УДК 519.21

В.В.Томашик[1], аспірант
Г.М. Шевченко[1], к. ф.-м. н., доцент

Збіжність моментів досягнення меж смуги в дифузійних моделях зі стрибками та неліпшицевою дифузією

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська 64, e-mail: vladdislav@gmail.com

V.V.Tomashyk[1], Ph.D. student
G.M. Shevchenko[1], Ph.D., Associate Prof.

Convergence of hitting times in diffusion models with jumps and non-Lipschitz diffusion

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64,
e-mail: vladdislav@gmail.com

Для процесів, породжених стохастичними диференціальними рівняннями зі стрибками та неліпшицевою дифузією, за умови збіжності коефіцієнтів встановлено збіжність моментів досягнення процесами меж смуги.

Ключові слова: дифузійний процес зі стрибками, стохастичне диференціальне рівняння, момент досягнення, пуассонівська міра.

For the processes modeled by stochastic differential equations with non-Lipschitz diffusion and jumps generated by Poisson measure in the case of convergence of the coefficients we study limit behavior of hitting times. The Yamada condition on diffusion coefficients together with condition of continuity of the distribution for jumps of the process are assumed. We have established the convergence in probability of hitting times for the pre-limit processes to the hitting time for the limit process on both finite and infinite time intervals. As auxiliary result we have shown the robustness of the hitting times with respect to the bounds of the interval. The example which shows the necessity of the condition of continuity of the distribution of jumps is given.

Key Words: diffusion process with jumps, stochastic differential equation, hitting time, Poisson measure.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф.Козаченко Ю.В.

1 Вступ

В роботі для процесів, породжених СДР зі стрибками та неліпшицевою дифузією, за умови збіжності коефіцієнтів та початкових умов досліджується збіжність моментів досягнення процесами меж деякої смуги. В якості допоміжних результатів встановлено стійкість відносно меж смуги моментів досягнення процесами меж смуги. Дослідження роботи доповнюють та продовжують дослідження, проведені в [1, 2]

2 Основні означення та умови

Нехай $(\Omega, F, \{F_t, t \geqslant 0\}, P)$ – повний ймовірнісний простір з фільтрацією, що задовольняє стандартні умови. Розглянемо послідовність СДР

$$X_n(t) = X_n(0) + \int_0^t b_n(X_n(s))ds + \int_0^t \sigma_n(X_n(s))dW(s) + \int_0^t \int f_n(X_n(s), \theta)\mu(d\theta, ds), \tag{1}$$

де $n \geqslant 0, t \geqslant 0$, початкові умови $X_n(0)$ є F_0-вимірними, коефіцієнти $b_n,\ \sigma_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – вимірні, $\{W(t),\ t \geqslant 0\}$ – вінерів процес відносно фільтрації $\{F_t, t \geqslant 0\}$, міра $\mu(d\theta, dt)$ є пуассоновою мірою, для якої $E\mu(d\theta, dt) = \nu(d\theta)dt$, причому $\nu(\mathbf{R}) < \infty$.

Припустимо, що виконуються наступні умови на коефіцієнти та початкові умови рівнянь (1)

$(\mathrm{Y}1_n)$ для всіх $\gamma > 0$ $\sup_{n\geqslant 0} E[|X_n(0)|^\gamma] < \infty$;

$(\mathrm{Y}2_n)$ умова лінійного зростання:

$$|b_n(x)| + |\sigma_n(x)| \leqslant L(1 + |x|),\ x \in \mathbf{R};$$

(Y3$_n$) умова Ліпшиця на коефіцієнт b_n:

$$|b_n(x) - b_n(y)| \leqslant L|x-y|,\ x, y \in \mathbf{R};$$

(Y4$_n$) умова Ямада: існує така строго зростаюча функція $\rho_n : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, що $\int_{0^+} \rho_n^{-2}(u)du = \infty$ та виконується нерівність

$$|\sigma_n(x) - \sigma_n(y)| \leqslant \rho_n(|x-y|),\ x, y \in \mathbf{R}.$$

(Y5$_n$) коефіцієнт $f_n(x, \theta)$ обмежений, неперервний за x для майже всіх θ за мірою $\nu(d\theta)$ та виконується

$$\int_{\mathbf{R}} |f_n(x,\theta) - f_n(y,\theta)|^2 \nu(d\theta) \leqslant$$
$$\leqslant L|x-y|^2, x, y \in \mathbf{R}.$$

Також сформулюємо наступні умови щодо збіжності коефіцієнтів та початкових умов.

