УДК 532.59

Потапенко Л.І., к.т.н.,
Стешенко Г.М., к.ф.-м.н.

Чисельне моделювання динамічних процесів в морських водоймах

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д,
e-mail: lpotapenko@ukr.net, grrtt@mail.ru.

L.I. Potapenko, k.t.n.,
G.M. Steshenko, k.f.-m.n.

Numerical simulation of dynamic processes in marine water bodies

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: lpotapenko@ukr.net, grrtt@mail.ru.

В роботі побудована тривимірна нелінійна математична модель гідродинаміки закритих водойм. Ця модель заснована на рівняннях гідродинаміки мілководних водойм. Для запису рівнянь використовувалась σ-система координат. Для розв'язання системи рівнянь побудована неявна різницева схема, для реалізації якої застосовано ітераційний процес, що базується на методах Ньютона та послідовної верхньої релаксації.
Ключові слова: рівняння Нав'є – Стокса, коефіцієнт турбулентного обміну, неявна різницева схема, метод поправки до тиску.

The three-dimensional nonlinear mathematical model of the hydrodynamics of closed water bodies is built in this paper. The model is intended to estimate and forecast of the water environment taking into account effects of wind. This model is based on the equations of hydrodynamics of shallow waters. The governing equations are solved in the sigma coordinate system. To solve the problem using the method of hydrodynamic corrections to the pressure. This method is an additive scheme of splitting on physical processes and ensures the implementation of the mass balance. The Poisson equation used for calculation of pressure distribution. Pressure is calculated so that to enforce continuity equation. The implicit difference scheme is constructed for solving the equations. The iterative process based on Newton's method and successive upper relaxation method is applied to implement this scheme. Considering model is part of computer-modeling complex to prediction of the behavior of interior waters depending on impact of various factors. The architecture of complex allows to configure complex for different objects, particularly reservoirs and interior seas.
Keywords: Navier - Stokes equations, the coefficient of turbulent exchange, implicit difference scheme, the corrections of the pressure method.

Статтю представив д.т.н. Кудін В.І.

Вступ

Метою даної роботи є побудова тривимірної нелінійної математичної моделі гідродинаміки закритих водойм. Модель призначається для оцінки та прогнозування стану водного середовища з урахуванням впливу вітру.

В роботах, які присвячені математичному моделюванню гідродинаміки морських водойм, використовувались як двовимірні так і тривимірні моделі. Двовимірні моделі були застосовані в роботах [1, 2, 3]. Але для більш повного дослідження руху водного середовища бажано використовувати тривимірні моделі. Так, в роботах Сухінова і Чистякова [4, 5] розроблена тривимірна нелінійна математична модель для розрахунку поля швидкостей водного середовища стосовно мілководних водойм. Для чисельного розв'язання гідродинамічної задачі використовувався метод поправки до тиску. В роботі [6] побудована 3D-цифрова модель руху рідини з вільною поверхнею. Модель розроблена за умови присутності гідродинамічного тиску, яку треба враховувати, якщо вертикалне прискорення є значним.

Значна кількість робіт по моделюванню морських водойм присвячена моделюванню динамічних процесів в Азовському морі. Так, в роботах [7, 8] побудована тривимірна нелінійна математична модель, яка дозволяє досліджувати динамічні процеси, що виникають під дією змінного в часі вітру за наявності стаціонарних течій. В роботі [9] побудована 3D-математична модель гідродинаміки Азовського моря. При моделюванні течія подається у вигляді руху двох шарів рідини: верхнього і нижнього. Рух верхнього шару описується рівняннями мілкої води. Рух нижнього шару описується рівняннями гідродинаміки: рівняння кількості руху, рівняння нерозривності, до яких додається рівняння гідростатичного тиску. Вплив вітру враховується в рівняннях верхнього шару.

