УДК 004.42:510.69

Нікітченко М. С.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Шкільняк С. С.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Шкільняк О. С.[1], к. ф.-м. н.

V-сингулярні семантичні моделі першопорядкових логік

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д,
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

M.S. Nikitchenko[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
S.S. Shkilniak[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
O.S. Shkilniak[1], PhD (Phys.-Math.).

V-singular semantic models of first-order logics

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

Досліджено семантичні моделі першопорядкових логік V-квазіарних предикатів із 1-елементними предметними областями – V-сингулярні семантичні моделі. Описано квазіарні функції та предикати, задані на V-сингулярних іменних множинах, такі функції та предикати названі V-сингулярними. Розглянуто композиції V-сингулярних функцій та предикатів. Досліджено підкласи монотонних V-сингулярних функцій та предикатів, наведено особливості однозначних монотонних V-сингулярних предикатів.

Ключові слова: логіка, предикат, семантична модель.

Semantic models of first-order logics of V-quasiary predicates with 1-element subject domains – V-singular semantic models – are investigated. Quasiary functions and predicates defined on V-singular nominal sets are described. Such functions and predicates are called V-singular. Compositions of V-singular functions and predicates are considered. V-singular total predicates of classical logic are constant predicates. At the same time, each V-singular quasiary predicate is defined by its truth and falsehood sets, which are subsets of V. So, composition systems of V-singular quasiary predicates are much richer compared with the corresponding system of classical logic. Subclasses of monotone V-singular functions and predicates are studied. The cardinality of sets of quasiary and finite-ary monotone V-singular functions and predicates are estimated with respect to the cardinality of the set of subject names. Properties of single-valued monotone V-singular predicates are considered.

Key Words: logic, predicate, semantic model.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Розвиток інформаційних технологій та програмування зумовлює розширення сфери застосування математичної логіки. Водночас принципові обмеження класичної логіки предикатів [1] роблять актуальною проблему побудови та дослідження нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Такими є композиційно-номінативні логіки (КНЛ), які будуються на основі спільного для логіки й програмування композиційно-номінативного підходу. Вивченню першопорядкових КНЛ квазіарних предикатів присвячена дана робота. Її метою є дослідження спеціальних семантичних моделей КНЛ квазіарних предикатів із 1-елементною предметною областю. Такі семантичні моделі названо сингулярними.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [2, 3].

Для полегшення читання наведемо основні визначення необхідні для подальшого викладу.

V-іменна множина (*V*-ІМ) над A – це однозначна функція вигляду $\delta: V \to A$. Тут V – множина предметних імен (нескінченна, взагалі кажучи), A – множина предметних значень (базових даних). Клас всіх *V*-ІМ над A позначимо ${}^{V}\!A$.

V-квазіарна функція на множині A – це функція вигляду $P: {}^{V}\!A \to A$. *V*-квазіарний предикат на множині A – це функція вигляду $P: {}^{V}\!A \to \{T, F\}$, де T та F – істиннісні значення.

Ми розглядаємо як однозначні, так і неоднозначні, як тотальні, так і часткові предикати.

Часткові неоднозначні квазіарні предикати на множині A ми трактуємо [3] як відповідності (відношення) між ${}^{V}\!A$ та множиною істиннісних значень $\{T, F\}$. Називаємо їх предикатами реляційного типу. При цьому трактуємо $P(d)$ як множину значень, які предикат P може прийняти на $d\in {}^{V}A$.

Для V-квазіарного предиката P задаємо області істинності та хибності:

$$\boldsymbol{T}(P) = \{d\in {}^{V}A \mid T\in P(d)\};$$

$$\boldsymbol{F}(P) = \{d\in {}^{V}A \mid F\in P(d)\}.$$

V-квазіарний предикат P однозначний, якщо $\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$.

V-квазіарний предикат P тотальний, якщо $\boldsymbol{T}(P)\cup\boldsymbol{F}(P) = {}^{V}A$.

1. Сингулярні функції та предикати

V-ІМ над 1-елементною множиною базових даних назвемо V-сингулярною. Якщо множина імен V зрозуміла із контексту, то V не пишемо і називаємо V-сингулярну ІМ просто сингулярною.