(U1$_n$) Для всіх $\gamma > 0$ має місце збіжність початкових умов $E[X_n(0) - X_0(0)]^\gamma \to 0, n \to \infty$;

(U2$_n$) для всіх $x \in \mathbf{R}, \theta \in \mathbf{R}$ має місце збіжність коефіцієнтів $b_n(x) \to b_0(x), \sigma_n(x) \to \sigma_0(x),\ f_n(x,\theta) \to f_0(x,\theta),\ n \to \infty$.

3 Допоміжні результати

Наступні результати щодо процесів X_n з (1) встановлено в [2].

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти стохастичного диференціального рівняння (1) задовольняють умови* (Y1$_n$)–(Y5$_n$)*. Тоді для всіх $t \geqslant 0$ та $\gamma > 0$ існує така стала C_γ, незалежна від n, що $E|X_n(t)|^\gamma < [E|X_n(0)|^\gamma + C_\gamma \cdot t] \cdot \exp[C_\gamma \cdot t]$.*

Теорема 2. *Нехай для послідовності стохастичних диференціальних рівнянь (1) виконануються умови* (Y1$_n$)–(Y5$_n$) *та* (U1$_n$)–(U2$_n$)*. Тоді для $T > 0,\ \varepsilon > 0$ має місце збіжність*

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0,\ n \to \infty.$$

Позначимо через L_t – процес Леві, що відповідає мірі $\mu(d\theta, dt)$. Оскільки $\nu(\mathbf{R}) < \infty$, то L_t є складним процесом Пуассона вигляду

$$L_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \theta\mu(d\theta, dt) = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k,$$

де $N_t = \mu([0,t] \times \mathbf{R})$ є процесом Пуассона з інтенсивністю $\nu(\mathbf{R})$. Прирости ξ_k є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами з функцією розподілу

$$F_\xi(t) = \frac{\nu((-\infty, t))}{\nu(\mathbf{R})}.$$

Позначимо через $\tau_i,\ i > 0$ – i-тий момент стрибків процесу L_t.

Для $t \geqslant 0, s \geqslant 0, x \in \mathbf{R}$ позначимо через $\phi_n(t, s, x)$ значення процесу X_n з (1) в момент часу t за виконання умов

(1) для $x \in \mathbf{R}, \theta \in \mathbf{R}$ коефіцієнт $f_n(x, \theta) = 0$;

(2) в момент s має місце $X_n(s) = x$.

Процес X_n має вигляд

$$X_n(t) = \phi_n(t, 0, X_n(0)), t \in [0, \tau_1);$$
$$X_n(\tau_1) = X_n(\tau_1-) + f_n(X_n(\tau_1-), \xi_1);$$
$$\dots$$
$$X_n(t) = \phi_n(t, \tau_{k-1}, X_n(\tau_{k-1})), t \in (\tau_{k-1}, \tau_k), k \geqslant 2,$$
$$X_n(\tau_k) = X_n(\tau_k-) + f_n(X_n(\tau_k-), \xi_k).$$

4 Збіжність моментів досягнення меж смуги процесом X_n на обмежених інтервалах

Введемо наступні моменти зупинки. Оберемо деякі $l, r \in \mathbf{R}$ такі, що $l < X_n(0) < r$ для всіх $n \geqslant 0$ майже напевно.

Під моментами досягнення меж смуги $[l, r]$: $l, r \in \mathbf{R}, l < r$ за скінченний проміжок часу $[0, T], T > 0$ процесами X_n будемо розуміти наступні моменти виходу

$$\tau_{n,T}^{(l,r)} = \inf\{t \geqslant 0 : X_n(t) \notin (l, r)\} \wedge T, n \geqslant 0.$$

Під моментами досягнення меж смуги $[l, r]$: $l, r \in \mathbf{R}, l < r$ на всьому часовому проміжку процесами X_n будемо розуміти моменти виходу

$$\tau_n^{(l,r)} = \inf\{t \geqslant 0 : X_n(t) \notin (l, r)\}, n \geqslant 0.$$

Доведення основного твердження роботи базується на результаті щодо стійкості моментів зупинки $\tau_{n,T}^{(l,r)}$ та $\tau_n^{(l,r)}$ відносно меж смуги $[l, r]$.