Побудова математичної моделі

Тривимірна математична модель заснована на нелінійних рівняннях гідродинаміки мілководних водойм [10], які включають в себе рівняння Нав'є – Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial u}{\partial x})+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\nu\frac{\partial u}{\partial z})+\alpha v, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial v}{\partial x})+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial v}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\nu\frac{\partial v}{\partial z})-\alpha u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial w}{\partial x})+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial w}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\nu\frac{\partial w}{\partial z})-g, \quad (3)$$

рівняння неразривності:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \quad (4)$$

Повний гідродинамічний тиск пов'язаний з глибиною співвідношенням

$$P=\rho g(\eta-z)+q, \quad (5)$$

де u, v, w – компоненти вектора швидкості $\overline{V}$, P – повний тиск, q – гідродинамічний тиск, ρ – щільність, α – кутова швидкість обертання Землі, μ та ν – горизонтальна і вертикальна складові коефіцієнта турбулентного обміну, η – обурення рівня поверхні.

Область розв'язку задачі $\Omega=\{x, y\in D, -H(x,y)\le z\le \eta(x,y)\}$,

де D – область поверхні водойма, H – глибина.

Через переважання горизонтального масштабу над вертикальним можна вважати несуттєвою роль горизонтальної турбулентної в'язкості в порівнянні з вертикальною. Тому вважаємо коефіцієнт горизонтального турбулентного обміну μ постійним і приймаємо його значення порядку $10^2-10^3\ \frac{м^2}{c}$. Коефіцієнт вертикального турбулентного обміну ν обчислюється виходячи з моделі Смагоринського [4]:

$$\nu=C_s^2\Delta^2\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{\partial u}{\partial z})^2+(\frac{\partial v}{\partial z})^2}\,. \quad (6)$$

Значення константи C_s змінюється від 0,1 до 0,2, Δ – характерний масштаб сітки по вертикалі.

Граничні умови на вільній поверхні мають вигляд:

$$w\big|_{z=\eta}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+u\frac{\partial\eta}{\partial x}+v\frac{\partial\eta}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\nu\frac{\partial u}{\partial z}\ \big|_{z=\eta}=\tau_{0x},$$

$$\nu\frac{\partial v}{\partial z}\ \big|_{z=\eta}=\tau_{0y}, \quad (8)$$

де $\tau_{0x}=C_a(|\overline{W}|)W_x|\overline{W}|$, $\tau_{0y}=C_a(|\overline{W}|)W_y|\overline{W}|$ – проекції дотичних напружень вектора швидкості вітру $\overline{W}$ на висоті 10 м над рівнем моря, C_a – коефіцієнт поверхневого тертя:

$$C_a(x)=\begin{cases}0{,}0088, & x<6{,}6\frac{м}{c}\\ 0{,}0026, & x\ge 6{,}6\frac{м}{c}\end{cases}$$ – безрозмірний коефіцієнт.

На бічних границях виконується умови прилипання.

На дні $z=-H(x,y)$ виконуються умови:

$$(w+u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y})\ \big|_{z=-H}=0,$$

$$\nu\frac{\partial u}{\partial z}\ \big|_{z=-H}=\tau_{1x}, \quad (9)$$

$$\nu \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=-H} = \tau_{1y},$$

де $\tau_{1x} = C_b u \sqrt{u^2 + v^2}$, $\tau_{1y} = C_b v \sqrt{u^2 + v^2}$, C_b – коефіцієнт донного тертя, який обчислюється за формулою

$$C_b = k^2 \ln^{-2}(\frac{z_2}{z_0}),$$

z_2 – крок по вертикалі в придонному шарі, $z_0 = 0{,}003\,м$ – параметр шорсткості, що характеризує властивості підстилаючої донної поверхні.

У початковий момент часу $(t = 0)$ рух рідини відсутній, а вільна поверхня горизонтальна:

$$u(x,y,z,t) = 0,\ v(x,y,z,t) = 0,$$
$$w(x,y,z,t) = 0,\ \eta(x,y,z,t) = 0. \qquad (10)$$

