ge 1 \ y_i^{0\varepsilon} e^{-\lambda_i^\varepsilon T} \to y_i^0 e^{-\lambda_i^0 T}, \ \varepsilon \to 0. \quad (60)$$

Тоді оскільки $\forall t \in [0,\theta]$

$$\left\|\sum_{i=M+1}^{\infty} \beta_i^\varepsilon(t)\left(y^\varepsilon(t), X_i^\varepsilon\right)X_i^\varepsilon\right\|^2 \le \frac{\left(|a|+1\right)^4}{c^2}\left(y_i^{0\varepsilon} e^{-\lambda_i^\varepsilon T}\right)^2, \quad (61)$$

то остання нерівність разом з (55) означає виконання (53). Тоді в силу $A^\varepsilon \xrightarrow{G} A^0$ з [9] одержуємо, що $y \equiv z$ - розв'язок задачі (26) на $(0,\theta)$ при $\varepsilon = 0$, збіжність y^ε до z на $(0,\theta)$ в сенсі (31) іде по всій послідовності і

$$y^{\varepsilon} \to z \text{ в } C\left([\delta, \theta]; L^2(\Omega)\right) \ \forall \delta > 0 . \quad (62)$$

З (62) зокрема одержуємо, що

$$y^{\varepsilon}(\theta) \to z(\theta) \text{ в } L^2(\Omega). \quad (63)$$

Покажемо, що

$$w^{\varepsilon}(x) = w^{\varepsilon}\left[x, y^{\varepsilon}(\theta)\right] \to w^0\left[x, z(\theta)\right] \text{ в } L^2(\Omega). \quad (64)$$

Враховуючи (63), для всіх $M \geq 1$ маємо в $L^2(\Omega)$

$$\sum_{i=1}^{M} \beta_i^{\varepsilon}(\theta)\left(y^{\varepsilon}(\theta), X_i^{\varepsilon}\right) X_i^{\varepsilon} \to \sum_{i=1}^{M} \beta_i^{0}(\theta)\left(z(\theta), X_i^{0}\right) X_i^{0} . \quad (65)$$

Тоді з (61) при $t = \theta$ одержуємо збіжність (64).

Далі, розглядаючи задачу (26) на (θ, T) з сильно збіжними початковими даними $(a+1) y^{\varepsilon}(\theta) + b w^{\varepsilon}(x)$, можемо застосувати попередні міркування і одержати, що для всіх $\delta > 0$

$$y^{\varepsilon} \to z \text{ в } C\left([\theta + \delta, T]; L^2(\Omega)\right), \ \varepsilon \to 0$$

Тоді має місце (52) і теорема доведена.

Список використаних джерел

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – Москва: Мир, 1972. – 396 с.
2. *Егоров А. И.* Оптимальное управление линейными системами / А.И. Егоров. – Київ: Вища школа, 1988. – 278 с.
3. *Белозеров В. Е.* Геометрические методы модального управления / В. Е. Белозеров, В. Е. Капустян. – Київ: Наукова думка, 1999. – 257 с.
4. *Сукретна А. В.* Наближений усереднений синтез задачі оптимального керування для параболічного рівняння / А. В. Сукретна, О. А. Капустян. // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 53, №10. – С. 1363 – 1374.
5. *Капустян О. В.* Усереднений синтез оптимального керування для хвильового рівняння / О. В. Капустян, А. В. Сукретна. // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 53, №5. – С. 582 – 590.
6. *Самойленко А. М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – Київ: Вища школа, 1987. – 289 с.
7. *Жиков В. В.* Усреднение дифференциальных операторов / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. – Москва: ФизМатЛит, 1993. – 442 с.
8. SELL, G. R.,YOU, Y. (2002) *Dynamics of Evolutionary Equations*. Vol 141, Applied Mathematical Sciences, Springer Verlag, New York.
9. DENKOWSKI, Z., MORTOLA, S. (1993) *Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by diferential inclusions corresponding to partial diferential equations*. JOTA, vol.78, pp. 342-371.

References

1. LIONS, ZH.-L. (1972) *Optimalnoe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi.* Moskva: Mir.
2. EGOROV, A. I. (1988) *Optimalnoe upravlenie linejnymi sistemami.* Kiïv: Vishha shkola.
3. BELOZEROV, V. E., KAPUSTYAN, V. E. (1999) *Geometricheskie metody modalnogo upravleniya.* Kiïv: Naukova dumka.
4. SUKRETNA, A. V., KAPUSTYAN, O. A. (2004) *Nablizhenij userednenij sintez zadachi optimalnogo keruvannya dlya parabolichnogo rivnyannya*. Ukr. mat. zhurn. 53(10), p. 1363 – 1374.
5. KAPUSTYAN, O. V., SUKRETNA, A. V. (2003) *Userednenij sintez optimalnogo keruvannya dlya xvilovogo rivnyannya*. Ukr. mat. zhurn. 53(5), p. 582 – 590.
6. SAMOJLENKO, A. M., PERESTYUK, N. A. (1987) *Differencialnye uravneniya s impulsnym vozdejstviem*. Kiïv: Vishha shkola.
7. ZHIKOV, V. V., KOZLOV, S. M. and OLEJNIK, O. A. (1993) *Usrednenie differencialnyx operatorov.* Moskva: FizMatLit.
8. SELL, G. R., YOU, Y. (2002) *Dynamics of Evolutionary Equations* New York: Springer Verlag.
9. DENKOWSKI, Z., MORTOLA, S. (1993) *Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by diferential inclusions corresponding to partial diferential equations*. JOTA, 78, p. 342-371.

Надійшла до редколегії 15.04.2014