Кожна V-сингулярна ІМ $d\in {}^{V}\{a\}$ однозначно задається множиною $asn(d) = \{v\in V \mid v\mapsto a\in d\}$ її імен. Тому V-сингулярні ІМ вигляду $d\in {}^{V}\{a\}$ можна трактувати як множини імен, по суті ототожнюючи d та $asn(d)$.

Таким чином, логіка предикатів над сингулярними ІМ фактично є логікою предикатів над даними типу множина.

Теоретико-множинні операції /, $\cap$, $\cup$ визначені для всіх пар сингулярних ІМ. Зокрема, це вірно і для $\cup$, на відміну від загального випадку ІМ. При цьому маємо:

$$asn(d_1 / d_2) = asn(d_1) / asn(d_2);$$

$$asn(d_1\cap d_2) = asn(d_1)\cap asn(d_2);$$

$$asn(d_1\cup d_2) = asn(d_1)\cup asn(d_2).$$

Для сингулярних ІМ операція накладки ∇ стає операцією $\cup$.

Операції реномінації $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та розширеної реномінації $r_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$ задаються традиційним чином:

$$r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) = d\,\|_{-\bar{v}} \cup [v_i \mapsto a \mid x_i \in asn(d)];$$

$$r_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(d) = d\,\|_{-\bar{v},\bar{u}} \cup [v_i \mapsto a \mid x_i \in asn(d)].$$

Сингулярна ІМ d однозначно задається множиною $asn(d)$, тому ці визначення можна переписати, трактуючи сингулярні ІМ як множини імен:

$$r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(X) = (X \setminus \{\bar{v}\}) \cup \{v_i \mid x_i \in X\};$$

$$r_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(X) = (X \setminus \{\bar{v},\bar{u}\}) \cup \{v_i \mid x_i \in X\}.$$

Множину всіх скінченних V-сингулярних ІМ над $\{a\}$ позначаємо ${}^{V}\{a\}_F$.

V-квазіарна функція на 1-елементній множині $\{a\}$ – це відображення (часткове, взагалі кажучи) вигляду ${}^{V}\{a\}\to\{a\}$.

При трактуванні цих функцій як відношень між ${}^{V}\{a\}$ та $\{a\}$ усі такі функції однозначні.

V-квазіарну функцію задану на 1-елементній множині, назвемо V-сингулярною.

V-квазіарний предикат на 1-елементній множині $\{a\}$ – це відображення (часткове неоднозначне, взагалі кажучи) вигляду ${}^{V}\{a\}\to\{T, F\}$.

V-квазіарний предикат, заданий на 1-елементній множині, назвемо V-сингулярним.

Якщо V зрозуміла із контексту, то V-сингулярні функції чи предикати будемо називати просто сингулярними.

V-сингулярна квазіарна функція скінченно-арна, якщо вона має вигляд ${}^{V}\{a\}_F\to\{a\}$.

V-сингулярний квазіарний предикат скінченно-арний, якщо він має вигляд ${}^{V}\{a\}_F\to\{T, F\}$.

Для скінченно-арних функцій та предикатів кожне вхідне дане є скінченною ІМ, водночас, на відміну від функцій та предикатів класичної логіки, потужність такої ІМ наперед не обмежена.

Семантичними моделями першопорядкових КНЛ є композиційні системи квазіарних функцій та предикатів вигляду $({}^{V}A, Fn^{A}\cup Pr^{A}, C)$, де C задається множиною базових композицій відповідного рівня. Кожна така композиційна система задає дві алгебри: алгебру даних $(A, Fn^{A}\cup Pr^{A})$ та композиційну предикатну алгебру $(Fn^{A}\cup Pr^{A}, C)$.

Терми композиційної алгебри трактуємо як формули мови КНЛ відповідного рівня.

Для чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ), або КНЛ кванторного рівня, маємо $Fn^{A} = \varnothing$.

Множини базових композицій першопорядкових КНЛ відповідного рівня:

– $\{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ для ЧКНЛ;

– $\{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, =_{xy}\}$ для ЧКНЛ з рівністю;

– $\{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \equiv_{xy}\}$ для ЧКНЛ із строгою рівністю;

– $\{\neg, \vee, \mathrm{S}^{\bar{v}}, 'x, \exists x\}$ для КНЛ функціонального рівня;

– $\{\neg, \vee, \mathrm{S}^{\bar{v}}, 'x, \exists x, =\}$ для КНЛ функціонального рівня з рівністю, або функціонально-екваційного рівня;

– $\{\neg, \vee, \mathrm{S}^{\bar{v}}, 'x, \exists x, \equiv\}$ для КНЛ функціонального рівня із строгою рівністю.