Система рівнянь, крайових і початкових умов (1)–(10) розвязується в області з вільною поверхнею. Щоб враховувати зміну поверхні в часі для запису рівнянь математичної моделі використовуємо σ-систему координат. Перейдемо від координати z до координати σ за формулою:

$$\sigma = (z - \eta)/(H + \eta). \qquad (11)$$

Тоді система рівнянь (1)–(4) запишеться так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{w}{H+\eta}\frac{\partial u}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial x} - g\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{1}{(H+\eta)^2}\frac{\partial}{\partial \sigma}(\nu\frac{\partial u}{\partial \sigma}) + \alpha v, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{H+\eta}\frac{\partial v}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial y} - g\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{1}{(H+\eta)^2}\frac{\partial}{\partial \sigma}(\nu\frac{\partial v}{\partial \sigma}) - \alpha u, \qquad (13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{w}{H+\eta}\frac{\partial w}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{1}{(H+\eta)^2}\frac{\partial}{\partial \sigma}(\nu\frac{\partial w}{\partial \sigma}), \qquad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{H+\eta}\frac{\partial w}{\partial \sigma} = 0. \qquad (15)$$

Скінченнорізницева модель

Для чисельної реалізації дискретної математичної моделі вводиться сітка $\overline{\omega}_h$, де τ – крок за часом, h_1, h_2, h_3 – кроки за просторовими змінними, $\Delta\sigma$ – крок за координатою σ.

Для розв’язання задачі гідродинаміки використовується метод поправки до тиску. Даний метод являє собою адитивну схему розщеплення по фізичним процесам і гарантує виконання балансу маси (рівняння нерозривності). Згідно методу вихідна модель розбивається на три підзадачі.

В першій підзадачі обчислюються проміжні значення вектора швидкості. Друга підзадача полягає в розрахунку розподілу тиску на основі рівняння Пуассона. Тиск обчислюється таким чином, щоб виконувалось рівняння нерозривності. Третя підзадача коригує значення компонент вектора швидкості на поточному часовому шарі по явними формулами з урахуванням градієнту тиску.

Для обчислення проміжних значень вектора швидкості побудована неявна різницева схема:

$$\frac{\overline{u}_{i+\frac{1}{2}jk} - u_{i+\frac{1}{2}jk}}{\tau} + u_{i+\frac{1}{2}jk}\frac{u_{i+\frac{3}{2}jk} - u_{i-\frac{1}{2}jk}}{2h_1} + v_{i+\frac{1}{2}jk}\frac{u_{i+\frac{1}{2}j+1k} - u_{i+\frac{1}{2}j-1k}}{2h_2} + \frac{w_{i+\frac{1}{2}jk}}{(H_{i+\frac{1}{2}j} + \eta_{i+\frac{1}{2}j})} \times \frac{u_{i+\frac{1}{2}jk+1} - u_{i+\frac{1}{2}jk-1}}{2\Delta\sigma} = \Omega v_{i+\frac{1}{2}jk} - g\frac{\eta_{i+1j} - \eta_{ij}}{h_1} +$$

$$+ \mu(\frac{\overline{u}_{i+\frac{3}{2}jk} - 2\overline{u}_{i+\frac{1}{2}jk} + \overline{u}_{i-\frac{1}{2}jk}}{h_1^2} + \frac{\overline{u}_{i+\frac{1}{2}j+1k} - 2\overline{u}_{i+\frac{1}{2}jk} + \overline{u}_{i+\frac{1}{2}j-1k}}{h_2^2}) +$$

$$+\frac{1}{(H_{i+\frac{1}{2}j}+\eta_{i+\frac{1}{2}j})^2}(\nu_{i+\frac{1}{2}jk+1/2}\frac{\overline{u_{i+\frac{1}{2}jk+1}}-\overline{u_{i+\frac{1}{2}jk}}}{\Delta\sigma^2}-$$

$$-\nu_{i+\frac{1}{2}jk-1/2}\frac{\overline{u_{i+\frac{1}{2}jk}}-\overline{u_{i+\frac{1}{2}jk-1}}}{\Delta\sigma^2}), \qquad (16)$$

$$\frac{\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k}}-v_{ij+\frac{1}{2}k}}{\tau}+u_{ij+\frac{1}{2}k}\frac{v_{i+1j+\frac{1}{2}k}-v_{i-1j+\frac{1}{2}k}}{2h_1}+$$

