Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки **2014, 2** *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*

УДК 519.8

Маляр М.М.[1], к.т.н., доц., докторант

Моделювання обмеженого раціонального вибору з використанням нечітких множин

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: malyarmm@gmail.com

N. N. Malyar[1], PhD

Modeling bounded rational choice using fuzzy sets

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: malyarmm@gmail.com

Розглядається підхід для вирішення задач багатокритеріального вибору. Запропоновано модель вибору, яка базується на ідеї обмеженої раціональності з використанням апарату нечітких множин.

Ключові слова: багатокритеріальність, задоволення вимог, нечіткі множини, обмежена раціональність

This paper addresses the problem of rational decision on a finite set of alternatives. Typically, these problems are described by means of multicriteria choice model types which are provided. The approach of constructing a model selection problem from the point of view of the theory of bounded rationality by H. Simon , with the use of fuzzy sets is described. The concept point "meet the requirements" is introduced. A model for constructing membership functions of fuzzy sets using the terms " meet the requirements " and convolution models that characterize pessimistic , cautious , moderate , optimistic estimates based on piecewise linear, exponential and Gaussian functions are proposed. We displayed wording of some fuzzy sets. We describe a general scheme for solving the problem of choice, based on this approach. The proposed approach allows us to build a model of multi-task selection in a finite set of alternatives. The result is the construction of fuzzy sets in terms of "best alternative" with the appropriate membership function. List of the advantages of this approach are given.

Key Words: multi-criteria, meet the requirements, fuzzy sets, bounded rationality

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Вступ. Вирішення проблем, які виникають в сучасному суспільстві, пов'язано з прийняттям рішень у надзвичайно складних умовах. Складність умов обумовлюється необхідністю врахування величезних об'ємів різнорідної інформації, яка, до того ж, характеризується невизначеністю або неточністю. Проблема прийняття рішень найбільш адекватно відображається за допомогою моделей багатокритеріального вибору [1,2]. Розглянемо класичну задачу багатокритеріального вибору. Нехай задано множину рішень (альтернатив), реалізація кожної з яких приводить до настання деякого наслідку, який оцінюється за деякою множиною критеріїв. Оцінка наслідків за вибраними критеріями ефективності визначає ступінь переваги відповідних альтернатив. Потрібно побудувати модель вибору найкращої альтернативи відповідно до заданих критеріїв ефективності.

Побудова математичної моделі такої задачі супроводжується врахуванням деяких реальних умов, які можна виразити наступним чином. По-перше, критерії за якими проводиться оцінка множини альтернатив мають різні розмірності, визначені у різних шкалах, покращенням результату вважається по деяких показниках їх зростання, по інших – спадання. По-друге, не завжди найкращим результатом вважається екстремальне значення того чи іншого показника.

Як показав Г.Саймон [3], у багатьох випадках раціональним вибором вважається деякий задовольняючий результат.

Постановка задачі багатокритеріального вибору. Вимоги, які ставляться до процедури вибору, визначають вид задачі прийняття рішень. Найбільш поширеними вважаються наступні задачі вибору [2]:

1. Класифікація простору альтернатив. Задачі розбиття альтернатив на класи зустрічаються у повсякденному житті. Наприклад, групи товарів розрізняються за якістю, вузи класифікуються по рівнях акредитації, тестові завдання по рівню складності.

2. Упорядкування альтернатив. Існує багато задач, які потребують визначення порядку на множині альтернатив. Це в основному моделювання проблеми рейтингування. Наприклад, упорядкування покупок по ступеню необхідності, визначення порядку виконання замовлень, надання пріоритетів напрямам розвитку країни.

3. Вибір найкращої альтернативи. Дана задача вважається основною в прийнятті рішень. Наприклад, вибір вузу, спеціальності, професії, місця роботи, вибір найкращого варіанту бюджету.

Системна модель задачі вибору може бути представлена наступним чином:

$$\{V, K, O, A, P_V \mid R_V\}.$$

Відомими являються:

– V – вид задачі вибору,
– K – множина критеріїв,
– O – шкали оцінок,
– A – множина альтернатив,
– P_V – правило вибору.

Невідомим R_V – результат вибору. Результат вибору може бути:

– альтернативи розбиті на класи
$R_v = \{(a,q) \mid a \in A, q - клас(назва)\}$,
– визначений порядок альтернатив
$R_v = \{(a,p) \mid a \in A, p - ранг(номер)\}$,
– вибрано одну або декілька альтернатив
$R_v = \left\{ a^* = arg \underset{a \in A}{opt} P_v(K(a)) \right\}$.

