УДК 004.021 + 004.023 + 515.125

Фісуненко А. Л.[1], аспірант

Діаграма еквівалентності зіркових розбиттів та генерація простих многокутників

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: alf.via @ gmail.com

A. L. Fisunenko[1], PhD student

An Equivalence Diagram of Star Partitioning and Simple Polygons Generation

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: alf.via @ gmail.com

В статті розглядається спосіб побудови множини опорних точок для евристичного алгоритму генерації простих многокутників на заданій скінченій множині точок на площині.
Ключові слова: простий многокутник, зіркове розбиття, діаграма еквівалентності.

In this paper we consider a way of constructing the set of reference points for the heuristic algorithm of simple polygons generation for a given point set in the plane. It is shown that the introduced equivalence diagram of star partitioning of the point set answers the previously set and left open question regarding finite set of reference points for the simple polygon generation algorithm of cutting out and attaching convex hulls. In combination with mentioned generation algorithm the presented construction allows to introduce an approximation method of searching polygon constrained by the certain criterion. The proposed diagram allows to eliminate asymmetry of polygons generated by the algorithm of cutting out and attaching convex hulls by applying it to the separate triangular segments built on edges of the convex hull of the point set. Since the introduced equivalence diagram contains information on intersections of segments between points of given set it can be used for speeding up computations for many algorithms utilizing this construction in particular for different methods of generating simple polygons.
Key Words: simple polygon, generation, star partitioning, equivalence diagram.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А. В.

Вступ

Постановка проблеми. Дано $S=\{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$ – множина точок на площині, $N>3$ та усі точки у загальній позиції, тобто будь-які три точки з S не належать одній прямій. Задача полягає в побудові ефективного алгоритму для а) підрахунку усіх можливих простих многокутників; б) генерації простих многокутників з певними властивостями на заданій множині точок S. Усі точки множини S повинні бути вершинами отриманих многокутників.

Аналіз досліджень. В [1] запропоновано евристичний наближений алгоритм генерації многокутників вирізанням та нарощуванням опуклих оболонок. Але в [1] у якості відкритого питання залишено спосіб побудови множини опорних точок, на основі яких працює алгоритм. Представлена стаття надає відповідь на поставлене питання, пропонуючи таке розбиття заданої множини точок, яке дає однозначно визначену скінчену множину областей еквівалентності для вибору опорних точок.

Актуальність. Задача генерації многокутників на заданій множині точок має як суто теоретичне значення (є одною з відкритих проблем обчислювальної геометрії), так і практичне застосування - насамперед, перевірка коректності алгоритмів, що оперують многокутниками.

Новизна роботи полягає в застосуванні діаграми еквівалентності зіркових розбиттів для однозначного вибору множини опорних точок, на яких ґрунтується генерація простих многокутників та пошук серед них тих, що відповідають певним властивостям.

© А.Л.Фісуненко, 2014

Зіркове розбиття та діаграма еквівалентності

В розділі детально розглядається конструкція, яка є окремим випадком розбиття, що оглядово описане в [2] та застосовано для розв'язання задачі переліку усіх зіркових многокутників для заданої множини точок ("Star Universe").

Для будь-якої пари точок обираються промені, що утворюються прямою, яка проходить через ці дві точки, виключаючи відрізок між ними. Перетин променів з опуклою оболонкою $CH(S)$ утворює множину відрізків. Розбиття, що породжується всіма обмежуючими відрізками, визначає усі ядра зіркових многокутників. Окрім випадку зіркових многокутників, ця конструкція має корисні властивості для генерації інших конфігурацій многокутників.

Розглянемо окремий випадок вказаного розбиття, відкидаючи відрізки, які визначені прямими між внутрішніми точками множини і надаючи наступні формальні означення.