Має місце наступна лема з [3].

Лема 1. *Нехай для процесів* X_n *виконуються властивості* (Y1$_n$)-(Y5$_n$) *та для всіх* $x \in \boldsymbol{R}, \theta \in \boldsymbol{R}$ *має місце* $f_n(x,\theta) = 0$.

(а) Якщо $\int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\int_0^y \frac{2b_n(z)}{\sigma_n^2(z)} dz\right) dy = \infty$, *то*

$$P(\sup_{t>0} X_n(t) = +\infty) = 1, n \geqslant 0. \qquad (2)$$

(б) Якщо $\int_{0}^{\infty} \exp\left(-\int_0^y \frac{2b_n(z)}{\sigma_n^2(z)} dz\right) dy = \infty$, *то*

$$P(\inf_{t>0} X_n(t) = -\infty) = 1, n \geqslant 0. \qquad (3)$$

Тобто, за виконання однієї з умов попередньої леми у випадку відсутності стрибків $\tau_n^{(l,r)} < \infty$ майже напевне для кожного $n \geqslant 0$ [4].

Наступний результат стосується стійкості моментів досягнення для процесів без стрибків.

Теорема 3. *Нехай для процесу* X_n *з* (1) *виконуються умови* $(Y1_n) - (Y5_n)$ *та одна з умов леми* 1. *Тоді має місце збіжність за ймовірністю*

$$\tau_0^{(l-\delta,r+\delta)} \longrightarrow^P \tau_0^{(l,r)},\ \delta \longrightarrow 0+,$$

$$\tau_0^{(l+\delta,r-\delta)} \longrightarrow^P \tau_0^{(l,r)},\ \delta \longrightarrow 0+.$$

Доведення. Не обмежуючи загальності, доведення проведемо лише для першої збіжності. Другу збіжність можна довести аналогічним чином.

Очевидно, що $\tau_0^{(l-\delta,r+\delta)} \geqslant \tau_0^{(l,r)}$. Далі, для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\left(\tau_0^{(l-\delta,r+\delta)} - \tau_0^{(l,r)} > \varepsilon\right) \leqslant$$

$$\leqslant P\left(\tau_0^{(l-\delta,r+\delta)} - \tau_0^{(l,r)} > \varepsilon, X_0(\tau_0^{(l,r)}) = l\right) +$$

$$+P\left(\tau_0^{(l-\delta,r+\delta)} - \tau_0^{(l,r)} > \varepsilon, X_0(\tau_0^{(l,r)}) = r\right).$$

Розглянемо першу ймовірність, друга оцінюється аналогічно.

$$P\left(\tau_0^{(l-\delta,r+\delta)} - \tau_0^{(l,r)} > \varepsilon, X_0(\tau_0^{(l,r)}) = l\right) =$$

$$= P\left(\tau_0^{(l-\delta,r+\delta)} > \tau_0^{(l,r)} + \varepsilon, X_0(\tau_0^{(l,r)}) = l\right) \leqslant$$

$$\leqslant P\Bigg(\min_{t\in[\tau_0^{(l,r)},\tau_0^{(l,r)}+\varepsilon]} X_0(t) \geqslant l-\delta,$$

$$X_0(\tau_0^{(l,r)}) = l\Bigg) =$$

$$= P\left(\min_{t\in[0,\varepsilon]} X_0(t) \geqslant l-\delta, X_0(0) = l\right),$$

де використано строго марковську властивість.

За монотонністю ймовірності можна записати, що

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0+} P\left(\min_{t\in[0,\varepsilon]} X_0(t) \geqslant l-\delta, X_0(0) = l\right) =$$

$$= P\left(\min_{t\in[0,\varepsilon]} X_0(t) \geqslant l, X_0(0) = l\right).$$

Оскільки коефіцієнт дифузії в точці l є додатним, то за властивостями дифузійних процесів [4] має місце $P\left(\min_{t\in[0,\varepsilon]} X_0(t) \geqslant l, X_0(0) = l\right) = 0$. Теорему доведено. □

Введемо наступний клас випадкових процесів.