$$v_{ij+\frac{1}{2}k}\frac{v_{ij+\frac{3}{2}k}-v_{ij-\frac{1}{2}k}}{2h_2}+\frac{w_{ij+\frac{1}{2}k}}{(H_{ij+\frac{1}{2}}+\eta_{ij+\frac{1}{2}})}\times$$

$$\times\frac{v_{ij+\frac{1}{2}k+1}-v_{ij+\frac{1}{2}k-1}}{2\Delta\sigma}=-\Omega u_{ij+\frac{1}{2}k}-g\frac{\eta_{ij+1}-\eta_{ij}}{h_2}+$$

$$+\mu(\frac{\overline{v_{i+1j+\frac{1}{2}k}}-2\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k}}+\overline{v_{i-1j+\frac{1}{2}k}}}{h_1^2}+$$

$$+\frac{\overline{v_{ij+\frac{3}{2}k}}-2\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k}}+\overline{v_{ij-\frac{1}{2}k}}}{h_2^2})+\frac{1}{(H_{ij+\frac{1}{2}}+\eta_{ij+\frac{1}{2}})^2}\times$$

$$\times(\nu_{ij+\frac{1}{2}k+1/2}\frac{\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k+1}}-\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k}}}{\Delta\sigma^2}-,$$

$$-\nu_{ij+\frac{1}{2}k-1/2}\frac{\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k}}-\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k-1}}}{\Delta\sigma^2}), \qquad (17)$$

$$\frac{\overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}}-w_{ijk+\frac{1}{2}}}{\tau}+u_{ijk+\frac{1}{2}}\frac{w_{i+1jk+\frac{1}{2}}-w_{i-1jk+\frac{1}{2}}}{2h_1}+$$

$$+v_{ijk+\frac{1}{2}}\frac{w_{ij+1k+\frac{1}{2}}-w_{ij-1k+\frac{1}{2}}}{2h_2}+\frac{w_{ijk+\frac{1}{2}}}{(H_{i+\frac{1}{2}j}+\eta_{i+\frac{1}{2}j})}\times$$

$$\times\frac{w_{ijk+\frac{3}{2}}-w_{ijk-\frac{1}{2}}}{2\Delta\sigma}=$$

$$=\mu(\frac{\overline{w_{i+1jk+\frac{1}{2}}}-2\overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}}+\overline{w_{i-1jk+\frac{1}{2}}}}{h_1^2}+$$

$$+\frac{\overline{w_{ij+1k+\frac{1}{2}}}-2\overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}}+\overline{w_{ij-1k+\frac{1}{2}}}}{h_2^2})+\frac{1}{(H_{ij}+\eta_{ij})^2}\times$$

$$\times(\nu_{ijk+1}\frac{\overline{w_{ijk+\frac{3}{2}}}-\overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}}}{\Delta\sigma^2}-\nu_{ijk}\frac{\overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}}-\overline{w_{ijk-\frac{1}{2}}}}{\Delta\sigma^2}), \qquad (18)$$

де u, v, w – компоненти вектора швидкості на попередньому часовому шарі, $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ – проміжні значення компонент вектора швидкості.

Апроксимація рівняння нерозривності:

$$\frac{\overline{u_{i+\frac{1}{2}jk}}-\overline{u_{i-\frac{1}{2}jk}}}{h_1}+\frac{\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k}}-\overline{v_{ij-\frac{1}{2}k}}}{h_2}+$$

$$+\frac{1}{(H_{ij}+\eta_{ij})}\frac{\overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}}-\overline{w_{ijk-\frac{1}{2}}}}{\Delta\sigma}=0. \qquad (19)$$

Значення компонент швидкості на $(n+1)$-му шарі по часу знаходимо за формулами:

$$u^{n+1}_{i+\frac{1}{2}jk}=\overline{u_{i+\frac{1}{2}jk}}-\frac{\tau}{\rho h_1}(\mathrm{q}_{\mathrm{i+1jk}}-\mathrm{q}_{\mathrm{ijk}}), \qquad (20)$$

$$v^{n+1}_{ij+\frac{1}{2}k}=\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k}}-\frac{\tau}{\rho h_1}(\mathrm{q}_{\mathrm{ij+1k}}-\mathrm{q}_{\mathrm{ijk}}), \qquad (21)$$

$$w^{n+1}_{ijk+\frac{1}{2}}=\overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}}-\frac{\tau}{\rho h_1}(\mathrm{q}_{\mathrm{ijk+1}}-\mathrm{q}_{\mathrm{ijk}}). \qquad (22)$$