Для ЧКНЛ додатково виділено (див. [4, 5]) наступні підрівні:

– ε-ЧКНЛ (ЧКНЛ із предикатами-індикаторами εz наявності значення для змінних);

– ЧКНЛРР (ЧКНЛ із розширеними реномінаціями);

– ε-ЧКНЛРР (поєднують можливості ЧКНЛРР та ε-ЧКНЛ).

Алгебри даних із 1-елементним носієм будемо називати сингулярними.

Алгебра даних (A, $Fn^A \cup Pr^A$) сингулярна, якщо $A = \{a\}$. Такі алгебри позначаємо ($\{a\}$, $Fn^a \cup Pr^a$).

Для чистих першопорядкових логік сингулярні алгебри даних позначаємо ($\{a\}$, Pr^a).

Композиційні системи V-сингулярних квазіарних функцій та предикатів назвемо V-сингулярмними. Такі системи для КНЛ функціональних рівнів мають вигляд (${}^V\{a\}$, $Fn^a \cup Pr^a$, C). Для КНЛ кванторного рівня V-сингулярні композиційні системи мають вигляд (${}^V\{a\}$, Pr^a, C).

2. Сингулярні алгебри класичної логіки

У випадку класичної логіки базові функції та предикати тотальні n-арні.

Базова n-арна сингулярна функція f застосовна лише до n-ки $(a,\dots,a)$, де вона може приймати лише єдине значення a, тому така функція є константною. Отже, існує єдина сингулярна n-арна функція: константа a^n.

Базовий n-арний сингулярний предикат P застосовний лише до n-ки $(a,\dots,a)$, де він може приймати одне з двох значень T чи F, тому такий предикат є константним.

Таким чином, існує два n-арні сингулярні предикати: константний T^n та константний F^n.

Константними є також тотальні сингулярні функції та предикати від змінних:

Твердження 1. Тотальні сингулярні X-арні функції та предикати є константними.

Доведення. Єдиним можливим вхідним даним для сингулярної $\{v_1,...,v_n\}$-арної функції чи сингулярного $\{v_1,...,v_n\}$-арного предиката є $[v_1 \mapsto a,..., v_n \mapsto a]$. На цьому даному $\{v_1,...,v_n\}$-арна тотальна сингулярна функція мусить прийняти єдине значення a, тотальний сингулярний $\{v_1,...,v_n\}$-арний предикат – одне з двох значень T чи F. Отже, кожна тотальна сингулярна $\{v_1,...,v_n\}$-арна функція і кожний тотальний сингулярний $\{v_1,...,v_n\}$-арний предикат є константними.

При суперпозиціях (підстановках) сингулярних Y-арних функцій у сингулярну X-арну (n-арну) функцію чи предикат арність результуючої функції чи предиката визначаємо традиційним чином. Арність функції (предиката) g позначаємо $ar(g)$.

Нехай маємо суперпозицію сингулярних функцій $f_1,..., f_n$ у сингулярну функцію (предикат) g за іменами $v_1,..., v_n$, де $\{v_1,...,v_n\} \subseteq ar(g)$. Арність результуючої функції (предиката) h задається так:

$$ar(h) = (ar(g) \setminus \{v_1,...,v_n\}) \cup ar(f_1) \cup ... \cup ar(f_n).$$

Якщо $f_1,..., f_n, g$ – тотальні, то h теж тотальна, тому така h – константна функція чи предикат.

Пропозиційні зв'язки для константних сингулярних предикатів задаємо традиційним чином. Якщо P – X-арний, то $\neg P$ – X-арний; якщо P – X-арний та Q – Y-арний, то $P \vee Q$ – $X \cup Y$-арний.

Квантори $\exists x$ та $\forall x$ діють на сингулярні предикати таким чином.

$$\exists x P(x, v_1, ..., v_n) = \forall x P(x, v_1, ..., v_n) = T \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(x, v_1, ..., v_n) = T;$$
$$\exists x P(x, v_1, ..., v_n) = \forall x P(x, v_1, ..., v_n) = F \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(x, v_1, ..., v_n) = F;$$
$$\exists x P(v_1, ..., v_n) = \forall x P(v_1, ..., v_n) = P(v_1, ..., v_n).$$

Таким чином, квантори $\exists x$ та $\forall x$ діють на сингулярні предикати як тотожні відображення із можливим звуженням арності.