Означення 1. Будемо говорити, що для процесу X_n виконується умова неперервності розподілу стрибків, якщо для всіх $t > 0, s < t, x \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}$ має місце

$$\int_{\mathbf{R}} P(\phi_n(t,s,x) + f(\phi_n(t,s,x),y) = z) F_\xi(dy) = 0.$$

Наступний результат стосується стійкості моментів досягнення відносно меж смуги для процесів зі стрибками.

Теорема 4. *Нехай для процесу* X_n *з* (1) *виконуються умови* $(Y1_n) - (Y5_n)$ *та умова неперервності розподілу стрибків процесу* X_0. *Тоді справедливі збіжності*

$$\tau_{0,T}^{(l-\delta,r+\delta)} \longrightarrow^P \tau_{0,T}^{(l,r)},\ \delta \longrightarrow 0+.$$

$$\tau_{0,T}^{(l+\delta,r-\delta)} \longrightarrow^P \tau_{0,T}^{(l,r)},\ \delta \longrightarrow 0+.$$

Доведення. Встановимо першу збіжність. Покажемо, що

$$P(\exists k \geqslant 1:\ \tau_k \leqslant T\ ,$$

$$X_0(\tau_k) \in (l-\delta, l] \cup [r, r+\delta)) \to 0, \delta \to 0.$$

Введемо наступну подію

$$A_{k,\delta} = \{X_0(\tau_k) \in (l-\delta, l] \cup [r, r+\delta)\} =$$

$$= \{X_0(\tau_k-) + f(X_0(\tau_k-), \xi_k) \in (l-\delta, l] \cup [r, r+\delta)\}.$$

Слід зазначити, що ξ_k не залежить від сигма-алгебри

$$F_{\tau_k -} = \sigma\{\{X_t \in B\} \cap \{\tau_k < t\},\ B \in B(\mathbf{R}),\ t \geqslant 0\},$$

а $X_0(\tau_k-)$ та τ_k вимірні відносно $F_{\tau_k -}$, де $B(\mathbf{R})$ є борелівською сигма-алгеброю на $\mathbf{R}$. Тому можна записати

$$P(A_{k,\delta}) = E[E[\mathbf{1}_{A_{k,\delta}}|F_{\tau_k -}]] =$$

$$= E\Bigg[\int_R \mathbf{1}\{X_0(\tau_k-) + f(X_0(\tau_k-), y) \in$$

$$\in (l-\delta, l] \cup [r, r+\delta)\} F_\xi(dy)\Bigg].$$

Легко бачити, що

$$\{X_0(\tau_k-) + f(X_0(\tau_k-), y) \in (l-\delta, l] \cup [r, r+\delta)\} \downarrow$$

$$\downarrow \{X_0(\tau_k-) + f(X_0(\tau_k-), y) \in \{l, r\}\},\ \delta \to 0+.$$

З умови неперервності розподілу стрибків процесу X_0, а також теореми Лебега про мажоровану збіжність отримаємо збіжність

$$P(A_{k,\delta}) \to 0,\ \delta \to 0+.$$

Для будь-якого $m \geqslant 1$ можна записати оцінку

$$P(\exists k \geqslant 1 :\ \tau_k \leqslant T\ ,\ X_0(\tau_k) \in (l-\delta, l] \cup [r, r+\delta)) \leqslant$$

$$\leqslant P(\exists k = 1, 2, ..., m :\ X_0(\tau_k) \in (l-\delta, l] \cup [r, r+\delta)) +$$

$$+ P(\tau_m \leqslant T) \leqslant \sum_{k=1}^{m} P(A_{k,\delta}) + P(\tau_m \leqslant T).$$

Таким чином,

$$\overline{\lim_{\delta \to 0+}} P(\exists k \geqslant 1 :\ \tau_k \leqslant T\ ,\ X_0(\tau_k) \in$$

$$\in (l-\delta, l] \cup [r, r+\delta)) \leqslant P(\tau_m \leqslant T),$$

звідки, спрямувавши $m \to \infty$, одержимо потрібну збіжність.

