

УДК 519.9

Трунов О.О., аспірант

Хвильове поле у хвилеводі з вигином

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп.
Глушкова, 4е,
e-mail: trunov.olexandr@gmail.com

O.O. Trunov, graduate student

A wave field in a waveguide with a bend

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: trunov.olexandr@gmail.com

Розглянута плоска задача поширення нормальної хвилі у хвилеводі з вигином. Проведені розрахунки енергетичного коефіцієнту проходження хвилі крізь вигин та енергетичних коефіцієнтів збудження мод в області хвилеводу за вигином в залежності від геометричних параметрів хвилеводу. Характерні розміри хвилеводу порівняні з довжиною хвилі.

Ключові слова: хвилевід, нормальна хвиля, граничні умови.

In present article the plane problem of wave propagation in a waveguide with a bend was considered. The problem using the method of boundary regions was solved. The pressure field in the waveguide with hard boundaries was determined. Calculation of energy transmission coefficient through the bend and coefficients of excitation of the modes beyond the bend in the waveguide depending on geometrical parameters of the waveguide was done. Dimensions of the waveguide are proportional to the wave length. The mode structure beyond the bend depends strongly on inner radius, outer radius and angle of the bend. At certain combinations of these parameters is the dominance of one of the waveguide modes. Two representations of wave mode structure in the bend were used in current article. Calculated fields in the waveguide using both representations are equal.

Key words: a waveguide with a bend, normal wave, boundary conditions.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Нерегулярні хвилеводи знаходять широке застосування в акустичних та радіоелектронних пристроях [1]. Тому і в теперішній час інтерес до дослідження хвильового поля в них не слабшає [2, 3]. Серед великого класу нерегулярностей, які мають місце у хвилеводах, виділимо клас неоднорідностей, пов'язаних зі зміною геометрії хвилеводу. В нашому випадку це наявність області вигину у хвилеводі. При цьому, параметри середовища, що наповнює хвилевід, залишаються незмінними.

Теорія таких нерегулярних хвилеводів, за умови, що вони є одномодовими, добре розвинена [4]. Якщо відношення характерного розміру хвилеводу до довжини хвилі досить велике (скажімо більше п'яти), то при дослідженні взаємодії хвилі з неоднорідністю хвилеводу можна використовувати методи геометричної теорії дифракції. Теорія хвилеводів з неоднорідностями, для яких характерний розмір порівняний з довжиною хвилі, розвинена слабше. Причиною цього є об'єктивні труднощі, що

виникають при побудові строгого розв'язку відповідних граничних задач.

У даній роботі розглядається акустичний хвилевід, геометричні розміри котрого порівняні з довжиною хвилі.

Постановка та побудова розв'язку задачі

Розглянемо плоский хвилевід, поверхні якого на деякій ділянці являють собою дуги кола, рис. 1. До криволінійної ділянки примикають плоскопаралельні хвилеводи. Для опису геометрії хвилеводу і подальшої побудови розв'язку задачі про поширення гармонічної хвилі в хвилеводі, введемо три системи координат: дві декартові (x, y) , (x', y') і полярну (r, φ) із загальним центром у точці O . Радіуси поверхонь криволінійної ділянки хвилеводу позначені r_1 і r_2 . Ширина хвилеводу на всій його довжині залишається сталою й дорівнює $h = r_2 - r_1$. Кут розкриття криволінійної частини хвилеводу позначений φ_0 . Усі поверхні хвилеводу будемо вважати акустично жорсткими. Хвилевід

наповнений ідеальною рідиною із щільністю ρ й швидкістю звуку c . Побудований розв'язок, з необхідною зміною параметрів, що визначають хвильове поле, повністю відповідає твердому хвилеводу з поширенням у ньому SH хвиль.

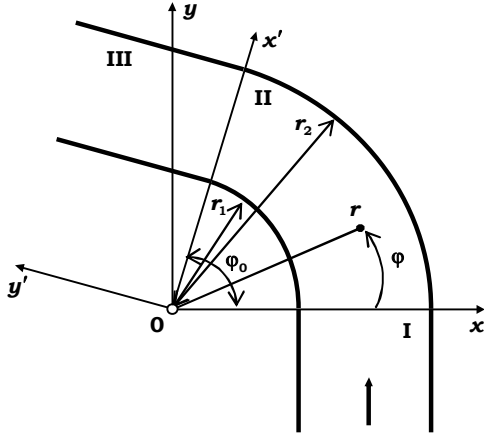


Рис. 1. Геометрія хвилеводу

Згідно методу часткових областей [5] вся область існування звукового поля розбивається на три області: області I і III – плоскопаралельні хвилеводи, область II – ділянка хвилеводу із криволінійними поверхнями. Нехай в області I у додатному напрямку осі Oy поширюється s -та мода плоскопаралельного хвилеводу. Тоді поле в областях I і III запишемо у вигляді суперпозиції відповідних мод хвилеводу. Для хвилеводу з акустично жорсткими поверхнями поле тиску має вигляд

$$p_I = \cos(\alpha_s(x - r_1)) \exp(i\gamma_s y) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n(x - r_1)) \exp(-i\gamma_n y), \quad (1)$$

$$p_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(\alpha_n(x' - r_1)) \exp(i\gamma_n y'), \quad (2)$$

де $\alpha_n = n\pi/h$, $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$, $k = \omega/c$, ω – частота. Часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо.

