УДК 519.925.51

Жмихова Т.В., к.ф.-м.н.

Інвестиційна стратегія управління капіталом страхової компанії на фінансовому (B,S) – ринку.

Донбаська національна академія будівництва та архітектури, 86123, Донецька область, м. Макіївка, вул.Державіна, 2,
e-mail: zhmykhovatanya@mail.ru

T. V. Zhmykhova, Ph.D. (Physics & Mathematics).

Investment management strategy of insurance company capital on financial (B,S)- market.

Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, 86123, Ukraine, Donetsk region, Makeyevka, Derzhavin str., 2,
e-mail: zhmykhovatanya@mail.ru

В даній статті узагальнюються результати статті $[1]$, *де досліджена модель страхової компанії, що працює на* (B,S)- *ринку, ціна ризикового активу побудована на основі стрибкоподібного процесу Орнштейна-Уленбека, стрибки якого описуються випадковими величинами з нормальним розподілом на випадок, коли сумарні премії, що отримує страхова компанія, є також випадковими та описуються складним процесом Пуассона. Знайдено оптимальний портфель, що забезпечує найкращу оцінку знизу для ймовірності банкрутства страхової компанії.*

Ключові слова: страхова компанія, (B,S) *- ринок, оптимальний портфель.*

The Cramer-Lundberg model with stochastic premiums which is natural generalization of classical dynamic risk model is considered, an assumption was made that the premiums are also random variable and described by compound Poisson process. Insurance company invests on the (B,S) *- market, which consists of risk and riskless asset: the risk asset price was built on the basis of the Ornstein-Uhlenbeck`s transition process whose jumps are described by normally distributed random variables and riskless asset is bank account with fixed rate of interest, moreover the part of the capital insurance company invested in risk asset, respectively, the part of capital that remain the company places on bank account. We assume that insurance company works only with its own capital, funds from outside is not considered. The optimal portfolio that provides the best lower bound for the probability non-ruin of the insurance company was found.*

Key words: insurance company, (B,S) *-market, optimal portfolio*

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Наконечний О. Г.

Постановка задачі. Нехай задано фінансовий (B,S)- ринок, що складається з безризикового B та ризикового S активів. Ціна безризиковго активу (банківського рахунку) описується рівнянням:

$$dB(t) = rB(t)dt, B(0) > 0, \tag{1}$$

де r $(r > 0)$- відсоткова ставка банку, $B(0)$ - сума на депозиті в початковий момент часу. Ціна ризикового активу (акції) описується моделлю, запропонованою в [1], а саме:

$$S_N(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t \left(\mu - \lambda\left[\sqrt{e}-1\right] - \gamma\xi_N(s)\right)ds + \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha\tilde{\nu}(d\alpha, ds)\right\}, \tag{2}$$

тут $\xi_N(t)$ - урізаний процес $\xi(t)$ за рівнями $-N, N$, що має вигляд:

$$\xi(t) = e^{-\gamma t}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha e^{\gamma s}\tilde{\nu}(d\alpha, ds), \tag{3}$$

$$\tilde{\nu}(d\alpha, ds) = \nu(d\alpha, ds) - \lambda\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha ds,$$

де $\nu(d\alpha, ds)$- міра Пуассона з параметром $\lambda/\sqrt{2\pi}e^{-\alpha^2/2}d\alpha ds.$

Нехай на момент часу t капітал страхової компанії (СК) складатиме $X_x^N(t)$ $(X(0) = x)$. Будемо вважати, що сумарні премії, що надходять до СК за час $[t; t+\Delta t]$ описуються величиною $\sum_{i=N_1(t)+1}^{N_1(t+\Delta t)} \rho_i$, де $N_1(t)$ - процес Пуассона з параметром $\lambda_1\left(\lambda_1 > 0\right)$, $\left(MN_1(t) = \lambda_1 t, N_1(0) = 0\right)$, ρ_i - незалежні від $N_1(t)$, невід'ємні однаково розподілені випадкові величини, що інтерпретуються, як величини, що надходять до СК такі, що $P\{\rho_i < z\} = F_1(z)$, а сумарні виплати за час $[t; t+\Delta t]$ описуються величиною $\sum_{i=N_2(t)+1}^{N_2(t+\Delta t)} \eta_i$,

де $N_2(t)$ - процес Пуассона з параметром $\lambda_2(\lambda_2 > 0)$, $(MN_2(t) = \lambda_2 t, N_2(0) = 0)$, η_i-незалежні від $N_2(t)$, невід'ємні однаково розподілені випадкові величини, що інтерпретуються як величини позовів, що надходять до СК такі, що $P\{\eta_i < v\} = F_2(v)$.

