УДК 517.929.4

Гаркуша Н. І., к.е.н., с.н.с.

Про стійкість ненульового стану рівноваги однієї моделі взаємодії соціальних прошарків суспільства

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т. Глушкова, 4д,
e-mail: ngarkusha@gmail.com

N. I. Garkusha, PhD, senior researcher

About the stability of the non-zero equilibrium of a model of interaction between social strata

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: ngarkusha@gmail.com

Розглядається математична модель Гудвіна, що описує динаміку взаємодії прошарків суспільства. Математична модель має вигляд системи двох диференційних рівнянь з одним сталим запізнюванням. Отримані умови стійкості стану рівноваги системи, тобто умови «сталого» стану суспільства.

Ключові слова: математична модель, динамічна система, запізнювання, стійкість.

Actual problems of modern relationships are different social strata. A longtime relationship "economically distinct" social strata can be relatively stable. But with an increase in certain "disturbing" factors peaceful life is disturbed and there are "revolutions" It is important to build mathematical models of the relationship of various social strata. The simplest mathematical model can be built based on the model of interaction "predator-prey" proposed by V.Volterra .

In this paper we continue the investigation of the qualitative behavior model that describes the behavior of the two "opposing" strata of society. The model has the form of two differential equations. A system with deviating argument lagged type, taking into account the "maturation" of dissent. The parameters of the system and the allowable delay time at which the equilibrium of the system due to the bifurcation of the state loses stability are calculated.

Key Words: mathematical model, dynamical system, delay, stability.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаінов Д.Я.

Вступ

Ця робота є продовженням досліджень, які були опубліковані в [1,2]. Власне побудова математичної моделі була проведена в роботі [3], де описувалося взаємовідношення соціальних верств у суспільстві. У роботах [1,2] в модель було введено запізнювання і досліджено його вплив на динаміку системи. У даний роботі продовжено дослідження стійкості ненульового положення рівноваги системи.

1. Рівняння динаміки взаємин суспільних верств

Як було показано в роботі [1], динаміку взаємин службовців і підприємців з урахуванням часу прийняття рішень [3] можна описати системою

$$\dot{x}(t)=\left[\frac{1}{k}-(g+n)-\frac{y(t-\tau)}{k}\right]x(t),$$

$$\dot{y}(t)=\left[-(g+r)+bx(t-\tau)\right]y(t). \qquad (1.1)$$

Нехай виконується умова

$$1-k(g+n)>0. \qquad (1.2)$$

Тоді в першій координатній чверті існує особлива точка $M_1^*(x_1^*,y_1^*)$ з координатами $x_1^*=(g+r)/b$, $y_1^*=1-k(g+n)$. Вона визначає рівновагу системи. Було показано [4], що це положення рівноваги є нестійким. Вводилися «коефіцієнти взаємного впливу», і система набувала вигляду [3]

$$\dot{x}(t)=\left[\frac{1}{k}-(g+n)+R_1x(t-\tau)-\frac{y(t-\tau)}{k}\right]x(t),$$
$$\dot{y}(t)=\left[-(g+r)+bx(t-\tau)+R_2y(t-\tau)\right]y(t). \quad (1.3)$$

Інтерес представляє визначення умов стійкого співіснування шарів в суспільстві. Особливою точкою системи (1.3) буде: $O_1^*\left(x_1^*,y_1^*\right)$,

$$x_1^*=\frac{R_2\left[\frac{1}{k}-(g+n)\right]+\frac{1}{k}(g+r)}{R_1R_2+\frac{b}{k}},$$

$$y_1^*=\frac{R_1(g+r)-b\left[\frac{1}{k}-(g+n)\right]}{R_1R_2+\frac{b}{k}}. \quad (1.4)$$

При виконанні умов

$$R_2\left[\frac{1}{k}-(g+n)\right]+\frac{1}{k}(g+r)>0,$$
$$R_1(g+r)-b\left[\frac{1}{k}-(g+n)\right]>0 \quad (1.5)$$

вона знаходиться у першому квадранті..