Підставляючи (20)–(22) в (19), одержуємо скінченно-різницеве рівняння Пуассона для тиску:

$$\tau\frac{q_{i+1jk}-2q_{ijk}+q_{i-1jk}}{h_1^2}+\tau\frac{q_{ij+1k}-2q_{ijk}+q_{ij-1k}}{h_2^2}+$$

$$+\frac{\tau}{(H\ +\eta_{ij})^2}\frac{q_{ijk+1}-2q_{ijk}+q_{ijk-1}}{\Delta\sigma^2}==\rho(\frac{\overline{u_{i+\frac{1}{2}jk}}-\overline{u_{i-\frac{1}{2}jk}}}{h_1}+$$

$$+\frac{\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k}}-\overline{v_{ij-\frac{1}{2}k}}}{h_2}+\frac{1}{(H_{ij}+\eta_{ij})}\frac{\overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}}-\overline{w_{ijk-\frac{1}{2}}}}{\Delta\sigma}), \qquad (23)$$

Для обчислення сіткових значень коефіцієнта вертикального турбулентного обміну $\nu_{ijk+1/2}$ та $\nu_{ijk-1/2}$ використовуємо різницевий аналог апроксимації Смагоринського (6):

$$\nu_{ijk+1/2}=(C_s h_3)^2\sqrt{(\frac{u_{ijk+1}-u_{ijk-1}}{h_3})^2+(\frac{v_{ijk+1}-v_{ijk-1}}{h_3})^2}\ .$$

Для чисельної реалізації різницевої схеми (16)–(18) використовується ітераційний процес.

Чисельна реалізація різницевої схеми

Різницева схема (11)–(14) є неявною. Вона представляє собою систему нелінійних різницевих рівнянь. Для її розв'язання використовується ітераційний процес, який базується на методах Ньютона та послідовної верхньої релаксації [11].

Для побудови ітераційного процесу запишемо різницеві рівняння (11)–(13) у вигляді:

$$F_1(\overline{u}_{i+\frac{1}{2}jk},\overline{u}_{i-\frac{1}{2}jk},\overline{u}_{i+\frac{3}{2}jk},\overline{u}_{i+\frac{1}{2}j-1k},\overline{u}_{i+\frac{1}{2}j+1k},\overline{u}_{i+\frac{1}{2}jk-1},\overline{u}_{i+\frac{1}{2}jk+1})=0,$$

$$F_2(\overline{v}_{ij+\frac{1}{2}k},\overline{v}_{i-1j+\frac{1}{2}k},\overline{v}_{i+1j+\frac{1}{2}k},\overline{v}_{ij-\frac{1}{2}k},\overline{v}_{ij+\frac{3}{2}k},\overline{v}_{ij+\frac{1}{2}k-1},\overline{v}_{ij+\frac{1}{2}k+1})=0,$$

$$F_3(\overline{w}_{ijk+\frac{1}{2}},\overline{w}_{i-1jk+\frac{1}{2}},\overline{w}_{i+1jk+\frac{1}{2}},\overline{w}_{ij-1k+\frac{1}{2}},\overline{w}_{ij+1k+\frac{1}{2}},\overline{w}_{ijk-\frac{1}{2}},\overline{w}_{ijk+\frac{3}{2}})=0.$$

Тоді ітераційний процес для розв'язання рівнянь (16)–(18) запишеться у вигляді:

$$\overline{u^{s+1}_{i+\frac{1}{2}jk}}=\overline{u^{s}_{i+\frac{1}{2}jk}}-\varpi\frac{F_1}{F_{11}},$$

$$\overline{v^{s+1}_{ij+\frac{1}{2}k}}=\overline{v^{s}_{ij+\frac{1}{2}k}}-\varpi\frac{F_2}{F_{21}},$$

$$\overline{w^{s+1}_{ijk+\frac{1}{2}}}=\overline{w^{s}_{ijk+\frac{1}{2}}}-\varpi\frac{F_3}{F_{31}},$$