Нехай СК обирає для себе інвестиційну стратегію, що полягає в інвестуванні на фінансовий (B,S) - ринок, ціни якого описуються рівняннями (1) – (2), причому $uX_x^N(t)$, $0<u<1$ частина капіталу, що інвестується в акції, відповідно $(1-u)X_x^N(t)$ - частина капіталу, що компанія розміщує на банківському депозиті. Вважатимемо, що СК працює тільки з власним капіталом, надходження коштів ззовні не розглядається.

Враховуючи прибуток за рахунок інвестиційної діяльності, а також подання складного процесу Пуассона у вигляді стохастичного інтегралу за мірою Пуассона [2], а саме:

$$\sum_{i=0}^{N_1(t)} \rho_i = \int_0^t \int_{B_1} \delta\nu_1(d\delta, ds), \sum_{i=0}^{N_2(t)} \eta_i = \int_0^t \int_{B_2} \delta\nu_2(d\delta, ds),$$

отримуємо балансове рівняння, що описує еволюцію капіталу СК:

$$\begin{aligned} dX_x^N(t) &= X_x^N(t)\Big(u\mu + (1-u)r - u\gamma\xi_N(t) + \\ &+ u\int_{-\infty}^{+\infty} (e^\alpha - 1)\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2} du\Big) dt + \\ &+ uX_x^N(t)\int_{-\infty}^{+\infty} (e^\alpha - 1)\nu(d\alpha, dt) + \int_0^{+\infty} \delta\nu_1(d\delta, dt) - \\ &- \int_0^{+\infty} \delta\nu_2(d\delta, dt). \end{aligned} \quad (4)$$

Задача полягає в знаходженні такого управління $u(0<u<1)$, щоб ймовірність банкрутства СК за нескінченний час була оцінена величиною, що прямує до нуля при прямуванні початкового капіталу $x = X(0)$ до нескінченності і ця оцінка має бути найменшою за u.

Основний результат. Будемо шукати розв'язок рівняння (4), аналогічно пошуку розв'язку в [1]. Нехай

$$\theta_t = \xi_t^0(N) X_x^N(t), \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} d\xi_t^0(N) &= \xi_t^0(N)\Big[-(u\mu + (1-u)r - u\gamma\xi_N(t) - \\ &- u\lambda\left(\sqrt{e} - 1\right) - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^\alpha - 1\right)\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2} d\alpha Y(\alpha, t)\Big) dt - \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\alpha, t)\nu(du, dt)\Big], \xi_0^0 = 1, \end{aligned} \quad (6)$$

тут $Y(\alpha, t)$ буде відповідним чином підібрана. Скориставшись формулою диференціювання добутку з $[3]$, отримаємо

$$d\theta_t = \xi_t^0(N)\left[\int_{B_1} \delta\nu_1(d\delta, dt) - \int_{B_2} \delta\nu_2(d\delta, dt)\right],$$

якщо $Y(\alpha, t) = u\left[e^\alpha - 1\right] / \left[1 + u\left[e^\alpha - 1\right]\right]$.

Підставивши $Y(\alpha, t)$ в (6), отримаємо

$$\begin{aligned} d\xi_t^0(N) &= -\xi_t^0(N)\Big[u\mu + (1-u)r - u\lambda\left(\sqrt{e} - 1\right) - \\ &- u\gamma\xi_N(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^\alpha - 1\right)\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2} d\alpha\Big] dt - \\ &- \xi_t^0(N)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u\left[e^\alpha - 1\right]}{1 + u\left[e^\alpha - 1\right]}\nu(d\alpha, dt), \xi_0^0(N) = 1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$d\theta_t = \xi_t^0(N)\left(\int_{B_1} \delta\nu_1(d\delta, dt) - \int_{B_2} \delta\nu_2(d\delta, dt)\right). \quad (8)$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} X_x^N(t) &= \frac{\theta_t}{\xi_t^0(N)} = \left[\xi_t^0(N)\right]^{-1} \times \\ &\left[x + \int_0^t \xi_s^0(N)\left(\int_{B_1} \delta\nu_1(d\delta, dt) - \int_{B_2} \delta\nu_2(d\delta, dt)\right)\right] \end{aligned} \quad (9)$$

Оскільки

$$\mathbf{M}\nu_1(B_1, t) = \lambda_1 t \int_B dF_1(z), \mathbf{M}\nu_2(B_2, t) = \lambda_2 t \int_{B_2} dF_2(v),$$

то, впроваджуючи центровану мартингальну міру

$$\tilde{\nu}_1(B_1, t) = \nu_1(B_1, t) - \mathbf{M}\nu_1(B_1, t),$$
$$\tilde{\nu}_2(B_2, t) = \nu_2(B_2, t) - \mathbf{M}\nu_2(B_2, t),$$

(9) набуде вигляду:

$$X_x^N(t) = \left[\xi_t^0(N)\right]^{-1}\left[x + \int_0^t \xi_s^0(N)\left((\lambda_1 a - \lambda_2 b)ds + \right.\right.$$

$$+\int_{B_1}\delta\tilde{\nu}_1(d\delta,ds)-\int_{B_2}\delta\tilde{\nu}_2(d\delta,ds)\Bigg)\Bigg]\Bigg] \qquad (10)$$

де $a=\int_{B_1}\delta F_1(d\delta), b=\int_{B_2}\delta F_2(d\delta)$.