Розглянемо клас задач коли множина альтернатив $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$є скінченою, а множина критеріїв – це множина критеріальних оцінок $K = \{K_1, K_2, ..., K_m\}$, значення яких або обчислюється за допомогою моделей, або отримано в результаті вимірювання, або за допомогою експертних оцінок. Позначимо оцінки альтернатив через $x^j \left(j = \overline{1,n}\right)$, таким чином, кожну альтернативу буде представлено у вигляді вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ з простору R^m.

Множина X буде складатись із n оцінок альтернатив: $X = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$. В подальшому, під альтернативою будемо розуміти її оцінку, тобто будь-яка альтернатива $a \in A$ буде асоціюватися з відповідною оцінкою $x \in X$.

Зпівставивши кожній альтернативі a_j вектор $x^j \in R^m \left(j = \overline{1,n}\right)$, задачу вибору на скінченій множині можна представити у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

	x^1	x^2	…	x^n
K_1	x_1^1	x_1^2	$\cdots$	x_1^n
K_2	x_2^1	x_2^2	$\cdots$	x_2^n
...	...	...	...	...
K_m	x_m^1	x_m^2	$\cdots$	x_m^n

Математичну модель задачі вибору запишемо наступним чином: поставимо у відповідність кожній альтернативі x^j m-вимірний вектор оцінок по сформульованих критеріях,
тобто $x_i^j = O_{ij} = K_i\left(x^j\right), i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$, тоді модель задачі вибору запишеться у вигляді матриці рішень:

$$O=\begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} & ... & O_{1n} \\ O_{21} & O_{22} & ... & O_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ O_{k1} & O_{k2} & ... & O_{kn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де кожен стовпець матриці (1) є m-вимірний вектор оцінок відповідної альтернативи на всій множині критеріїв, а кожен рядок є n-вимірним вектором оцінок за відповідним критерієм всієї множини альтернатив X, O_{ij} – це оцінка j-альтернативи за i-критерієм.

Як видно з вище наведеного, задача вибору описана на критеріальній мові, але для її розв'язання ми запропонуємо використати і мову «нечітких множин».

Модель задачі обмеженої раціональності. Опишемо задачу вибору з точки зору теорії обмеженої раціональності[3]. Припустимо, що ОПР при виборі раціонального рішення прагне вибрати той варіант, який за всіма оцінками приймає екстремальні значення. Такий вибір, як правило, є неможливим. Це пов'язано з непорівнянністю альтернатив. Тому ОПР на практиці переслідують цілі «задоволеності», а не «екстремальності» (максимізації або мінімізації). Задоволеність трактується як результат, який є досить хорошим і потребує мінімум зусиль. Такий результат в літературі називається варіантом обмеженої раціональності.

Проблемою оцінки задоволеності є те, що сама задоволеність за змістом є поняття розмитим. Тому доцільно для його описання застосувати апарат нечітких множин. Як показує практика на сучасному етапі розрізняють два типи нечітких множин:

- нечіткі множини, які визначені на деякій числовій шкалі і задаються у вигляді нечітких чисел або нечітких інтервалів;

- нечіткі множини визначені на нечисловій множині у вигляді множин «нечітких об'єктів».

Запропонуємо підхід, який дозволяє побудувати математичну модель задачі багатокритеріального вибору задовольняючого результату на скінченій множині альтернатив [4].

Введемо у розгляд m-вимірний вектор $T = (t_1, ..., t_m)$ з простору R^m_{++}, компоненти якого будуть оцінки, які могли б задовольняти особу, що приймає рішення (ОПР) на відповідній множині критеріїв.

Означення. Точкою «задоволення вимог» (в подальшому просто точкою «задоволення») називається уявна альтернатива, в якої оцінки за всіма критеріями могли б задовольняти ОПР.

Назвемо вектор T точкою «задоволення вимог» ОПР. Точка «задоволення» може бути як досяжною (реальною), так і недосяжною (ідеальною).

Побудова нечітких критеріальних множин. Як відомо[5], нечітка множина описується множиною самих елементів і ступенем належності їх цій множині. Виходячи із постановки задачі, візьмемо за множину елементів множину оцінок альтернатив X, а функцію належності позначимо через $\mu_A(x)$, тоді нечітка множина A_T запишеться наступним чином:

$$A_T = \{x, \mu_A(x)\}, x \in X . \qquad (2)$$

Оскільки, кожна альтернатива $x \in X$ представляє собою точку m-вимірного евклідового простору R^m, тоді на множині альтернатив X можемо визначити деяку нечітку множину A_T, наприклад, «альтернатив близьких до точки задоволення». Функція належності $\mu_A(x)$ характеризує «ступінь належності» альтернативи $x \in X$ нечіткій множині A_T, таким чином це буде функція належності твердження «точка x близька до точки T».

Питання побудови функції належності є одним із найважливіших питань у теорії розмитих множин. Опишемо підхід побудови функції належності $\mu_A(x)$ з врахуванням особливостей задач вибору, що розглядаються.

