УДК 519.2:519.6

Пашко А.О.[1], к.ф.-м.н., доц.

Статистичне моделювання узагальненого вінерівського процесу

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: **pashkoua@mail.ru**

A. A. Pashko[1], Ph.D., Ass. Prof.

Statistical simulation of the generalized Wiener process

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: **pashkoua@mail.ru**

В роботі досліджуються оцінки точності і надійності моделювання узагальненого вінерівського випадкового процесу в нормі простору $L_2([0,1])$, отримані моделі використовуються в прикладних задачах. В якості моделі розглядається розклад процесу у вигляді стохастичного субгауссівського ряду.

Ключові слова: субгауссівська модель, надійність моделі, точність моделі, узагальнений вінерівський процес, статистичне моделювання.

This paper investigates algorithms for simulation of the trajectories of a fractional Brownian motion with given accuracy and reliability. Spectral representation of fractional Brownian motion as random series examines as a model. Estimates of the accuracy and reliability investigated in in functional spaces - $L_2([0,1])$. Given the accuracy of the numbers and simulation algorithms error of Gaussian random variables in the model are used strictly sub-Gaussian random variables. Examples of simulation are represented below. Statistical models of Wiener processes are used in many applications, for example, when calculating the integrals over Wiener process, for the numerical solution of stochastic differential equations, in problems of actuarial mathematics. In problems of statistical modeling to assess the accuracy of the simulation is usually used or evaluation points, or evaluation of weak convergence of distributions. The paper describes the calculations for different values for the accuracy and reliability and simulation results are generalized Wiener process.

*Key Words***:** *simulation, generalized Wiener process, sub-Gaussian random model, accuracy and reliability of model.*

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаінов Д.Я.

Статистичні моделі вінерівських процесів використовуються в багатьох прикладних задачах, наприклад, при обчисленні інтегралів за вінерівськими процесами, при чисельному розв’язанні стохастичних диференційних рівнянь, в задачах актуарної математики. В задачах статистичного моделювання для оцінювання точності моделювання, як правило, використовуються або оцінки моментів, або оцінки слабкої збіжності розподілів [1-2].

В роботах [3-4] досліджувались оцінки точності і надійності моделювання субгауссових випадкових процесів в різних функціональних просторах, що базуються на оцінках швидкості збіжності за ймовірністю. В якості моделі розглядаються спектральні зображення випадкових процесів у вигляді випадкових рядів або інтегралів. В даній роботі досліджується точність і надійність моделювання вінерівського процесу та узагальненого строго субгауссівського вінерівського процесу в нормі простору $L_2([0,1])$.

Означення 1. Узагальненим вінерівським процесом (дробовим броунівським рухом) з індексом Хюрста $\alpha \in (0,1)$ називається гауссівський процес $W_\alpha(t), t \in [0,1]$ такий що $W_\alpha(0) = 0$, $EW_\alpha(t) = 0$ та кореляційною функцією $R_\alpha(t,s) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2\alpha} + |s|^{2\alpha} - |t-s|^{2\alpha}\right)$.

При $\alpha = \frac{1}{2}$ маємо стандартний вінерівський процес. Для моделювання випадкових процесів використаємо представлення процесу у вигляді стохастичного ряду $\xi(t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k$, де $\{X_k\}$ – послідовність незалежних випадкових величин з нульовим середнім та $EX_k^2=\sigma_k^2$. Модель будуємо у вигляді $S_M(t)=\sum_{k=1}^{M} f_k(t) X_k$.

Нехай T - деяка параметрична множина, всі $S_M(t)$ та $\xi(t)$ належать деякому функціональному простору $A(T)$.

Означення 2. Модель $S_M(t)$ наближає процес $\xi(t)$ з заданими точністю $\delta>0$ і надійністю $0<\varepsilon<1$ в нормі функціонального простору $A(T)$, якщо $P\left\{\left\|\xi(t)-S_M(t)\right\|_A>\delta\right\}\leq 1-\varepsilon$.

При реальному моделюванні послідовності $\{X_k\}$ отримуємо, як правило, строго субгауссові випадкові величини.

Клас субгауссових випадкових величин є банаховим. Властивості субгауссових величин досліджувались в роботі [5].