Нехай $X_x^N(t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\xi_s^0(N)\tilde{\nu}(d\delta,ds)$, де $\tilde{\nu}(C,t)=\nu(C,t)-(\lambda_1+\lambda_2)t\int_C dF(y)$, $\nu(C,t)$ - міра Пуассона з середнім $(\lambda_1+\lambda_2)t\int_C dF(y)$, процес $\xi_t^0(N)$ визначається з (7).

Теорема 1. $[4],[5]$. Нехай $\mu>r>0$, якщо для будь-якого цілого $m>0$, $\int x^{2m}dF(x)<+\infty$, то має місце нерівність

$$\sup_{0\le\tau<+\infty} M\left|\int_0^\tau\int\xi_s^0(N)\delta\nu(d\delta,ds))\right|^{2m}\le \qquad (11)$$

$$p^{2m}\left(\frac{(\lambda_1+\lambda_2)C_{2m}^2}{2d_m}\right)^m\left[1+\sqrt{\frac{2d_m}{(\lambda_1+\lambda_2)C_{2m}^2}}\right]^{2m(m-1)},$$

тут

$$p=\left[\int x^{2m}dF(x)\right]^{1/2m},$$

$$M\left[\xi_t^0(N)\right]^{2m}\le\exp\{-2md_mt\},$$

$$d_m=\max_{0<u<1}\Bigg(\left[u\mu+(1-u)r\right]-\frac{\lambda}{2m}+$$

$$+\frac{\lambda}{t2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{e}^{1}\frac{e^{-2mu\alpha(1+s)}}{\gamma s}ds\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\alpha}{2}}}{\left(1+u\left[e^{\alpha}-1\right]\right)^{2m}}d\alpha\Bigg).$$

Далі, нехай $0<u^*\le 1$ доставляє максимум функції $\varphi(u)$, де

$$\varphi(u)=\Bigg(\left[u\mu+(1-u)r\right]-\frac{\lambda}{2m}+$$

$$\frac{\lambda}{t2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{e^{-\gamma t}}^{1}\frac{e^{-2mu\alpha(1+s)}}{\gamma s}ds\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{\left(1+u\left[e^{\alpha}-1\right]\right)^{2m}}d\alpha\Bigg), \qquad (12)$$

тобто $\max_{0<u\le 1}\varphi(u)=\varphi(u^*)$, та при $a\lambda_1\ge b\lambda_2$ в силу додатності процесу $\xi_t^0(N)$, скориставшись нерівністю (11), матимемо:

$$P\left\{\inf_{0\le t\le T}X_x^N(t)\le 0\right\}\le$$

$$\frac{p^{2m}\left(\frac{(\lambda_1+\lambda_2)C_{2m}^2}{2d_m}\right)^m\left[1+\sqrt{\frac{2d_m}{(\lambda_1+\lambda_2)C_{2m}^2}}\right]^{2m(m-1)}}{x^{2m}}. \qquad (13)$$

В силу того, що має місце вкладення

$$\left\{\inf_{0\le t\le\alpha}X_x^N(t)\le 0\right\}\subseteq\left\{\inf_{0\le t\le\beta}X_x^N(t)\le 0\right\},\alpha\le\beta.$$

маємо послідовність множин, що поширюються. Тоді

$$\lim_{\alpha\to+\infty}P\left\{\inf_{0\le t\le\alpha}X_x^N(t)\le 0\right\}=P\left\{\lim_{\alpha\to+\infty}\left\{\inf_{0\le t\le\alpha}X_x^N(t)\le 0\right\}\right\}=$$

$$=P\left\{\inf_{0\le t<+\infty}X_x^N(t)\le 0\right\}.$$

Переходячи до границі при $T\to+\infty$, з (13) матимемо:

$$P\left\{\inf_{0\le t<+\infty}X(t)\le 0\right\}\le$$

$$\frac{p^{2m}\left(\frac{(\lambda_1+\lambda_2)C_{2m}^2}{2d_m}\right)^m\left[1+\sqrt{\frac{2d_m}{(\lambda_1+\lambda_2)C_{2m}^2}}\right]^{2m(m-1)}}{x^{2m}}. \qquad (14)$$