Означення 2.1. Нехай p_0 - внутрішня точка $CH(S)$ та $T_i(p_0)$ – трикутник, що визначається внутрішньою точкою p_0 та вершинами i-го ребра $CH(S)$; $p_0 \notin CH(S) \wedge p_0 \notin S$; ***зірковим розбиттям*** $\prod(S, p_0)$ множини точок на площині S є

$$\prod(S, p_0)=\{S_i(p_0): \forall i=1..h\ S_i(p_0)\in T_i(p_0) \wedge S_i(p_0)\subset S\},$$

де h – кількість вершин опуклої оболонки $CH(S)$.

Так, наприклад,

Рис. **1** показує множину точок на площині $S=\{p_1, p_2, \ldots, p_6\}$ та її зіркове розбиття $\prod(S, p_0)=\{S_1, S_1, S_3\}$, де $S_1=\{p_5\}$, $S_2=\{p_6\}$, $S_3=\{p_4\}$. Трикутники, що утворюються на ребрах E_1, E_2, E_3: $T_1(p_0)=\Delta p_1p_2p_0$, $T_2(p_0)=\Delta p_2p_3p_0$, $T_3(p_0)=\Delta p_1p_0p_3$.

Означення 2.2. Припустимо $p^1_0 \neq p^2_0$; будемо казати, що два зіркові розбиття $\prod_1(S, p^1_0)$ та $\prod_2(S, p^2_0)$ еквівалентні тоді, та тільки тоді, коли $S_i(p^1_0)=S_i(p^2_0)$, $\forall i=1..h$.

Означення 2.3. Геометричне місце точок на площині $R_k(S)$ називається областю еквівалентності зіркового розбиття, якщо: $\forall p^1_0, p^2_0$: $p^1_0 \in R_k(S)$ та $p^2_0 \in R_k(S)$ відповідні зіркові розбиття $\prod_1(S, p^1_0)$ та $\prod_2(S, p^2_0)$ є еквівалентними.

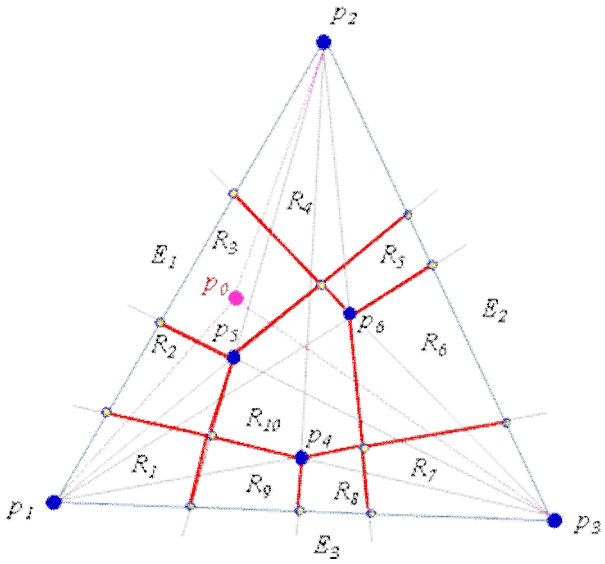

Рис. 1. Приклад зіркового розбиття з 10 областями еквівалентності для множини з 6 точок.

Зробимо наступні позначення та припущення.

1. $\{p_{CH(1)}, \ldots, p_{CH(h)}\}\subset S$ - множина усіх вершин опуклої оболонки $CH(S)$;

2. $S\backslash CH(S)=\{p_{I(1)},\ldots p_{I(N-h)}\}\subset S$ – множина усіх внутрішніх точок; розглядаємо тільки не вироджені випадки: $N-h>0$;
3. $r(S,i,j)$ - промінь на прямій $p_{I(i)}p_{H(j)}$, що випущений з внутрішньої точки $p_{I(i)}$ у напрямку, який протилежний вершині $p_{H(j)}$;
4. $A(S,i,j)$ – кут, що утворюється променями $r(S,i,j)$ та $r(S,i,j+1)$ або $r(S,i,0)$, якщо $j=h$.