Враховуючи властивості вінерівського процесу [6], будемо розглядати вінерівський процес на відрізку $T=[0,1]$. Вінерівський процес можна представити у вигляді випадкового ряду, так, розклад за власними функціями кореляційного оператора броунівського мосту має вигляд $\xi_1(t)=t\eta_0+\sqrt{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(i\pi t)}{i\pi}\eta_i$, де $\{\eta_0,\eta_1,\eta_2,...\}$ - незалежні стандартні гауссові випадкові величини, $\lambda_i=i\pi$ - власні числа кореляційного оператора. Розклад у ряд Фур'є на $t\in[0,1]$ має вигляд [6]

$$\xi_2(t)=t\eta_0+\sqrt{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\eta_{1i}\frac{\sin(2\pi i t)}{2\pi i}+\eta_{2i}\frac{1-\cos(2\pi i t)}{2\pi i}\right),$$

де $\{\eta_{1i},\eta_{2i}\}$ - незалежні стандартні гауссові випадкові величини.

Оскільки $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i\pi)^2}<\infty$, то якщо в представленнях $\xi_1(t)$ та $\xi_2(t)$ використати строго субгауссові випадкові величини, то отримаємо, що $\xi_1(t)$ та $\xi_2(t)$ є строго субгауссовими випадковими процесами. При моделюванні вінерівський процесів в якості моделі, в залежності від представлення, можна використовувати або модель $S_1(t,M)=t\eta_0+\sqrt{2}\sum_{i=1}^{M}\frac{\sin(i\pi t)}{i\pi}\eta_i$, або модель

$$S_2(t,M)=t\eta_0+\sqrt{2}\sum_{i=1}^{M}\left(\eta_{1i}\frac{\sin(2\pi i t)}{2\pi i}+\eta_{2i}\frac{1-\cos(2\pi i t)}{2\pi i}\right).$$

На основі результатів робіт [3-4] має місце наступна теорема.

Теорема 1. Модель $S_1(t,M)$ наближає процес $\xi_1(t)$ з точністю $\delta>0$ та надійністю $1-\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$ в $L_2([0,1])$, якщо виконуються нерівності $\delta^2>J1_{M+1}$

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\}\frac{\delta}{\sqrt{J1_{M+1}}}\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2J1_{M+1}}\right\}\leq\varepsilon$$

або

$\delta^2>J1_{M+1}$

$$\left(\frac{\delta^2-J1_{M+1}}{J2_{M+1}}+1\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{\delta^2-J1_{M+1}}{2J2_{M+1}}\right\}\leq\varepsilon$$

де $J1_{M+1}=\sum_{i=M+1}^{\infty}\lambda_i^{-2}$ і $J2_{M+1}=\left(\sum_{i=M+1}^{\infty}\lambda_i^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Вінерівський процес з довільним індексом Хюрста можна представити у вигляді ряду [7]

$$W_\alpha(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\sin(x_k t)X_k+b_k(1-\cos(y_k t))Y_k\right), \qquad (1)$$

де $\{X_k,Y_k\}$- незалежні стандартні гауссівські випадкові величини, $\{x_k\}$- дійсні нулі функції Бесселя $J_{-\alpha}(x)$, $\{y_k\}$- дійсні нулі функції Бесселя $J_{1-\alpha}(x)$,

$$a_k=\frac{\pi^\alpha\sqrt{2C}}{x_k^{\alpha+1}J_{1-\alpha}(x_k)},\quad b_k=\frac{\pi^\alpha\sqrt{2C}}{y_k^{\alpha+1}J_{-\alpha}(y_k)},$$

$$C=\frac{\Gamma(2\alpha+1)\sin(\pi\alpha)}{\pi^{2\alpha+1}}.$$

Нехай випадкові величини $\{X_k,Y_k\}$- незалежні строго субгауссові випадкові величини. Розглянемо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2(\sin(x_k t))^2+b_k^2(1-\cos(y_k t))^2\right)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+4b_k^2\right)$$

На основі роботи [8] маємо

$$x_n=\left(n+\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\pi-\frac{4\alpha^2-1}{2\pi(4n+3-2\alpha)}+...$$

$$y_n=\left(n+\frac{5}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\pi-\frac{4(1-\alpha)^2-1}{2\pi(4n+1+2\alpha)}+...,$$ а саме,

$x_n\approx y_n\approx\pi n$ при $n\to\infty$. Для функцій Бесселя $J_\alpha(x)$, $\alpha>-1$ має місце асимптотичне співвідношення $J_{-\alpha}^2(x)+J_{1-\alpha}^2(x)\approx\frac{2}{\pi x}$ для великих x. Тоді для x_n та y_n справедливо $J^2_{1-\alpha}(x_n) \approx \frac{2}{\pi x_n}$ та $J^2_{-\alpha}(y_n) \approx \frac{2}{\pi y_n}$ при $n \to \infty$.