Це означає, що для сингулярних предикатів класичної першопорядкової логіки квантори неістотні, тому фактично діють лише закони пропозиційної логіки.

3. Сингулярні композиційні системи логік квазіарних предикатів

Для кожного $d \in {}^V A$ значення V-сингулярної квазіарної функції чи предиката на d однозначно визначається множиною $asn(d)$.

Кожна V-сингулярна квазіарна функція має вигляд ${}^V\{a\} \to \{a\}$, тому вона є майже константною, адже на кожному вхідному даному може прийняти єдине значення a або бути невизначеною. На відміну від сингулярних функцій класичної логіки, які є константними, сингулярні квазіарні функції вельми різноманітні. Наприклад, можна задати $f(\varnothing)\uparrow$, $f(\{x\}) = a$, $f(\{x, y\})\uparrow$ тощо.

Кожна V-сингулярна квазіарна функція f однозначно задається множиною визначеності

$$D_f = \{X \subseteq V \mid f(X)\downarrow = a\}.$$

Оцінимо потужності множин квазіарних та скінченно-арних сингулярних функцій.

Потужність множини всіх V-квазіарних сингулярних функцій рівна потужності булеана множини предметних імен V.

У випадку зліченної множини V отримуємо континуальну множину всіх V-квазіарних сингулярних функцій.

Розглянемо множину скінченно-арних сингулярних функцій. Нагадаємо, що для таких функцій всі вхідні дані є скінченними ІМ, проте їх потужності наперед не обмежені.

У випадку нескінченної множини V потужність множини скінченно-арних сингулярних функцій рівна потужності множини V.

Зокрема, якщо множина V зліченна, то множина всіх скінченно-арних V-сингулярних функцій теж зліченна.

Для кожного часткового однозначного предиката можливими результатами його застосування можуть бути *T*, *F*, невизначеність; для тотального неоднозначного – *T*, *F*, *T* та *F*; для часткового неоднозначного – усі зазначені вище 4 можливості. Тому клас сингулярних предикатів істотно багатший за клас сингулярних функцій.

Кожний *V*-сингулярний квазіарний предикат *P* однозначно задається парою множин $\boldsymbol{T}(P)$ та $\boldsymbol{F}(P)$ – областями його істинності та хибності:

$$\boldsymbol{T}(P) = \{X\subseteq V \mid T\in P(X)\};$$
$$\boldsymbol{F}(P) = \{X\subseteq V \mid F\in P(X)\}.$$

Оцінимо потужності множин квазіарних та скінченно-арних сингулярних предикатів.

У загальному випадку потужність множини областей істинності всіх *V*-сингулярних квазіарних предикатів та потужність множини областей хибності всіх *V*-сингулярних квазіарних предикатів рівні потужності булеана множини *V*. Якщо *V* зліченна, отримуємо континуальну множину областей істинності та континуальну множину областей хибності *V*-сингулярних квазіарних предикатів. Звідси маємо континуальну множину всіх *V*-сингулярних квазіарних предикатів.

Розглянемо множину скінченно-арних *V*-сингулярних предикатів. У випадку нескінченної множини *V* потужність множини таких предикатів рівна потужності множини *V*. Зокрема: якщо множина *V* зліченна, то множина всіх скінченно-арних *V*-сингулярних предикатів теж зліченна.

Дослідимо особливості композицій сингулярних композиційних систем КНЛ.

Базові пропозиційні композиції $\neg, \vee$ діють традиційно.

Композиції реномінації $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та роширеної реномінації $\mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$ визначаються через відповідні операції $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та $r_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$:

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(X) = P(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(X));$$
$$\mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(P)(X) = P(r_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(X)).$$

Зауважимо, що для різних $X\subseteq V$ можуть бути різноманітні співвідношення між X та $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(X)$ – незрівнянність X та $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(X)$ щодо включення, $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(X)\subset X$, $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(X)\supset X$, $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(X)=X$. Тому сингулярні предикати P та $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ можуть бути істотно різними. Те саме стосується P та $\mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(P)$.