Моделі функції належності. За своєю суттю функція належності визначає порядок елементів для нечіткої множини. Для простих категорій інформації оцінка функції належності є задачею з теорії психологічного вимірювання. Для більш складних категорій інформації, які визначаються на декартовому добутку лінійних шкал, функція належності може бути визначена як згортка оцінок інформації простих категорій.

Нехай нам відома матриця рішень (1) і задана точка «задоволення» $T = (t_1,...,t_m)$. Припустимо, що переваги ОПР можна представити за допомогою нечітких чисел, функція належності яких задається за певним видом моделі. Оцінка j – ї альтернативи за i – м критерієм визначається величиною нечіткого числа z_{ij}.

Визначимо множину величин $z_{ij}, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$, використовуючи одну з наступних моделей:

1. Кусково-лінійна

$$z_{ij} = 1 - \frac{|t_i - O_{ij}|}{max\left\{t_i - \min_j O_{ij}; \max_j O_{ij} - t_i\right\}}, \qquad (3)$$

2. Показникова (Пуассонівська)

$$z_{ij} = 1 - e^{-|t_i - O_{ij}| / max\{t_i - \min_j O_{ij}; \max_j O_{ij} - t_i\}}, \qquad (4)$$

3. Гаусівська

$$z_{ij} = 1 - e^{-(t_i - O_{ij})^2 / max\{t_i - \min_j O_{ij}; \max_j O_{ij} - t_i\}}. \qquad (5)$$

Кожна така величина є відносною оцінкою близькості елемента матриці (1) до відповідного елемента точки «задоволення». Оскільки кожна альтернатива $x \in X$ є точкою простору R_{++}^{m}, то визначена таким чином матриця $Z = (z_{ij})$ характеризує по стовпцях відносні оцінки близькості альтернативи x^j до точки «задоволення» T для кожного конкретному критерію і знімає питання різних шкал оцінювання.

Наступним кроком є побудова функції належності, як функції згортки даних числових величин. Нехай ОПР може задати вагові коефіцієнти кожному критерію ефективності $\{p_1, p_2, ..., p_m\}$. Тоді визначимо нормовані вагові коефіцієнти для кожного критерію ефективності:

$$\alpha_i = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i},\ i = \overline{1,m},$$

які відповідають умові $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$.

Далі будуємо функцію належності, як одну із запропонованих згорток, з урахуванням психосоматичного типу ОПР[6]:

$$\mu_A^2(x^j) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{z_{ij}}}, \tag{6}$$

$$\mu_A^3(x^j) = \prod_{i=1}^{m} (z_{ij})^{\alpha_i}, \tag{7}$$

$$\mu_A^4(x^j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_{ij}, \tag{8}$$

$$\mu_A^5(x^j) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (z_{ij})^2}, \tag{9}$$

Згортки (6)-(9) характеризують відповідно як песимістичну, обережну, середню, оптимістичну. З математичної точки зору це є відповідно з вагами середнє гармонійне, середнє геометричне, середнє арифметичне, середнє квадратичне і між ними, як відомо, існує наступна субординація:

$$\mu_A^2(x) \le \mu_A^3(x) \le \mu_A^4(x) \le \mu_A^5(x), \forall x \in X \quad .$$

Приклади нечітких множин. При моделюванні задачі вибору за допомогою розмитих множин, кожна ОПР може визначати свою нечітку множину. Наприклад, “не гірші за точку задоволення”, “набагато кращі за точку задоволення” та ін.

Опишемо деякі нечіткі множини використовуючи для знаходження величин $z_{ij}, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$, кусково-лінійну модель.

Нечітка множина $A_1 = \{$близько відносно точки «задоволення»$\}$:

$$z_{ij} = 1 - \frac{|t_i - O_{ij}|}{max\left\{t_i - \min_j O_{ij}; \max_j O_{ij} - t_i\right\}}.$$

Нечітка множина $A_2 = \{$краще відносно точки «задоволення»$\}$:

$$z_{ij} = \begin{cases} \dfrac{|t_i - O_{ij}|}{\max_j O_{ij} - t_i}, O_{ij} > t_i; \\ 0, O_{ij} \le t_i. \end{cases} \quad i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}.$$

Нечітка множина $A_3 = \{$гірше відносно точки «задоволення»$\}$:

$$z_{ij} = \begin{cases} \dfrac{|t_i - O_{ij}|}{t_i - \min_j O_{ij}}, O_{ij} < t_i; \\ 0, O_{ij} \ge t_i. \end{cases} \quad i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}.$$

Використовуючи операції заперечення, концентрації и розтягування можна побудувати нові нечіткі множини:

$A_1' = \{$не близько відносно до точки «задоволення»$\}$;

$A_1'' = \{$дуже близько відносно до точки «задоволення»$\}$;

$A_1''' = \{$більш-менш близько відносно до точки «задоволення»$\}$;

$A_2' = \{$не краще відносно до точки «задоволення»$\}$;

$A_2'' = \{$набагато краще відносно до точки «задоволення»$\}$;

$A_2''' = \{$більш-менш краще відносно до точки «задоволення»$\}$;

$A_3' = \{$не гірше відносно до точки «задоволення»$\}$;

$A_3'' = \{$набагато гірше відносно до точки «задоволення»$\}$;

$A_3''' = \{$більш-менш гірше відносно до точки «задоволення»$\}$ і т.д.