Можливі два варіанти представлення поля у криволінійній області II. У першому варіанті поле в області II запишемо у вигляді суперпозиції нормальних хвиль [2, 6]

$$p_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(kr) \cdot (B_n \exp(i\nu_n \varphi) + C_n \exp(i\nu_n(\varphi - \varphi_0))), \quad (3)$$

де власні форми мод для хвилеводу з акустично жорсткими межами мають вигляд

$$R_n(kr) = J_{\nu_n}(kr) - \frac{J'_{\nu_n}(kr_2)}{Y'_{\nu_n}(kr_2)} Y_{\nu_n}(kr), \quad (4)$$

тут $J_{\nu}(kr)$ й $Y_{\nu}(kr)$ – функції Бесселя першого і другого роду. Дисперсійне рівняння, яке встановлює зв'язок між частотою $\omega = kc$ й сталою поширення ν має вигляд

$$J'_{\nu}(kr_2) Y'_{\nu}(kr_1) - J'_{\nu}(kr_1) Y'_{\nu}(kr_2) = 0. \quad (5)$$

У другому варіанті запису поля в області II, згідно методу часткових областей [5], можна записати набори розв'язків рівняння Гельмгольца в різних системах координат, композиція яких дозволить задовольнити умовам на границях області II. Отже, другий варіант представлення поля в області II матиме вигляд

$$p_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\alpha_n(x - r_1)) \exp(i\gamma_n y) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\alpha_n(x' - r_1)) \exp(-i\gamma_n y') + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos(\beta_n \varphi) \frac{J_{\beta_n}(kr)}{J'_{\beta_n}(kr_2)} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(\beta_n \varphi) \frac{Y_{\beta_n}(kr)}{Y'_{\beta_n}(kr_1)}, \quad (6)$$

тут $\beta_n = n\pi/\varphi_0$. Перші дві суми у формулі (6) дозволять задовольнити умовам спряження полів на межах часткових областей I, II і II, III, а виконання граничних умов на криволінійних поверхнях області II забезпечать третя й четверта суми у формулі (6).

Для розв'язку задачі поширення хвилі у хвилеводі слід розписати умови спряження звукових полів на межах часткових областей I, II і II, III (рис. 1), які являють собою рівності тисків і нормальних швидкостей на цих межах. Далі проводимо стандартну процедуру переходу від функціональної до алгебраїчної системи рівнянь, використовуючи властивості повноти і ортогональності відповідного набору функцій косинусів у виразах (1), (2), (3) або (1), (2), (6). Ця процедура детально описана у монографії [5]. В результаті одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно шуканих коефіцієнтів A_n , B_n , C_n , D_n . Нескінченна система рівнянь розв'язувалася методом редукції. Вірність отриманого розв'язку гарантується виконанням умов спряження полів на межах часткових областей I, II і II, III, а також контролем закону збереження енергії [5]. В усіх проведених розрахунках криві, які визначають

спряження полів на межах часткових областей з графічною точністю співпадають. Така ситуація є типовою. При цьому закон збереження енергії виконується з точністю до четвертого знаку після коми.

Важливе значення мають енергетичні характеристики проходження хвилі крізь вигин. Коефіцієнт проходження $W^{(s)}$ визначається як відношення середнього потоку потужності хвилі в області III до середнього потоку потужності s -ої нормальної хвилі, що набігає на область II з області I (рис. 1). Енергетичний коефіцієнт проходження можна записати у вигляді [5]

$$W^{(s)} = \sum_{n=0}^{N_3} W_n^{(s)}, \text{ де } W_n^{(s)} = |D_n|^2 \cdot \frac{\varepsilon_n \operatorname{Re}(\gamma_n)}{\varepsilon_s \operatorname{Re}(\gamma_s)}, \quad (7)$$

$\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 0,5$ при $n > 0$. Як бачимо, величина $W^{(s)}$ представляється у вигляді суми енергетичних коефіцієнтів збудження $W_n^{(s)}$ нормальних хвиль в області III, або, інакше, про вираз (7) можна говорити як про суму коефіцієнтів трансформації s -ої нормальної хвилі області I у нормальну хвилю області III. Число доданків N_3 у формулі (7) дорівнює кількості хвиль, що поширюються в області III.