Тому $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + 4b_k^2\right) \approx$

$$\approx \left(\Gamma(2\alpha+1)\sin(\pi\alpha)\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_n^{2\alpha+1}} + \frac{4}{y_n^{2\alpha+1}}\right) < \infty.$$

Отже, випадковий процес $W_\alpha(t)$ в представленні (1), коли $\{X_k, Y_k\}$- незалежні строго субгауссові випадкові величини буде строго субгауссівським випадковим процесом. В якості моделі можна розглядати ряд

$$S_\alpha(t, M) = \sum_{k=1}^{M}\left(a_k \sin(x_k t) X_k + b_k\left(1-\cos(y_k t)\right) Y_k\right),$$

де $\{X_k, Y_k\}$- незалежні строго субгауссові випадкові величини. Оскільки нулі функції Бесселя точно знайти не можемо, то будемо знаходити їх з деякою точністю, це ж відноситься і до коефіцієнтів розкладу. Позначимо наближені значення a_k, b_k, x_k, y_k відповідно $\breve{a}_k, \breve{b}_k, \breve{x}_k, \breve{y}_k$.

Нехай $|a_k - \breve{a}_k| \le h_k^a$, $|b_k - \breve{b}_k| \le h_k^b$, $|x_k - \breve{x}_k| \le h_k^x$, $|y_k - \breve{y}_k| \le h_k^y$.

Де $h_k^a, h_k^b, h_k^x, h_k^y$ точність обчислення. Похибки будемо вважати відомими.

Тоді модель процесу має вигляд

$$\breve{S}_\alpha(t, M) = \sum_{k=1}^{M}\left(\breve{a}_k \sin(\breve{x}_k t) X_k + \breve{b}_k\left(1-\cos(\breve{y}_k t)\right) Y_k\right).$$

А похибка моделювання $\Delta(t)$ буде рівною $\Delta(t) = W_\alpha(t) - \breve{S}_\alpha(t, M)$.

Теорема 2. Модель $\breve{S}_\alpha(t, M)$ наближає процес $W_\alpha(t)$ з точністю $\delta > 0$ та надійністю $1-\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ в нормі простору $L_2([0,1])$, якщо виконуються нерівності

$$\delta^2 > B_M \tag{2}$$

та

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\}\frac{\delta}{\sqrt{B_M}}\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B_M}\right\} \le \varepsilon, \tag{3}$$

де $B_M = \sum\limits_{k=M+1}^{\infty}\left(a_k^2 + 4b_k^2\right) +$

$$+\sum_{k=1}^{M}\left(\left(a_k h_k^x + h_k^a\right)^2 + \left(b_k h_k^y + 2h_k^b\right)^2\right).$$

Доведення. На основі леми 2.5 при $N = 1$ роботи [3] маємо для $\delta > Z_M$

$$P\left\{\left\|W_\alpha(t) - \breve{S}_\alpha(t, M)\right\|_{L_2} > \delta\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{\frac{1}{2}\right\}\left(\frac{\delta}{Z_M}\right)\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2Z_M^2}\right\},$$

де $Z_M^2 = \int\limits_0^1 E\left(W_\alpha(t) - \breve{S}_\alpha(t, M)\right)^2 dt$.

Оцінимо Z_M.

$$E\left(W_\alpha(t) - \breve{S}_\alpha(t, M)\right)^2 =$$

$$= E\left(W_\alpha(t) - S_\alpha(t, M) + S_\alpha(t, M) - \breve{S}_\alpha(t, M)\right)^2 =$$

$$\le E\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}\left(a_k \sin(x_k t) X_k + b_k(1-\cos(y_k t)) Y_k\right)\right)^2 +$$

$$+ E\left(\sum_{k=1}^{M}\left(a_k \sin(x_k t) - \breve{a}_k \sin(\breve{x}_k t)\right) X_k + \right.$$

$$\left. + \left(b_k(1-\cos(y_k t)) - \breve{b}_k(1-\cos(\breve{y}_k t))\right) Y_k \right)^2 \le$$

$$\le E\left(B_1\right)^2 + E\left(B_2\right)^2.$$

Оцінимо кожен доданок. Для першого маємо $E(B_1)^2 \le \sum\limits_{k=M+1}^{\infty}\left(a_k^2 + 4b_k^2\right)$ Для $E(B_2)^2$ отримаємо $E(B_2)^2 \le \sum\limits_{k=1}^{M}\left(a_k \sin(x_k t) - \breve{a}_k \sin(x_k t)\right)^2 +$

$$+ \sum_{k=1}^{M}\left(b_k(1-\cos(y_k t)) - \breve{b}_k(1-\cos(\breve{y}_k t))\right)^2 \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{M}\left(a_k h_k^x t + h_k^a\right)^2 + \sum_{k=1}^{M}\left(b_k h_k^y t + 2h_k^b\right)^2.$$

Проінтегруємо праву частину. Отримаємо необхідну оцінку для Z_M.