Для підрівнів ε-ЧКНЛ та ε-ЧКНЛР спеціальні предикати-індикатори ε*z* наявності значення для змінних задаються так:

$$\varepsilon z(X) = \begin{cases} T, \text{ якщо } z\notin X, \\ F, \text{ якщо } z\in X. \end{cases}$$

Функції деномінації $'z$ задаються так:

$$'z(X) = \begin{cases} a, \text{ якщо } z\in X, \\ \text{невизначене, якщо } z\notin X. \end{cases}$$

Композиції суперпозиції $\mathrm{S}^{\bar{v}}$ діють спрощено, вони задаються так:

$$\mathrm{S}^{v_1,\ldots,v_n}(h, f_1,\ldots, f_n)(X) =$$
$$= h((X\setminus\{v_1,\ldots,v_n\})\cup\{v_i \mid f_i(X)\downarrow\}).$$

Тут $h\in Fn^a\cup Pr^a$, $f_i\in Fn^a$, $X\subseteq V$.

Спеціальні предикати рівності $=_{xy}$ та строгої рівності $\equiv_{xy}$ діють так:

$$=_{zy}(X) = \begin{cases} T, \text{ якщо } z\in X \text{ та } y\in X, \\ \text{невизначене, в інших випадках;} \end{cases}$$

$$\equiv_{zy}(X) =$$
$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } z\in X,\ y\in X \text{ або } z\notin X,\ y\notin X, \\ F, \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Спеціальні композиції слабкої рівності = та строгої рівності ≡ діють подібним чином:

$$=(f,g)(X) = \begin{cases} T, \text{ якщо } f(X)\downarrow \text{ та } g(X)\downarrow, \\ \text{невизначене, в інших випадках;} \end{cases}$$

$$\equiv(f,g)(X) =$$
$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } f(X)\downarrow,\ g(X)\downarrow \text{ або } f(X)\uparrow,\ g(X)\uparrow, \\ F, \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Для сингулярних предикатів композиції квантифікації діють спрощено. Маємо:

$$Y\in \boldsymbol{T}(\exists xP) \Leftrightarrow Y\cup\{x\}\in \boldsymbol{T}(P);$$
$$Y\in \boldsymbol{F}(\exists xP) \Leftrightarrow Y\cup\{x\}\in \boldsymbol{F}(P);$$
$$Y\in \boldsymbol{T}(\forall xP) \Leftrightarrow Y\cup\{x\}\in \boldsymbol{T}(P);$$
$$Y\in \boldsymbol{F}(\forall xP) \Leftrightarrow Y\cup\{x\}\in \boldsymbol{F}(P).$$

Таким чином, отримуємо

Твердження 2. Для для кожних $Y\subseteq V$ та $x\in V$ маємо $\exists xP(Y) = \forall xP(Y) = P(Y\cup\{x\})$.

Наслідок 1. $\exists xP = \forall xP = \neg\exists x\neg P = \neg\forall x\neg P$.

Усі властивості квазіарних предикатів першопорядкових КНЛ справджуються для предикатів сингулярних композиційних систем відповідних рівнів, адже ці системи утворюють підклас класу семантичних моделей першопорядкових КНЛ.

4. Монотонні сингулярні функції та предикати

Розглянемо особливості монотонних (еквітонних) сингулярних функцій та предикатів.

Монотонні функції. Якщо функція *f* монотонна, то із $X\subseteq Y$ та $f(X)\downarrow$ випливає $f(Y)\downarrow$. Сингулярна квазіарна функція може приймати єдине значення *a*, тому всі монотонні сингулярні функції є однозначними.

Оцінимо потужності множин скінченно-арних та квазіарних монотонних сингулярних функцій.

Твердження 3. Потужність множини V-сингулярних квазіарних монотонних функцій рівна потужності булеана множини V.

Доведення. Потужність множини усіх V-сингулярних квазіарних функцій рівна потужності булеана V. Водночас можна задати множину монотонних V-сингулярних квазіарних функцій, потужність якої теж рівна потужності булеана V. Для цього для довільної $X \subseteq V$ визначимо функцію f_X таку, що $f_X(Z)\uparrow$ для кожного Z такого, що $Z \setminus X = \varnothing$ (тобто $Z \subseteq X$), та $f_X(Z)\downarrow$ для кожного Z такого, що $Z \setminus X \neq \varnothing$. Зрозуміло, що кожна така функція f_X монотонна, причому $f_X \neq f_Y$ при $X \neq Y$.