2. **Дослідження стійкості.**

В роботі [2] умови стійкості отримані на підставі лінеаризації системи в околі особливої точки. $\dot{x}_1(t)=-a_{11}x_1(t)+b_{11}x_1(t-\tau)+b_{12}y_1(t-\tau)$,

$$\dot{y}_1(t)=-a_{22}y_1(t)+b_{21}x_1(t-\tau)+b_{22}y_1(t-\tau), \quad (2.1)$$

$$a_{11}=\left[-\frac{1}{k}+(g+n)-R_1x_4+\frac{1}{k}y_4\right],$$
$$a_{22}=\left[(g+r)-bx_4-R_2y_4\right]\ b_{11}=R_1x_4,$$
$$b_{12}=-\frac{1}{k}x_4,\ b_{21}=y_4,\ b_{22}=R_2y_4, \quad (2.2)$$

У цій роботі проведена оцінка залежності коефіцієнтів і запізнювання на стійкість.

Лема 2.1. Нехай при $t-\tau\le s\le t$ рішення $\left(x_1(t),y_1(t)\right)$ системи (2.1) знаходиться всередині поверхні рівня функції Ляпунова $V(x_1,y_1)=h_{11}x_1^2+2h_{12}x_1y_1+h_{22}y_1^2$, а в момент t виходить на її кордон. Тоді мають місце нерівності

$$\left|x_1(t)-x_1(t-\tau)\right|\le N_1\left[x_1^2(t)+y_1^2(t)\right]^{1/2}\tau,$$
$$\left|y_1(t)-y_1(t-\tau)\right|\le N_2\left[x_1^2(t)+y_1^2(t)\right]^{1/2}\tau, \quad (2.3)$$

$$N_1=\left(|a_{11}|+|b_{11}|+|b_{12}|\right)\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}},$$
$$N_2=\left(|a_{22}|+|b_{21}|+|b_{22}|\right)\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}, \quad (2.4)$$

$$\lambda_{\min}(H)=\frac{1}{2}\left[(h_{11}+h_{22})-\sqrt{(h_{11}-h_{22})^2+4h_{12}^2}\right],$$
$$\lambda_{\min}(H)=\frac{1}{2}\left[(h_{11}+h_{22})+\sqrt{(h_{11}-h_{22})^2+4h_{12}^2}\right].$$

Доведення. Перепишемо систему (2.1) в інтегральному вигляді $x_1(t)=x_1(t-\tau)+$

$$+\int_{t-\tau}^{t}\left[-a_{11}x_1(s)+b_{11}x_1(s-\tau)+b_{12}y_1(s-\tau)\right]ds,$$
$$y_1(t)=y_1(t-\tau)+$$
$$+\int_{t-\tau}^{t}\left[-a_{22}y_1(s)+b_{12}x_1(s-\tau)+b_{22}y_1(s-\tau)\right]ds.$$

Звідси випливає, що

$$\left|x_1(t)-x_1(t-\tau)\right|\le \quad (2.5)$$
$$\le\int_{t-\tau}^{t}\left[|a_{11}||x_1(s)|+|b_{11}||x_1(s-\tau)|+|b_{12}||y_1(s-\tau)|\right]ds,$$
$$\left|y_1(t)-y_1(t-\tau)\right|\le \quad (2.6)$$
$$\le\int_{t-\tau}^{t}\left[|a_{22}||y_1(s)|+|b_{21}||x_1(s-\tau)|+|b_{22}||y_1(s-\tau)|\right]ds.$$

Скориставшись умовою, що момент є першим моментом виходу рішення на поверхню рівня функції Ляпунова, отримуємо, що

$$h_{11}x_1^2(s)+2h_{12}x_1(s)y_1(s)+h_{22}y_1^2(s)=$$
$$=V\left(x_1(s),y_1(s)\right)\le V\left(x_1(t),x_2(t)\right)=$$
$$=h_{11}x_1^2(t)+2h_{12}x_1(t)y_1(t)+h_{22}y_1^2(t),\ -\tau\le s<s.$$

Звідси випливає, що

$$\lambda_{\min}(H)x_1^2(s)\le\lambda_{\min}(H)\left[x_1^2(s)+y_1^2(s)\right]\le$$
$$\le\lambda_{\max}(H)\left[x_1^2(t)+y_1^2(t)\right]\le,$$

$$\lambda_{\min}(H)y_1^2(s)\le\lambda_{\min}(H)\left[x_1^2(s)+y_1^2(s)\right]\le$$
$$\le\lambda_{\max}(H)\left[x_1^2(t)+y_1^2(t)\right],$$