Отриманий результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 2. Нехай x- капітал СК в початковий момент часу, що функціонує на (B,S)-ринку, ціни активів на якому описуються рівняннями (1) та (2). Нехай $0<r<\mu$, $r-$ діюча відсоткова ставка, сумарні премії до СК описуються складним процесом Пуассона, причому $\lambda_1>0$- інтенсивність стандартного процесу Пуассона $N_1(t)$, що описує кількість премій, що надійшли до СК за час $[0,t]$, $0<\rho_k$- незалежні між собою та від $N_1(t)$, однаково розподілені величини премій, що мають скінчені моменти $M\rho_k=a$ та $F_1(x)=P\{\rho_k<x\}$; сумарні позови до СК описуються складним процесом Пуассона, причому $\lambda_2>0$- інтенсивність стандартного процесу Пуассона $N_2(t)$, що описує кількість позовів, що надійшли до СК за час $[0,t]$, $0<\eta_k$- незалежні між собою та від $N_2(t)$, однаково розподілені величини позовів, що мають скінчені моменти $M\eta_k = b$ та $F_2(x) = P\{\eta_k < x\}$, тоді якщо:

1) $0 < u^* < 1$, то $u^* 100\%$ коштів інвестується в акції, а залишок на банківський рахунок та для ймовірності банкрутства СК справедлива оцінка

$$P\left\{\inf_{0 \le t < +\infty} X_x^N(t) \le 0\right\} \le \frac{p^{2m}\left(\frac{(\lambda_1+\lambda_2)C_{2m}^2}{2d_m}\right)^m \left[1+\sqrt{\frac{2d_m}{(\lambda_1+\lambda_2)C_{2m}^2}}\right]^{2m(m-1)}}{x^{2m}}, \quad (15)$$

де

$$d_m = \max_{0<u<1}\left(\left[u\mu + (1-u)r\right] - \frac{\lambda}{2m} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{t2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{e}^{1}\frac{e^{-2mu\alpha(1+s)}}{\gamma s}ds \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\alpha}{2}}}{\left(1+u\left[e^{\alpha}-1\right]\right)^{2m}}d\alpha\right)$$

2) якщо $u^* = 1$, то 100% коштів інвестують в акції, для ймовірності СК справедлива оцінка (15), але $0 < u^* \le 1$ доставляє максимум функції $\varphi(u)$, тобто $\varphi(u^*) = \max_{0<u\le 1}\varphi(u)$, де $\varphi(u)$ визначається в (12).

Висновок. Знайдено оптимальний розподіл вкладів між ризиковими та безризиковими активами, що забезпечать найкращу оцінку знизу для ймовірності банкрутства СК серед запропонованого класу оцінок для узагальненої моделі Крамера-Лундберга, що описує еволюцію капіталу СК, причому вважалось, що СК працює на фінансовому ринку, ціна ризикового активу була побудована на основі стрибкоподібного процесу Орнштейна-Уленбека, стрибки якого описуються випадковими величинами з нормальним розподілом.

Список використаних джерел

1. *Баев А.В.* Об управлении капиталом одной страховой компании, работающей на (B,S) - рынке. / Б.В.Бондарев, А.В. Баев, Т.В. Жмыхова, И.Л. Шурко // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. - 2013. - №1-2. - С. 11-26.
2. *Бондарев Б.В.* Математические модели в страховании/ Бондарев Б.В. - Донецк.: АПЕКС, 2002.- 116 с.
3. *Анулова С.В.* Стохастическое исчисление. / С.В. Анулова, А.Ю. Веретенников, Н.В. Крилов, Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики- М.:ВИНИТИ.- Т.45.,1989- С.5-257.
4. *Баев А.В.* Об оценке вероятности разорения страховой компании в модели со стохастическими премиями и исками и возможностью инвестиций в финансовый (B,S) рынок / Б.В.Бондарев, А.В. Баев, Т.В. Жмыхова // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 5. — С. 111–123.
5. *Бондарев Б.В.* Функционирование страховой компании на BS рынке/ Б.В.Бондарев, А.В. Баев // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. - 2003. - №1-2. - С. 11-26.

References

1. BONDAREV, B.V. et al. (2013) About insurance company capital managing on the (B,S) market, *Journal Applied statistics. Actuarial and financial mathematics*. 1-2, p. 11-26.
2. BONDAREV, B. (2002) *Mathematical models in insurance.* Donetsk: Apeks.
3. ANULOVA, S. et al. (1989) *Stochastic calculus*. Moskva: Viniti.
4. BAEV, A., BONDAREV, B. and ZHMYKHOVA, T. (2010) On the probability estimate of the insurance company bankruptcy in the model with stochastic premiums and claims and the opportunity to invest in financial (B,S) - market, *Journal of Automation and Information Sciences*.5, p. 111-123.
5. BAEV, A. and BONDAREV, B. (2003) The insurance company functioning on the BS market, *Journal Applied statistics. Actuarial and financial mathematics*.1-2, p. 11-26.

Надійшла до редколегії 25.02.2014