Лема 2.1. Області, що утворені перетином опуклої оболонки множини точок S *та множиною усіх променів* $r(S,i,j)$ $(i=1,\ldots,N-h,\ j=1,\ldots,h;\ h>2;\ N-h>1)$ *є опуклими многокутниками.*

Доведення: Усі кути $A(S,i,j)$ є опуклими множинами. Перетин опуклих множин – опукла множина.

Застосовуємо почергово для всіх внутрішніх точок та усіх можливих кутів наступне. Обираємо $A(S,i,j)$ та робимо перетин по парах: $A(S,i,j)\cap A(S,m,n)$, where $m\neq i$, $n=1,\ldots,h$. Кінцевий результат – непорожня опукла область, оскільки за умовами Леми 2.1 $h>2$; $N-h>1$ та існує принаймні один промінь кута $A(S,m,n)$, що перетинає один з променів $A(S,i,j)$. Останнє витікає з того, що кожен з h променів, що виходить з кожної внутрішньої точки лежить на прямій, яка визначена цією точкою та вершиною опуклої оболонки $CH(S)$.

Перетинаючи отримані області по парах з опуклою оболонкою $CH(S)$, отримаємо обмежені опуклі області $R_k(S)$. Тобто $R_k(S)$ опуклі многокутники ■.

Зазначимо, що $\boldsymbol{k}$ попарних перетинів $\boldsymbol{n}$ відрізків на площині можуть бути обчислені за час $O(\boldsymbol{n}\log\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k})$; час виконання є оптимальним, вимоги по пам'яті $O(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k})$. Ця теорема була доведена Chazelle and Edelsbrunner ([3], Theorem 5). Очевидно, що у випадку розбиття, що розглядається, $\boldsymbol{n}=h(N-h)$.

Означення 2.4. Припустимо наступне: $R(S)=\{R_1(S),\ldots,R_K(S)\}$ – множина опуклих многокутників, яка отримана процедурою, що використана в доведенні Леми 2.1. Множину $R(S)$ будемо називати **діаграмою еквівалентності** множини точок S.

Теорема 2.1. *Кожен опуклий многокутник* $R_k(S)$ *є областю еквівалентності зіркового розбиття* $\prod(S,p_0)$ *для будь-якої точки* $p_0\in R_k(S)$.

Доведення: Беремо опуклу область $R_k(S)$ та довільні дві точки $p^1{}_0\in R_k(S)$, $p^2{}_0\in R_k(S)$, $p^1{}_0\neq p^2{}_0$ та припустимо протилежне. Тоді $\prod_1(p^1{}_0)$ та $\prod_2(p^2{}_0)$ не є еквівалентними: $\exists i$: $S_i(p^1{}_0)\neq S_i(p^2{}_0)$.

Трикутники $T_i(p^1{}_0)\neq T_i(p^2{}_0)$ мають спільне i-е ребро опуклої оболонки $CH(S)$. Оскільки $p^1{}_0$ та $p^2{}_0$ – внутрішні точки, перетин $T_i(p^1{}_0)\cap T_i(p^2{}_0)$ є не порожньою множиною (трикутником). Множини $T_i(p^1{}_0)\backslash T_i(p^2{}_0)$ та $T_i(p^2{}_0)\backslash T_i(p^1{}_0)$ є, також, трикутниками.

Єдиний спосіб задовольнити наше припущення $S_i(p^1{}_0)\neq S_i(p^2{}_0)$ – це прийняти, що

$$\exists p_j\in S:\quad p_j\in T_i(p^1{}_0)\backslash T_i(p^2{}_0)\quad\text{або}\quad p_j\in T_i(p^2{}_0)\backslash T_i(p^1{}_0).$$

Випускаємо промені із загальних вершин трикутників $T_i(p^1{}_0)$ і $T_i(p^2{}_0)$ через точку p_j.

Точки $p^1{}_0$ та $p^2{}_0$ лежать на протилежних сторонах одного з цих променів. Цей поділяючий промінь виходить з вершини опуклої оболонки $CH(S)$ через внутрішню точку p_j (див.