Аналогічно, енергетичний коефіцієнт відбиття $V^{(s)}$ матиме вигляд

$$V^{(s)} = \sum_{n=0}^{N_1} V_n^{(s)}, \text{ де } V_n^{(s)} = |A_n|^2 \cdot \frac{\varepsilon_n \operatorname{Re}(\gamma_n)}{\varepsilon_s \operatorname{Re}(\gamma_s)}. \quad (8)$$

Аналіз чисельних результатів

Відразу зазначимо, що згідно розрахунків, хвильовід із вигином у всьому частотному діапазоні, який досліджувався, виявився практично звукопрозорим. Однак при цьому структура мод поля в області III суттєво залежить від геометрії хвильоводу.

Як приклад, на рис. 2 показані залежності енергетичних коефіцієнтів збудження $W_n^{(0)}$ нормальних хвиль в області III в залежності від хвильової ширини h/λ при деякій величині відношення r_1/h . Нульова мода хвильоводу із жорсткими межами поширюється при будь-якому хвильовому розмірі хвильоводу. Для області III мода з номером $n > 0$ є однорідною при виконанні умови $h > n\lambda/2$. У цьому випадку середній потік потужності в даній нормальній хвилі не дорівнює нулю. Графіки на рис. 2 а показують, що коли хвильовий розмір $h/\lambda < 0,5$, то в області III, поширюється тільки

нульова нормальна хвиля (крива 0) і вона визначає проходження нульової моди області I крізь вигин хвильоводу. Ситуація змінюється, якщо $h/\lambda > 0,5$, тут збуджується перша нормальна хвиля (крива 1), яка по величині значно перевершує нульову, а при $h/\lambda > 1$ домінує друга нормальна хвиля (крива 2) і далі більш високі моди. Порівнюючи графіки на рис. 2 а і б бачимо, що домінування окремої моди на певному частотному інтервалі проявляється тим сильніше, чим менше відношення r_1/h . З ростом радіусу округлення r_1/h вплив нульової та першої мод стає більш вагомим.

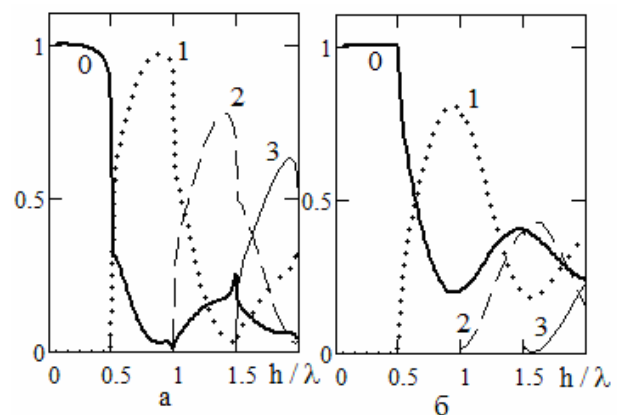


Рис. 2. Залежності енергетичних коефіцієнтів збудження мод $W_n^{(0)}$ в області III від хвильової ширини h/λ , $\varphi_0 = 60^\circ$: а – $r_1/h = 0,1$, б – $r_1/h = 1$

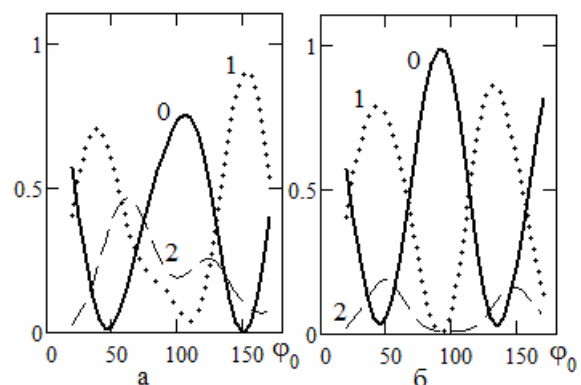


Рис. 3. Залежності енергетичних коефіцієнтів збудження мод $W_n^{(0)}$ в області III від кута розкриття області вигину φ_0 , $h/\lambda = 1,15$: а – $r_1/h = 0,3$, б – $r_1/h = 1$

На рис. 3 показані залежності коефіцієнтів збудження мод в області III від кута розкриття області вигину φ_0 . Як бачимо, тут також можна виділити інтервали зміни кута вигину де домінує нульова або перша мода. При цьому вплив другої

моди на поле у хвилеводі стає більш вагомим при зменшенні величини r_1/h .