Тепер введемо подію

$$A_\delta = \{\exists k \geqslant 1 :\ \tau_k \leqslant T\ ,\ X_0(\tau_k) \in$$

$$\in (l-\delta, l] \cup [r, r+\delta)\} = \bigcup_{k \geqslant 1} A_{k,\delta}.$$

Застосувавши математичну індукцію за індексом k встановимо, що

$$P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon,$$

$$\bar{A}_\delta, \tau_{0,T}^{(l,r)} < \tau_k) \to 0,\ \delta \to 0+. \qquad (4)$$

(а) *База індукції.* Для $k = 1$ з теореми 3 маємо потрібну збіжність.

(б) *Припущення індукції.* Припустимо, що для $k-1$ має місце

$$P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon,$$

$$\bar{A}_\delta, \tau_{0,T}^{(l,r)} < \tau_{k-1}) \to 0,\ \delta \to 0+.$$

(в) *Індуктивний крок.* Покажемо, що

$$P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon,$$

$$\bar{A}_\delta, \tau_{0,T}^{(l,r)} \in [\tau_{k-1}, \tau_k)) \to 0,\ \delta \to 0+.$$

На події $\bar{A}_\delta \cap \{\tau_{0,T}^{(l,r)} \in [\tau_{k-1}, \tau_k)\}$ виконується одне з двох тверджень

$$\tau_{0,T}^{(l,r)} = \tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} = \tau_{k-1},$$

$$\tau_{k-1} < \tau_{0,T}^{(l,r)} \leqslant \tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)}.$$

Звідси маємо оцінку

$$P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon,\ \bar{A}_\delta, \tau_{0,T}^{(l,r)} \in [\tau_{k-1}, \tau_k)) \leqslant$$

$$\leqslant P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon,\ \tau_{0,T}^{(l,r)} = \tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)}) +$$

$$+ P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon,\ \tau_{0,T}^{(l,r)} \in (\tau_{k-1}, \tau_k)).$$

Очевидно, що перший доданок в правій частині останньої нерівності дорівнює нулю. Для другого доданку з теореми 3 маємо

$$P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon,$$

$$\tau_{0,T}^{(l,r)} \in (\tau_{k-1}, \tau_k)) \to 0,\ \delta \to 0+.$$

Таким чином, індуктивний крок встановлено.

Тепер запишемо для довільного $k > 1$:

$$P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon,\ \bar{A}_\delta,\ \tau_{0,T}^{(l,r)} < \tau_k) +$$

$$+ P(A_\delta) + P(\tau_k \leqslant T).$$

Перейшовши до границі

$$\overline{\lim_{\delta \to 0+}} P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon) \leqslant P(\tau_k \leqslant T).$$

Спрямувавши $k \to \infty$ одержимо твердження першого пункту теореми.

Другий пункт теореми доводиться аналогічними міркуваннями.

$\square$

Сформулюємо основний результат даної роботи.

Теорема 5. *Нехай для процесу X_n з (1) виконуються умови* $(\mathrm{Y}1_n)$–$(\mathrm{Y}5_n)$ *та* $(\mathrm{U}1_n)$–$(\mathrm{U}2_n)$, *умова неперервності розподілу стрибків процесу X_0.*

Тоді мають місце наступні твердження:
(а) для всіх $T > 0, \varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, n \to \infty.$$

(б) для всіх $T > 0, \varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\tau_{n,T}^{(-\infty,r)} - \tau_{0,T}^{(-\infty,r)}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, n \to \infty.$$

(в) для всіх $T > 0, \varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\tau_{n,T}^{(l,\infty)} - \tau_{0,T}^{(l,\infty)}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, n \to \infty.$$

Доведення. Встановимо перший пункт твердження. Нехай $\delta \in (0, \frac{r-l}{2})$. Введемо наступні події

$$A_{\varepsilon,\delta} = \{|\tau_{0,T}^{(l-\delta,r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| \leqslant \varepsilon\} \cap$$

$$\cap \{|\tau_{0,T}^{(l+\delta,r-\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| \leqslant \varepsilon\},$$

$$B_{n,\delta} = \{\sup_{t\in[0,T]} |X_n(t) - X_0(t)| \leqslant \delta\}.$$

На події $B_{n,\delta}$ виконуються нерівності

$$\tau_{0,T}^{(l+\delta,r-\delta)} \leqslant \tau_{n,T}^{(l,r)} \leqslant \tau_{0,T}^{(l-\delta,r+\delta)}.$$