Рис. **2**). З Леми 2.1 витікає, що цей промінь визначає границю однієї з опуклих областей.

Це означає, що відрізок між $p^1{}_0$ та $p^2{}_0$ перетинає границю опуклої області. Але це суперечить опуклості $R_k(S)$, що доводить теорему ■.

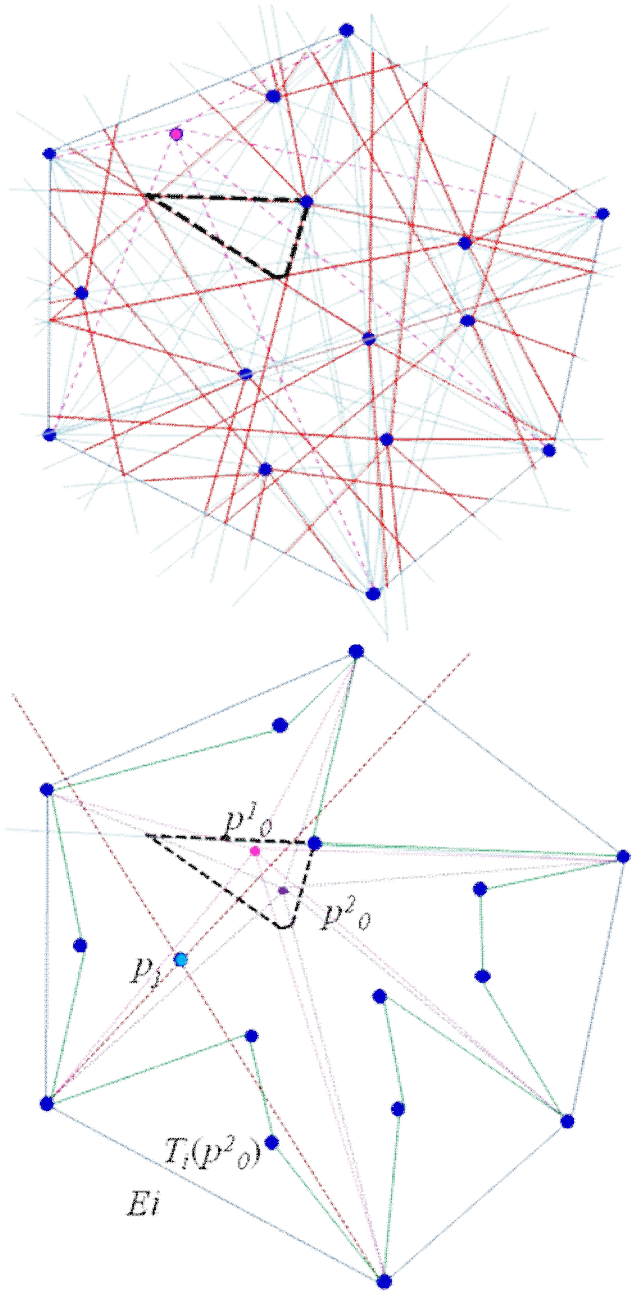

Рис. 2. Ілюстрація для доведення Теореми 2.1 та її Наслідку 2.1.

Припустимо, що обрана будь-яка внутрішня точка p_0 області еквівалентності $R_k(S)$. Оберемо будь-який трикутник $T_i(p_0)$ зіркового розбиття $\prod(S, p_0)$. Легко бачити, якщо підмножина Si не є порожньою (тобто, існує принаймні одна точка) тоді усі можливі прості ланцюги (тобто ті, що не мають само-перетинів), які починаються та закінчуються на кінцях ребра i, що є основою трикутника, не залежить від точки p_0 доки вона залишається всередині області еквівалентності $R_k(S)$ (

Рис. **2**). Ця властивість напряму витікає з означення областей еквівалентності та Теореми 2.1. Таким чином, ми можемо сформулювати наступний наслідок.