Наслідок 2. У випадку зліченної V потужність множини всіх монотонних V-сингулярних квазіарних функцій має потужність континууму.

Множину $X \in D_f$ назвемо мінімальним елементом визначеності сингулярної функції f, якщо $f(X)\downarrow$ та $f(Z)\uparrow$ для кожного $Z \subset X$.

Не кожна монотонна сингулярна функція має мінімальні елементи визначеності. Справді, розглянемо функцію f, визначену якраз на всіх нескінченних підмножинах V. Для такої f маємо $D_f = \{X \subseteq V \mid X \text{ нескінченна}\}$. Але для кожної нескінченної множини X існує нескінченна $Z \subset X$.

Для скінченно-арних сингулярних функцій ситуація краща. Область визначення D_f скінченно-арної монотонної сингулярної f однозначно задається множиною всіх мінімальних елементів $md(f) = \{X \subseteq V \mid f(X)\downarrow \text{ та } f(Z)\uparrow \text{ для кожного } Z \subset X\}$. Отже, кожна скінченно-арна монотонна сингулярна f однозначно задається множиною $md(f)$.

Нехай $X \in md(f)$, $Y \in md(f)$ та $X \neq Y$, тоді неможливо $X \subset Y$ та неможливо $Y \subset X$. Таким чином, елементи $md(f)$ утворюють антиланцюг на булеані множини V, впорядкованому за відношенням включення $\subset$. Елементи такого антиланцюга зліченні, тому потужність множини таких антиланцюгів рівна потужності V. Отже:

Твердження 4. У випадку нескінченної V потужність множини скінченно-арних монотонних V-сингулярних функцій рівна потужності V.

Наслідок 3. У випадку зліченної V потужність множини скінченно-арних монотонних V-сингулярних функцій теж зліченна.

Монотонні предикати. У загальному випадку монотонних квазіарних сингулярних предикатів мають виконуватися такі умови:

із $X \subseteq Y$ та $T \in P(X)$ випливає $T \in P(Y)$;

із $X \subseteq Y$ та $F \in P(X)$ випливає $F \in P(Y)$.

Таким чином, для монотонних квазіарних сингулярних предикатів маємо $P(Y) \subseteq P(Y \cup \{x\})$.

Враховуючи твердження 4, звідси отримуємо

Твердження 5. У випадку монотонних V-сингулярних квазіарних предикатів для кожних $Y \subseteq V$ та $x \in V$ маємо $P(Y) \subseteq \exists x P(Y) = \forall x P(Y)$.

Оцінимо тепер потужності множин скінченно-арних та квазіарних монотонних сингулярних предикатів.

Твердження 6. У випадку нескінченної V потужність множини монотонних V-сингулярних квазіарних предикатів рівна потужності булеана множини V.

Доведення. Потужність множини усіх V-сингулярних квазіарних предикатів рівна потужності булеана множини V. Водночас можна задати таку множину монотонних V-сингулярних квазіарних предикатів, потужність якої теж рівна потужності булеана множини V. Це доводимо так, як для випадку монотонних V-сингулярних квазіарних функцій, розглядаючи окремо області істинності та хибності цих предикатів і враховуючи те, що кожний квазіарний предикат P однозначно задається парою $\boldsymbol{T}(P)$ та $\boldsymbol{F}(P)$.

Наслідок 4. У випадку зліченної V потужність множини монотонних V-сингулярних квазіарних предикатів має потужність континууму.

Для скінченно-арних монотонних неоднозначних предикатів множини $\boldsymbol{T}(P)$ та $\boldsymbol{F}(P)$ однозначно задаються множинами їх мінімальних елементів $mT(P) = \{X \subseteq V \mid T \in P(X) \text{ та } T \notin P(Z) \text{ для кожного } Z \subset X\}$ та $mF(P) = \{X \subseteq V \mid F \in P(X) \text{ та } F \notin P(Z) \text{ для кожного } Z \subset X\}$. Подібно випадку $md(f)$, елементи $mT(P)$ та елементи $mF(P)$ утворюють антиланцюги на булеані множини V, впорядкованому за відношенням включення $\subset$.