де $\lambda_{\min}(H)$, $\lambda_{\min}(H)$ - екстремальні власні числа матриці H . И

$$|x_1(s)| \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}\left[x_1^2(t)+y_1^2(t)\right]^{1/2},$$

$$|y_1(s)| \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}\left[x_1^2(t)+y_1^2(t)\right]^{1/2}. \quad (2.7)$$

Підставивши (2.7) в (2.5), (2.6), отримаємо

$$|x_1(t)-x_1(t-\tau)| \le$$

$$\le (|a_{11}|+|b_{11}|+|b_{12}|)\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}\left[x_1^2(t)+y_1^2(t)\right]^{1/2}\tau,$$

$$|y_1(t)-y_1(t-\tau)| \le$$

$$\le (|a_{22}|+|b_{21}|+|b_{22}|)\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}\left[x_1^2(t)+y_1^2(t)\right]^{1/2}\tau,$$

що й потрібно було довести.

Теорема 2.1. Нехай коефіцієнти системи (2.1) такі, що

$$(a_{11}+a_{22}+b_{11}+b_{22})<0,$$

$$(a_{11}+b_{11})(a_{22}+b_{22})-b_{12}b_{21}>0 \quad (2.8)$$

$\tau<\tau_0$, де

$$\tau_0=\frac{\lambda_{\min}(C)}{2\sqrt{M_1^2+M_2^2}} \quad (2.9)$$

$$\lambda_{\min}(C)=\frac{1}{2}\left[(c_{11}+c_{22})-\sqrt{(c_{11}-c_{22})^2+4c_{12}^2}\right],$$

$$M_1=(h_{11}b_{11}+h_{21}b_{21})N_1+(h_{11}b_{12}+h_{21}b_{22})N_2,$$
$$M_2=(h_{12}b_{11}+h_{22}b_{21})N_1+(h_{12}b_{12}+h_{22}b_{22})N_2.$$

Тоді положення рівноваги $O_1^*(x_1^*,y_1^*)$ системи (2.1) буде асимптотично стійким.

Доведення. Розглянемо систему (2.1), (2.2) при $\tau=0$. Вона має вигляд

$$\dot{x}_1(t)=(a_{11}+b_{11})x_1(t)+b_{12}y_1(t),$$

$$\dot{y}_1(t)=b_{21}x_1(t)+(a_{22}+b_{22})y_1(t).$$

Її характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22}+b_{11}+b_{22})\lambda+$$
$$+(a_{11}+b_{11})(a_{22}+b_{22})-b_{12}b_{21}=0.$$

Як випливає з критерію Гурвіца, умовою асимптотичної стійкості є додатність коефіцієнтів рівняння. Тому система (2.1) без запізнювання є асимптотично стійкою. І, як випливає з роботи [4], при довільній позитивно визначеній матриці матричне рівняння Ляпунова

$$(A+B)^T H+H(A+B)=-C \quad (2.10)$$

має єдине рішення - позитивно визначену матрицю.

Тут $A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & a_{22}+b_{22}\end{bmatrix}$, $H=\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22}\end{bmatrix}$,

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22}\end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Обчислимо повну похідну функції $V(x_1,y_1)=h_{11}x_1^2+2h_{12}x_1y_1+h_{22}y_1^2$ в силу системи (2.1). Маємо

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),y_1(t))=2(h_{11}x_1(t)+h_{12}y_1(t))\times$$
$$\times(-a_{11}x_1(t)+b_{11}x_1(t-\tau)+b_{12}y_1(t-\tau))+$$
$$+2(h_{12}x_1(t)+h_{22}y_1(t))\times$$
$$\times(-a_{22}x_2(t)+b_{21}x_1(t-\tau)+b_{22}y_1(t-\tau)).$$

Звідси отримуємо

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),y_1(t))=2(h_{11}x_1(t)+h_{12}y_1(t))\times$$
$$\times[(-a_{11}+b_{11})x_1(t)+b_{21}y_1(t)]+$$
$$+2(h_{12}x_1(t)+h_{22}y_1(t))\times$$
$$\times[b_{21}x_1(t)+(-a_{22}+b_{22})y_1(t)]+$$
$$+2(h_{11}x_1(t)+h_{12}y_1(t))\times$$
$$\times(b_{11}[x_1(t-\tau)-x_1(t)]+b_{12}[y_1(t-\tau)-y_1(t)])+$$
$$+2(h_{12}x_1(t)+h_{22}y_1(t))\times$$
$$\times(b_{21}[x_1(t-\tau)-x_1(t)]+b_{22}[y_1(t-\tau)-y_1(t)]).$$