Схема розв’язування задачі вибору. Виходячи з вищевикладеного, опишемо підхід розв’язання задачі вибору у вигляді наступної схеми.

Нехай нам задані множина альтернатив, множина критеріїв і матриця оцінок (1). Припустимо, що всі альтернативи належать множині Парето, тобто є недомінованими і непорівнянними, і найкращою оцінкою вважається максимальна.

Крок 1. ОПР повинна визначитись з точкою «задоволення» T і сформулювати нечітку критеріальну множину A відносно даної точки.

Крок 2. Вибір моделі обчислення величин z_{ij} матриці Z за однією з моделей (3) – (5).

Крок 3. Визначення функції належності нечіткої множини. Необхідно задати вагові коефіцієнти для критеріїв ефективності $\{p_1, p_2, ..., p_m\}$ та вибрати модель згортки величин z_{ij} за однією з (6) –(9).

Таблиця 2

	x^1	x^2	…	x^n
K_1	z_{11}	z_{12}	$\cdots$	z_{1n}
K_2	z_{21}	z_{22}	$\cdots$	z_{2n}
…	…	…	…	…
K_m	z_{m1}	z_{m2}	$\cdots$	z_{mn}
	$\mu(x^1)$	$\mu(x^2)$		$\mu(x^n)$

Крок 4. Проранжуємо множину альтернатив за значеннями зважених величин оцінок функції належності нечіткої множини «краща альтернатива» у порядку спадання їх значень.

Висновок. Запропонований підхід дозволяє побудувати модель задачі багатокритеріального вибору на скінченій множині альтернатив у вигляді задачі обмеженої раціональності в термінах розмитих множин. Результатом є побудова нечіткої множини в термінах «найкраща альтернатива» з відповідною функцією належності.

Даний підхід має наступні переваги.

1. Він не потребує нормалізації критеріальних оцінок.

2. В ньому не проводяться парні порівняння між всіма альтернативами. Порівнюється кожна альтернатива лише з точкою «задоволення».

Список використаних джерел

1. *Волошин О.Ф.* Моделі та методи прийняття рішень/ О.Ф.Волошин, С.О.Мащенко. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. – 336 с.
2. *Лотов А.В.* Многокритериальные задачи принятия решений / А.В.Лотов, И.И. Поспелова. – Москва: МАКСПресс, 2008. – 197 с.
3. *Simon H.A.* Rationality as Process and as Product of Thought // American Economic Review. – 1978. – V.68. – №.2. – p.1–16.
4. *Маляр М.М.* Описання задач вибору на мові розмитих множин/ М.М.Маляр // Вісник Київського університету: серія фіз.-мат. науки. – Київ, 2005. – Вип.4. – С.197-201.
5. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981. – 208 с.
6. *Маляр Н.Н.* Нечеткая модель удовлетворительного решения задачи выбора/ М.М.Маляр // Information Models of Knowledge. – ITHEA – Kiev, Ukraine – Sofia, Bulgaria, 2010. – С. 220-225.

References

1. VOLOSHIN, O.F., MASHENKO S.O. (2010) *Modeli ta metodyi pryjnyatya rishen.* Kyiv: Vydavnycho-polihrafichnyj centr Kyyivskyj universytet.
2. LOTOV A.V., POSPELOVA I.I. (2008) *Mnogokriterialnyie zadachi prinyatiya resheniyj.* Moskva: MAKSPress.
3. SIMON H.A. (1978) *Rationality as Process and as Product of Thought*. American Economic Review. 68(2). pp.1–16.
4. MALYAR M.M. (2005) *The choosing problem by fuzzy sets.* Bulletin of the University of Kiev Series: Physics& Mathematics. 4. pp.197-201.
5. ORLOVSKYJ S.A. (1981) *Problemyi prinyatiya resheniyj pri nechetkoyj ischodnoyj informacii.* Moskva: Nauka.
6. MALYAR N.N. (2010) *Nechetkaya model udovletvoritelnogo resheniya zadachi vyibora.* Information Models of Knowledge. p. 220-225.

Надійшла до редколегії 09.04.2014