Тоді, очевидно

$$B_{n,\delta} \cap A_{\varepsilon,\delta} \subset \{|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| \leqslant \varepsilon\}.$$

Отже,

$$P(|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon) \leqslant P(\bar{B}_{n,\delta}) + P(\bar{A}_{\varepsilon,\delta}).$$

За теоремою 2 маємо $P(\bar{B}_{n,\delta}) \to 0,\ n \to \infty$. Тоді

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P(|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon) \leqslant P(\bar{A}_{\varepsilon,\delta}).$$

Перейшовши до границі $\delta \to 0+$ та використавши теорему 4 одержимо перше твердження теореми.

Пункти (б) та (в) доводяться аналогічно. $\square$

5 Збіжність моментів досягнення меж смуги процесом X_n на всій числовій осі

Досі всі процеси та моменти досягнення розглядались на скінченних проміжках часу $[0, T], 0 < T < \infty$. Поширимо результат теореми 5 на випадок нескінченного проміжку часу $[0, \infty)$.

Позначимо через X_0^* – розв'язок рівняння (1), в якому для всіх $x \in \mathbf{R}, \theta \in \mathbf{R}$ має місце $f_0(x, \theta) = 0$ та виконуються умови $(\mathrm{Y}1_n)$ – $(\mathrm{Y}5_n)$.

Теорема 6. *Нехай для процесів $X_n, n \geqslant 0$ виконуються умови* $(Y1_n) - (Y5_n)$, $(\mathrm{U}1_n)$–$(\mathrm{U}2_n)$ *та умова неперервності розподілу стрибків. Тоді мають місце наступні твердження:*
(а) за виконання для процесу X_0^* однієї з умов леми 1 для всіх $\varepsilon > 0$ має місце збіжність

$$P\left(|\tau_n^{(l,r)} - \tau_0^{(l,r)}| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, n \to \infty. \quad (5)$$

(б) за виконання для процесу X_0^* умови (а) леми 1 для всіх $\varepsilon > 0$ має місце збіжність

$$P\left(|\tau_n^{(-\infty,r)} - \tau_0^{(-\infty,r)}| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, n \to \infty. \quad (6)$$

(в) за виконання для процесу X_0^* умови (б) леми 1 для всіх $\varepsilon > 0$ має місце збіжність

$$P\left(|\tau_n^{(l,\infty)} - \tau_0^{(l,\infty)}| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, n \to \infty. \quad (7)$$

Доведення. Оскільки процес доведення пунктів (а), (б) та (в) аналогічний, доведення наведемо лише для пункту (а). Для визначеності припускаємо виконання пункту (а) леми 1.

Оберемо сталі $\varepsilon \in (0, 1), \delta > 0$. Встановимо, що $\tau_0^{(l,r)} < \infty$ P -майже напевне.

Для цього запишемо оцінки

$$P(\tau_0^{(l,r)} = \infty) = P(\forall k > 1, \forall t \in [\tau_{k-1}, \tau_k) :$$

$$\phi_0(t, \tau_{k-1}, X_0(\tau_{k-1})) \in (l, r)) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{M\to\infty} P(\forall k = 1, \dots, M\ \exists z \in (l, r)$$

$$\forall t \in [\tau_{k-1}, \tau_k) : \phi_0(t, \tau_{k-1}, z) \in (l, r)).$$

Ймовірності під знаком границі можна записати наступним чином, врахувавши незалежність відповідних подій для кожного k

$$A_M = P(\forall k = 1, \dots, M\ \exists z \in (l, r)$$

$$\forall t \in [\tau_{k-1}, \tau_k) : \phi_0(t, \tau_{k-1}, z) \in (l, r)) =$$

$$= \prod_{k=1}^{M} P(\exists z \in (l, r)\ \forall t \in [\tau_{k-1}, \tau_k) :$$

$$\phi_0(t, \tau_{k-1}, z) \in (l, r) | F_{\tau_{k-1}}).$$

Подія під знаком ймовірності в останньому виразі залежить лише від приростів вінерового процесу W на $[\tau_{k-1}, \tau_k)$, які в свою чергу не залежать від $F_{\tau_{k-1}}$ та не залежать від τ_k. Отже

$$A_M = \prod_{k=1}^{M} \int_a^{\infty} P(\exists z \in (l, r)\ \forall t \in [a, b) :$$

$$\phi_0(t, a, z) \in (l, r)) \cdot \lambda \exp\{-\lambda(b-a)\} db|_{a=\tau_{k-1}},$$

де $\lambda = \nu(\mathbf{R})$.