Або, як випливає з (2.10),

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),y_1(t))=$$

$$=-c_{11}x_1^2(t)-2c_{12}x_1(t)y_1(t)-c_{22}y_1^2(t)+$$
$$+2(h_{11}x_1(t)+h_{12}y_1(t))\times$$
$$\times(b_{11}[x_1(t-\tau)-x_1(t)]+b_{12}[y_1(t-\tau)-y_1(t)])+$$
$$+2(h_{12}x_1(t)+h_{22}y_1(t))\times$$
$$\times(b_{21}[x_1(t-\tau)-x_1(t)]+b_{22}[y_1(t-\tau)-y_1(t)]).$$

Звідси

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),y_1(t))=-c_{11}x_1^2(t)-2c_{12}x_1(t)y_1(t)-c_{22}y_1^2(t)+$$
$$+2[(h_{11}b_{11}+h_{21}b_{21})x_1(t)+(h_{12}b_{11}+h_{22}b_{21})y_1(t)]\times$$
$$\times|x_1(t)-x_1(t-\tau)|+$$
$$+2[(h_{11}b_{12}+h_{21}b_{22})x_1(t)+(h_{12}b_{12}+h_{22}b_{22})y_1(t)]\times$$
$$\times|y_1(t)-y_1(t-\tau)|.$$

Скориставшись нерівностями (2.3), (2.4) леми 2.1, отримуємо

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),y_1(t))=-c_{11}x_1^2(t)-2c_{12}x_1(t)y_1(t)-c_{22}y_1^2(t)+$$
$$+2[(h_{11}b_{11}+h_{21}b_{21})x_1(t)+(h_{12}b_{11}+h_{22}b_{21})y_1(t)]\times$$
$$N_1\left[x_1^2(t)+y_1^2(t)\right]^{1/2}\tau+$$
$$+2[(h_{11}b_{12}+h_{21}b_{22})x_1(t)+(h_{12}b_{12}+h_{22}b_{22})y_1(t)]\times$$
$$N_2\left[x_1^2(t)+y_1^2(t)\right]^{1/2}\tau \quad .$$

Звідси випливає, що

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),y_1(t))\le-\lambda_{\min}(C)\left[x_1^2(t)+x_2^2(t)\right]+$$
$$2[M_1x_1(t)+M_2y_1(t)]\left[x_1^2(t)+y_1^2(t)\right]^{1/2}\tau,$$

де $\lambda_{\min}(C)$ - мінімальне власне число матриці. використовуючи співвідношення

$$ax+by\le\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2},$$

отримуємо

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),y_1(t))\le-\lambda_{\min}(C)\left[x_1^2(t)+x_2^2(t)\right]+$$
$$+2\sqrt{M_1^2+M_2^2}\left[x_1^2(t)+y_1^2(t)\right]\tau.$$

І при $\tau<\tau_0$, де $\tau_0=\dfrac{\lambda_{\min}(C)}{2\sqrt{M_1^2+M_2^2}}$, повна похідна функції Ляпунова буде негативно визначена, і точка спокою асимптотично стійка.

Список використаних джерел

1. *Гаркуша Н.І.* Про близькість моделей динаміки Вольтерра та Гудвіна / Н.І. Гаркуша // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013. - №2. – С. 131-134.
2. *Гаркуша Н.І.* Динаміка моделі Гудвіна з післядією / Н.І.Гаркуша // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013. - №4. – С. 96-99.
3. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / В.-Б. Занг. - Москва: Мир, 1999. – 335 с.
4. *Эльсгольц Л.Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. – Москва: Наука, 1970. – 240 с.

References

1. GARKUSHA, N. (2013) The proximity of Models of the Dynamics of Voltaire and Goodwin *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physcs&Mathematics*. №2.– p.131-134.
2. GARKUSHA N. (2013) The dynamics of model Goodwin with delay *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics&Mathematics*. №4.– p. 96-99.
3. ZHANG, W.-B. (1991) *Synergetic Economics. Time and changes in the nonlinear economic theory.* Heidelberg: Springer-Verlag.
4. ELSGOLTZ, L., NORKIN, S. (1970) *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 21.04.14