де
$$F_{11}=1+2\tau\mu\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)+$$

$$+\frac{\tau}{(H_{i+\frac{1}{2}j}+\eta_{i+\frac{1}{2}j})^2}\frac{\nu_{i+\frac{1}{2}jk+\frac{1}{2}}+\nu_{i+\frac{1}{2}jk-\frac{1}{2}}}{\Delta\sigma^2},$$

$$F_{21}=1+2\tau\mu\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)+$$

$$+\frac{\tau}{(H_{ij+\frac{1}{2}}+\eta_{ij+\frac{1}{2}})^2}\frac{\nu_{ij+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}}+\nu_{ij+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}}}{\Delta\sigma^2},$$

$$F_{31}=1+2\tau\mu\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)+$$

$$+\frac{\tau}{(H_{ij}+\eta_{ij})^2}\frac{\nu_{ijk+1}+\nu_{ijk}}{\Delta\sigma^2},$$

$0<\varpi<1$, s – номер ітерації.

Для побудови ітераційного процесу розв'язування різницевої схеми для тиску запишемо рівняння (23) у вигляді

$$F_4(q_{ijk},q_{i-1jk},q_{i+1jk},q_{ij-1k},q_{ij+1k},q_{ijk-1},q_{ijk+1})=0,$$

де $F_4(q_{ijk},q_{i-1jk},q_{i+1jk},q_{ij-1k},q_{ij+1k},q_{ijk-1},q_{ijk+1})=$

$$\frac{q_{i+1jk}-2q_{ijk}+q_{i-1jk}}{h_1^2}+\frac{q_{ij+1k}-2q_{ijk}+q_{ij-1k}}{h_2^2}+$$

$$+\frac{1}{(H_{ij}+\eta_{ij})^2}\frac{q_{ijk+1}-2q_{ijk}+q_{ijk-1}}{\Delta\sigma^2}-\frac{\rho}{\tau}\left(\frac{\overline{u}_{i+\frac{1}{2}jk}-\overline{u}_{i-\frac{1}{2}jk}}{h_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\overline{v}_{ij+\frac{1}{2}k}-\overline{v}_{ij-\frac{1}{2}k}}{h_2}+\frac{1}{(H_{ij}+\eta_{ij})}\frac{\overline{w}_{ijk+\frac{1}{2}}-\overline{w}_{ijk-\frac{1}{2}}}{\Delta\sigma}\right).$$

Розглянута модель є складовою частиною комп'ютерно-моделюючого комплекса для передбачення поведінки внутрішніх водойм в залежності від впливу різноманітних факторів. Архітектура комплекса дозволяє налаштовувати його на різні об'єкти, зокрема водосховища та внутрішні моря. Зараз здійснюється налаштування програмного забезпечення для умов Азовського моря.

Список використаних джерел

1. Еремеев В.Н. Моделирование длинных волн в Азовском море, вызываемых прохождением циклонов / В.Н. Еремеев, А.В. Коновалов, Ю.В. Манилюк, Л.В. Черкесов // Океанология. – 2000. – 40. – №5 – С. 658-665.

2. Крукиер Л.А. Математическое моделирование гидродинамических

References

1. YEREMEIEV, V., KONOVALOV, A. and MANILIUK, YU. (2000) Modelirovanie dlinnyikh voln v Azovskom more, vyizyivaemyikh prokhozhdeniem tsiklonov. In *Okeanologia.* 40(5). pp. 658-665.
2. KRUKIER, L. (2000) Matematicheskoie modelirovanie hidrodinamicheskikh protsessov v Azovskom more.

гидродинамических процессов в Азовском море / Л.А. Крукиер // Закономерности океанографических и биологических процессов в Азовском море – Апатиты: Изд-во КНУ РАН. – 2000. – С.129-163.

3. Chang Y.S. Suspended sediment hydrodynamics above mildly sloped long wave ripples / Y.S. Chang, D.M. Hanes // Journal of Geophysical Research – 2004, vol.109, C07022, doi 10.029/2003, JC001900.