Також з однорідності коефіцієнтів за часом можна записати

$$P(\exists z \in (l, r)\ \forall t \in [a, b) : \phi_0(t, a, z) \in (l, r)) =$$

$$= P(\exists z \in (l, r)\ \forall t \in [0, b-a) : \phi_0(t, 0, z) \in (l, r)).$$

Тому

$$P(\tau_0^{(l,r)} = \infty) \leqslant \lim_{M\to\infty} A_M =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \left(\int_0^{\infty} \lambda P(\exists z \in (l, r)\ \forall t \in [0, T) : \right.$$

$$\left. \phi_0(t, 0, z) \in (l, r)) \exp\{-\lambda T\} dT \right)^M := B_M.$$

Для доведення того, що $P(\tau_0^{(l,r)} < \infty)$ м.н. потрібно показати, що $B_M < 1$. Для цього інтеграл під знаком степеня M повинен бути менший за 1. Зазначений інтеграл може бути рівний 1 лише тоді, коли

$$\lim_{T\to\infty} P(\exists z \in (l, r)\ \forall t \in [0, T) : \phi_0(t, 0, z) \in (l, r)) =$$

$$= P(\exists z \in (l, r)\ \forall t \in [0, \infty) : \phi_0(t, 0, z) \in (l, r)) = 1.$$

За теоремою порівняння для стохастичних диференціальних рівнянь процес $\phi_0(t, 0, z)$ зростає за змінною z. Можна записати оцінки

$$P(\exists z \in (l, r)\ \forall t \in [0, \infty) : \phi_0(t, 0, z) \in (l, r)) \leqslant$$

$$\leqslant P(\exists z \in (l, r)\ : \sup_{t\in[0,\infty)} \phi_0(t, 0, z) \leqslant r) =$$

$$= P(\exists z \in (l, r)\ \forall y \in (l, z] : \sup_{t\in[0,\infty)} \phi_0(t, 0, y) \leqslant r) \leqslant$$

$$\leqslant P(\exists y \in (l, r) \bigcap \mathbf{Q} : \sup_{t\in[0,\infty)} \phi_0(t, 0, y) \leqslant r) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{y\in(l,r)\bigcap \mathbf{Q}} P(\sup_{t\in[0,\infty)} \phi_0(t, 0, y) \leqslant r) = 0,$$

де з пункту (a) леми 1 для процесу без стрибків ϕ_0 кожен елемент останньої суми дорівнює нулю. Таким чином, встановлено, що $\tau_0^{(l,r)} < \infty$ P -майже напевне.

Отже

$$\exists T > 0 : P(\tau_0^{(l,r)} > T - 1) < \frac{\delta}{2}.$$

Теорема 5 гарантує, що існує таке n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ має місце

$$P\left(|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Таким чином, справджується оцінка

$$P(|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| < \varepsilon,$$

$$\tau_0^{(l,r)} < T - 1) > 1 - \delta. \tag{8}$$

Оцінимо згори імовірність в правій частині нерівності (8). На $[0, T-1)$ момент виходу $\tau_{0,T}^{(l,r)}$ збігається з моментом виходу $\tau_0^{(l,r)}$ майже напевне. Тому можна записати

$$P\left(|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| < \varepsilon, \tau_0^{(l,r)} < T - 1\right) =$$

$$= P\left(|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_0^{(l,r)}| < \varepsilon, \tau_0^{(l,r)} < T - 1\right).$$