При побудові моделей необхідно для заданих точності і надійності та точності обчислення коренів Бесселевих функцій оцінити кількість доданків в моделі.

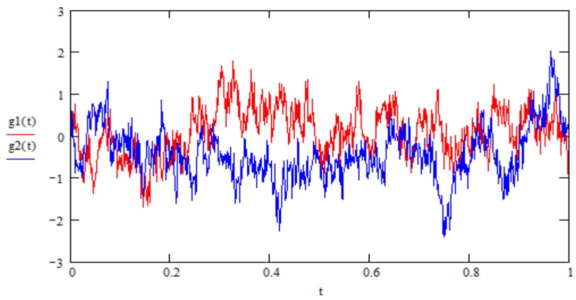

Рис. 1. Реалізація узагальненого субгауссівського вінерівського процесу для $\alpha = 0.2$.

Таблиця 1

Оцінки M для різних точності і надійності

δ	ε	M	h	α
0.1	0.05	150000	0.00002	0.3
0.1	0.05	550	0.0002	0.5
0.05	0.05	2400	0.00007	
0.01	0.05	100000	0.000004	
0.1	0.05	22	0.001	0.8
0.05	0.05	80	0.0006	
0.01	0.05	500	0.00004	
0.01	0.01	700	0.00003	

Нехай $h_k^a = h_k^b = h_k^x = h_k^y = h$.

Значення M необхідно вибирати за формулою $M = \max\{M_1, M_2\}$, де M_1 задовольняє нерівності (2), а M_2 задовольняє нерівності (3).

В таблиці 1 наведені розрахунки для M при різних значеннях точності і надійності.

На рис. 1 представлені результати моделювання для узагальненого субгауссівського вінерівського процесу ($\alpha = 0.2$).

При зростанні α значення M помітно зменшується. Теоретично, при $\alpha \to 1$ процес вироджується в пряму лінію, а реалізації стають більш гладкими.

Список використаних джерел

1. *Ермаков С.М.* Статистическое моделирование / С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов. - Москва: Наука, 1982. - 296с.
2. *Пригарин С.М.* Методы численного моделирования случайных процессов и полей / С. М. Пригарин. - Новосибирск, 2005. - 259с.
3. *Козаченко Ю.В.* Точність моделювання випадкових процесів в нормах просторів Орлича. I / Ю.В. Козаченко, А.О. Пашко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1998, 58. - С.75-90.
4. *Козаченко Ю.В.* Точність моделювання випадкових процесів в нормах просторів Орлича. II / Ю.В. Козаченко, А.О. Пашко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1998, 59. - С.45-60.
5. *Булдыгин В.В.* Метрические характеристики случайных величин и процессов / В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко. - Киев: ТВиМС, 1998. - 289с.
6. *Гихман И.И.* Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – Москва: Наука, 1977. – 570 с.
7. *Dzhaparidze K.O.* A series expansion of fractional Brownian motion / K.O. Dzhaparidze, J.H. Zanten // CWI. Probability, Networks and Algorithms, R0216.
8. *Вигдорович И.И.* Асимптотические разложения корней алгебраических уравнений / И.И. Вигдорович, В.А. Алексин. – М.: МГИУ, 2007. – 38 с.

References

1. ERMAKOV, S. and MIKHAILOV, G. (1982). *Statistical simulations*. Moscow: Nauka, p.296.
2. PRIGARIN, S. (2005). *Methods for numerical simulation of random processes and fields*. Novosibirsk, p.259.
3. KOZACHENKO, Y. and PASHKO, A. (1998). The accuracy of simulation of random processes in Orlicz norms. *Probability theory and mathematical statistics*, 58, pp.75-90.
4. KOZACHENKO, Y. and PASHKO, A. (1999). The accuracy of simulation of random processes in Orlicz norms II. *Probability theory and mathematical statistics*, 59, pp.45-60.
5. BULDYGIN, V. and KOZACHENKO, Y. (1998). *Metric characteristics of random variables and processes*. Kyiv: TViMS, p.289.
6. GIHMAN, I. and SKOROHOD, A. (1977). *Introduction to the theory of stochastic processes*. Moscow: Nauka, p.570.
7. DZHAPARIDZE, K. & ZANTEN,J. (2010) *A series expansion of fractional Brownian motion*. CWI. *Probability, Networks and Algorithms*.R0216.
8. VIGDOROVICH, I. and ALEKSIN, V. (2007) *Asymptotic expansions of the roots of algebraic equations*. Moscow.MGIU, p.38.

Надійшла до редколегії 28.03.14.