Наслідок 2.1. Припустимо, що Ei – ребро опуклої оболонки $CH(S)$; $\prod(S, p_0)$ – зіркове розбиття множини точок S; $R_k(S)$ – області еквівалентності: $R_k(S) \subset R(S)$; тоді множина усіх простих ланцюгів, що побудована на кінцях Ei та внутрішніх точках, та, відповідно множина усіх простих многокутників, які є об'єднанням усіх цих ланцюгів $i=1..h$, є однаковими $\forall p_0 \in R_k(S)$.

Комбінація з алгоритмом вирізання та нарощування опуклих оболонок

Основна процедура, що описана в [1] дає «асиметричні» конфігурації многокутників. Для вирішення цієї проблеми можливо застосування діаграми еквівалентності та алгоритму [1] наступним чином.

На першому кроці будується діаграма еквівалентності для заданої множини точок S. Потім обирається точка p^k_0 всередині кожної з областей $R_k(S)$ діаграми еквівалентності $R(S)$. Нагадуємо, шо згідно доведеної Теореми 2.1 та її Наслідку 2.1 ця точка може обиратися довільно. Наприклад, це може бути центр мас будь-яких трьох вершин області $R_k(S)$; оскільки $R_k(S)$ – опуклий многокутник, то така точка завжди всередині $R_k(S)$.

Точка p^k_0 визначає зіркове розбиття $\prod(S, p^k_0)$. Для кожного з трикутників $T_i(p_0)$ $i=1,\ldots,h$ розбиття $\prod(S, p^k_0)$ повторюємо наступні кроки. Перевіряємо, чи містить трикутник $T_i(p_0)$ внутрішні точки. Беремо грань E_i опуклої оболонки $CH(S)$, що є одночасно основою трикутника $T_i(p_0)$ та застосовуємо процедуру вирізання та нарощування оболонок [1]. Об'єднання ланцюгів, що побудовані на гранях Ei - простий многокутник.

Для вирішення оптимізаційних задач наближеним методом, таких як пошук многокутника мінімальної площини, виконуємо описані вище кроки для кожного з областей $R_k(S)$

діаграми еквівалентності $R(S)$, застосовуючи відповідний критерій відбору.

Висновки

В роботі надано відповідь на відкрите питання щодо способу побудови опорних точок для евристичного оптимізаційного алгоритму вирізанням та нарощуванням опуклих оболонок. Показано, що у якості основного способу отримання множини опорних точок може використовуватися діаграма еквівалентності зіркових розбиттів, побудова якої базується на одному із алгоритмів перетину відрізків. Інформація про перетини відрізків може додатково використовуватися на подальших кроках генерації простих многокутників для перевірки самоперетинів, що підвищує загальну ефективність алгоритму.

Список використаних джерел

1. *Фісуненко А. Л.* Генерація простих многокутників вирізанням та нарощуванням опуклих оболонок / А. Л. Фісуненко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія фізико-математичні науки. – 2013. -спецвипуск. – С. 190-193.
2. *Auer T.* Heuristics for the generation of random polygons / *T. Auer, M. Held* // In Proceedings of the 8th Canadian Conference on Computational Geometry, Ottawa, Ontario. – 1996. – P. 38-43.
3. *Chazelle B.* An Optimal Algorithm for Intersecting Line Segments in the Plane. / *B. Chazelle, H. Edelsbrunner* // Journal of the Association for Computing Machinery. Vol. 39. No. 1, – 1992. – P.1-54.

References

1. FISUNENKO A. L. (2013) Generation of simple polygons by cutting out and building up convex hulls. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics, Spetsvypusk, pp. 190-193.
2. AUER T., HELD, M. (1996) Heuristics for the generation of random polygons. In Proceedings of the 8th Canadian Conference on Computational Geometry, Monday August 12, 1996. Ottawa, Ontario. pp.38-43.
3. CHAZELLE, B., EDELSBRUNNER, H. (1992) An Optimal Algorithm for Intersecting Line Segments in the Plane. Journal of the Association for Computing Machinery. Vol. 39. No. 1, pp.1-54.

Надійшла до редколегії 29.05.2014