4. Сухинов А.И. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе / А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, Е.В. Алексеенко // Математическое моделирование. – 2011. – 23, №3. – С. 3-21.

5. Сухинов А.И. Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе / А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков // Вычислительные методы и программирование. – 2012. – 13. – С. 290-297.

6. Kocyigit M.B. Three-dimensional Numerical Modelling of Free Surface Flows With Non-hydroststic Pressure / M.B. Kocyigit // Teknik Dergi, vol.16, No. 1, 2005, pp. 3405-3424.

7. Иванов В.А. Исследование влияния циклических возмущений на динамические процессы и эволюции примеси в Азовском море / В.А. Иванов, В.В. Фомин, Л.В. Черкесов, Т.Я. Шульга // Морской геофизический журнал. – 2009. – №2. – С. 12-25.

8. Иванов В.А. Исследование влияния ветрового воздействия на течение и распространения примеси в Азовском море / В.А. Иванов, В.В. Фомин, Л.В. Черкесов, Т.Я. Шульга // Морской геофизический журнал. – 2010. – №3. – С. 15-28.

9. Чикин А.Л. Построение и численное исследование 3D-модели гидродинамики Азовского моря / А.Л. Чикин // Труды Междунардной конференции RDAMM-2001. – 2001. –6. Ч.2. спец. выпуск. С. 686-690.

10. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц – М.: Наука. – 1986. – 736 с.

11. Дж. Ортега Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега., В. Рейнболдт – М.: Мир. – 1975. – 560 с.

In *Zakonomernosti okeanograficheskikh i biologicheskikh protsessov v Azovskom more.* Apatityi: Izdatelstvo KNU RAN. pp. 129-163

3. CHANG, Y. and HANES, D. (2004) Suspended sediment hydrodynamics above mildly sloped long wave ripples In *Journal of Geophysical Research*, vol.109, C07022, doi 10.029/2003, JC001900.

4. SUKHINOV, A., CHISTIAKOV, A. and ALEKSEIENKO, E. (2011) Chislennaia realizatsia trekhmernoy modeli hidrodinamiki dlia melkovodnyikh vodoiemov na supervyichislitelnoy sisteme. In *Matematicheskoie modelirovanie.* 12(3). pp. 3-21.

5. SUKHINOV, A. and CHISTIAKOV, A. (2012) Parallelnaia realizatsia trekhmernoy modeli hidrodinamiki dlia melkovodnyikh vodoiemov na supervyichislitelnoy sisteme. In *Vyichislitelnyie metodyi i programmirovanie.* 13. pp. 290-297.

6. KOCYIGIT, M. (2005) Three-dimensional Numerical Modelling of Free Surface Flows With Non-hydroststic Pressure In *Teknik Dergi.* 16(1). pp. 3405-3424.

7. IVANOV, V., FOMIN, L., CHERKESOV, L. and SHULGA, T. (2009) Issledovanie vliyaniya tsiklicheskikh vozmushcheniy na dinamicheskie protsessyi i evoliutsii primesi v Azovskom more. In *Morskoy geofizicheskiy zhurnal*. 2. pp. 12-25.

8. IVANOV, V., FOMIN, L., CHERKESOV, L. and SHULGA, T. (2010) Issledovanie vliyaniya vetrovogo vozdeystviya na techenie i rasprostraneniya primesi v Azovskom more. In *Morskoy geofizicheskiy zhurnal*. 3. pp. 15-28.

9. CHIKIN, A. (2001) Postroienie i chislennoie issledovanie 3D-modeli hidrodinamiki Azovskoho moria. In *Trudyi Mezhdunarodnoy konferentsii RDAMM-2001.* 6(2). Spets. vyipusk. pp. 686-690.

10. LANDAU, L. and LIVSHITS, E. (1986). *Hidrodinamika*. Moskva: Nauka.

11. ORTEGA, D. and REYNBOLDT, V. (1975). *Iteratsionnyie metodyi resheniya nelineynyikh system uravneniy so mnohimi neizvestnyimi*. Moskva: Mir.

Надійшла до редколегії 17.04.14