Таким чином, кожний неоднозначний скінченно-арний монотонний сингулярний предикат P однозначно задається парою множин $mT(P)$ та $mF(P)$. Звідси:

Твердження 7. У випадку нескінченної V потужність множини всіх скінченно-арних монотонних V-сингулярних предикатів рівна потужності множини V.

Наслідок 5. У випадку зліченної V потужність множини всіх скінченно-арних монотонних V-сингулярних предикатів теж зліченна.

Розглянемо особливості однозначних монотонних (еквітонних) сингулярних предикатів.

Твердження 8. У випадку однозначних монотонних V-сингулярних квазіарних предикатів для кожних $Y \subseteq V$ та $x \in V$ маємо:

$$P(Y)\downarrow \Rightarrow P(Y) = \exists x P(Y) = \forall x P(Y) = P(Y \cup \{x\}).$$

Твердження 8 є деталізацією твердження 5 на випадок однозначних монотонних предикатів.

Однозначні монотонні сингулярні предикати мусять бути майже константними.

Справді, якщо для деяких $X \subseteq V$ та $Y \subseteq V$ маємо $P(X) = T$ та $P(Y) = F$, то, згідно монотонності, мусить бути $P(X \cup Y) = T$ та $P(X \cup Y) = F$ – суперечність однозначності.

Звідси клас однозначних монотонних сингулярних квазіарних предикатів розпадається на:

– підклас монотонних T-предикатів;

– підклас монотонних F-предикатів;

– всюди невизначений предикат.

При цьому кожній квазіарній монотонній сингулярній функції f із $D_f \neq \varnothing$ зіставляються:

– монотонний сингулярний T-предикат P із $\boldsymbol{T}(P) = D_f$ та $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$;

– монотонний сингулярний F-предикат Q із $\boldsymbol{F}(P) = D_f$ та $\boldsymbol{T}(P) = \varnothing$.

Таким чином, сингулярні композиційні системи квазіарних предикатів істотно багатші за системи сингулярних предикатів класичної логіки.

Висновки

В роботі досліджено семантичні моделі першопорядкових композиційно-номінативних логік V-квазіарних предикатів із 1-елементними предметними областями – V-сингулярні композиційні системи. Описано квазіарні функції та предикати, задані на V-іменних множинах над 1-елементною множиною базових даних – V-сингулярних іменних множинах. Такі функції та предикати названо V-сингулярними. Розглянуто композиції V-сингулярних функцій та предикатів. Сингулярні предикати класичної логіки є константними, тому сингулярні композиційні системи квазіарних предикатів істотно багатші за системи сингулярних предикатів класичної логіки. Досліджено підкласи монотонних V-сингулярних функцій та монотонних V-сингулярних предикатів. Зроблено оцінки потужності множин квазіарних та скінченно-арних монотонних V-сингулярних функцій та монотонних V-сингулярних предикатів залежно від потужності множини V. Наведено особливості однозначних монотонних V-сингулярних предикатів.

Список використаних джерел

1. *Kleene S. C.* Mathematical Logic / S. C. Kleene. – New York: John Wiley & Sons. – 1967. – 398 p.
2. *Нікітченко М.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – Київ: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
3. *Нікітченко М.С.* Композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів: семантичні аспекти / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2012. – Вип. 4. – С. 165–172.
4. *Нікітченко М.С.* Логіки часткових предикатів з розширеними реномінаціями та кванторами / М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013. – Вип. 2. – С. 210–215.
5. *Нікітченко М.С.* Композиційно-номінативні логіки із спеціальними предикатами наявності значення для змінних / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013. – Спецвипуск. – С. 128–133.

References

1. Kleene, S. (1967). *Mathematical Logic*. New York: John Wiley & Sons.
2. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2008). *Matematycna lohika ta teoria alhorytmiv*. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet.
3. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2012). Composition-nominative logics of quasiary predicates: semantic aspects. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics.* № 4, p. 165–172.
4. NIKITCHENKO, M., SHKILNIAK, O. and SHKILNIAK, S. (2013). Logics of partial predicates with extended renominations and quantifiers. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics.* № 2, p. 210–215.
5. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2013). Composition-nominative logics with special variable definedness predicates. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics.* Spetsvypusk, p. 128–133.

Надійшла до редколегії 27.03.14