Як приклад, на рис. 4 показано поле амплітуди тиску в околі вигину і в перерізі на вході (крива 1) і виході (крива 2) області II при таких параметрах хвилеводу: $\varphi_0 = 60^\circ$, $h/\lambda = 0,8$, $r_1/h = 0,1$. Це ситуація коли домінує перша мода в області II (див. рис. 2 а). Оскільки коефіцієнт проходження дорівнює одиниці, то поле в області I являє собою нульову моду, що набігає на зону вигину. Поле в області III, подалі від вигину, практично визначається першою модою (крива 3). В перерізі області II поле тиску є суттєво неоднорідним. Так, на виході області II амплітуда тиску у зовнішньої поверхні у два рази більша ніж біля внутрішньої.

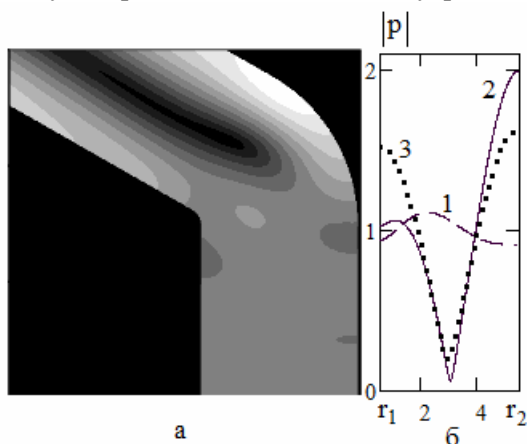


Рис. 4. Поле амплітуди тиску (а) і в перерізі на вході (крива 1), виході (крива 2) області II і подалі від вигину в області III (крива 3):

$$\varphi_0 = 60^\circ, h/\lambda = 0,8, r_1/h = 0,1$$

Висновки

1. Побудовано розв'язок задачі поширення хвилі у плоскому хвилеводі із вигином. Показано, що можна запропонувати два варіанти представлення поля у криволінійній області, а саме, у вигляді суперпозиції нормальних хвиль області II, або у вигляді суми часткових розв'язків рівняння Гельмгольца у різних системах координат. Показано, що розрахунки поля у хвилеводі при використанні обох варіантів запису поля в області II з високою точністю співпадають (графічно відповідні криві не відрізняються).

2. Показано, що область вигину, для дослідженого діапазону частот, виявилася практично звукопрозорою. При цьому структура поля за вигином суттєво залежить від геометричних параметрів хвилеводу, тобто від радіуса заокруглення, кута розкриття φ_0 й

хвильової ширини хвилеводу h/λ . При певній комбінації зазначених параметрів спостерігається домінування однієї з мод хвилеводу.

Список використаних джерел

1. Шестопалов В.П. Резонансное рассеяние волн. Т. 2. Волноводные неоднородности / В.П. Шестопалов, А.А. Кириленко, Л.А. Рудь. – Киев: Наукова думка, 1986. – 214 с.
2. Horvat M. The bends on quantum waveguide and cross-products of Bessel functions / M. Horvat, T. Prosen // J. Phys. A.: Math. Gen. – 2007. – Vol. 24.
3. Chapman C.J. The asymptotic theory of dispersion relations containing Bessel functions of imaginary order / C.J. Chapman // Proceedings of the Royal Society A. – 2012. – October 22.
4. Ржевкин С.Н. Курс лекций по теории звука / С.Н. Ржевкин. – М.: МГУ, 1960. – 336 с.
5. Гринченко В.Т. Волновые задачи акустики / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк, В.Т. Маципура. – Киев: Интерсервис, 2013. – 572 с.
6. Маципура В.Т. Поширення хвиль в криволінійному хвилеводі / В.Т. Маципура, І.В. Вовк, О.О. Трунов // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Фіз.-мат. науки. – 2013. – №3. – с. 192-195.

References

1. SHESTOPALOV, V.P., KIRILENKO, A.A. and RUD, L.A. (1986) *Resonansnoe rasseyaniye voln. Vol.2. Volnovodnyie neodnorodnosti*. Kiev: Naukova dumka.
2. HORVAT, M. and PROSEN, T. (2007) The bends on quantum waveguide and cross-products of Bessel functions. *J. Phys. A. Math. Gen.* Vol. 24.
3. CHAPMAN, C.J. (2012) The asymptotic theory of dispersion relations containing Bessel functions of imaginary order. *Proceedings of the Royal Society A.* October 22.
4. RZHEVKIN S.N. (1960) *Kurs lektzij po teorii zvuka* – М.: MGU.
5. GRINCHENKO, V.T., VOVK, I.V. and MATSIPURA, V.T. (2013) *Volnovyie zadachi ackustyki*. Kiev: Interservis.
6. MATSIPURA V.T., VOVK, I.V. and TRUNOV O.O. (2013) Wave propagation in the bent waveguide. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev, series Physics & Mathematics.* №3. pp. 192-195.

Надійшла до редколегії 15.04.14