Також момент виходу $\tau_{n,T}^{(l,r)}$ збігається з моментом виходу $\tau_n^{(l,r)}$ майже напевне на $[0, T-1+\varepsilon)$. Отже має місце рівність

$$P\left(|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_0^{(l,r)}| < \varepsilon, \tau_0^{(l,r)} < T - 1\right) =$$

$$= P\left(|\tau_n^{(l,r)} - \tau_0^{(l,r)}| < \varepsilon, \tau_0^{(l,r)} < T - 1\right).$$

Таким чином, з (8) отримаємо оцінку для всіх $n \geqslant n_0$

$$1 - \delta < P\left(|\tau_n^{(l,r)} - \tau_0^{(l,r)}| < \varepsilon, \tau_0^{(l,r)} < T - 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant P\left(|\tau_n^{(l,r)} - \tau_0^{(l,r)}| < \varepsilon\right),$$

що завершує доведення теореми. □

6 Приклад необхідності умови неперервності розподілу стрибків

Наведемо приклад, що ілюструє необхідність умови неперервності розподілу стрибків (означення 1).

Приклад 1. Нехай для всіх $n \geqslant 0$ має місце $b_n = \sigma_n = 0, f_n = 1$. Припустимо, що $\nu(d\theta) = \delta_1(d\theta)$ та $\mu(d\theta, dt) = \delta_1(d\theta)dt$, де δ_1 – точкова міра, зосереджена в точці $\{1\}$. Тоді процес Леві L, що відповідає мірі μ, є процесом Пуассона. Тобто

$$L(t) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \theta\mu(d\theta, ds) = N(t).$$

Легко бачити, що за поставлених умов процес X_n має вигляд

$$X_n(t) = X_n(0) + L(t), n \geqslant 0.$$

Покладемо $X_n(0) = -\frac{1}{n}$. Очевидно, що за збіжності $(\mathrm{U}1_n)$ має місце $X_0(0) = 0$.

Нехай $l = -1, r = 1$ та дослідимо моменти досягнення $\tau_n^{(l,r)}$. Процеси X_n мають невипадкові початкові умови і перша зміна значення процесу відбувається в момент τ_1 стрибка процесу Пуассона N з приростом 1. Оскільки $X_n(0) = -\frac{1}{n}$, то $X_n(\tau_1) = 1 - \frac{1}{n} < 1$, проте $X_n(\tau_2) = 2 - \frac{1}{n} > 1$. Тому $\tau_n^{(l,r)} = \tau_2$.

Що стосується граничного процесу X_0, для нього $X_0(0) = 0$, тому $X_0(\tau_1) = 1$ і $\tau_0^{(l,r)} = \tau_1$. Таким чином, немає збіжності за ймовірністю $\tau_n^{(l,r)}$ до $\tau_0^{(l,r)}$.

Для побудованого процесу X_n умова неперервності розподілу стрибків не виконується, оскільки міра стрибків процесу X_n зосереджена в точці $\{1\}$.

7 Висновки

Для процесу, породженого СДР зі стрибками та неліпшицевою дифузією встановлено:
1) стійкість відносно меж смуги моментів досягнення процесом меж смуги;
2) збіжність за ймовірністю моментів досягнення процесом меж смуги;
3) наведено приклади.

Література

1. Томашик В.В. Збіжність моментів виходу дифузійних процесів зі смуги. / Мішура Ю.С., Томашик В.В. // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 2013. — Т. 88. — С.95–105.

2. Мороз А.Г. Сходимость решений и моментов выхода решений из полосы в диффузионных моделях со скачками / А.Г.Мороз, В.В.Томашик // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — Т.50,№2. — С.144-152.

3. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения / И.И.Гихман,А.В.Скороход. — К.:Наукова думка, 1968. — 354с.

4. Ito K. Diffusion Processes and Their Sample Paths / K. Ito, H.P.McKean. — Berlin:Springer, 1965. — 321p.

References

1. TOMASHYK, V.V. and MISHURA, Yu.S. (2013) Zbizhnist momentiv vyhodu dyfuziinyh procesiv zi smuhy. *Teoriya imovirnostei ta mat. statistika.* 88. p.95-105.

2. MOROZ, A.G. and TOMASHYK, V.V. (2014) Skhodimost reshenii i momentov vyhoda reshenii iz polosy v diffuzionnyh modeliah so skachkami. *Kibernetika i sistemnyi analiz.* 50(2). p.144-152.

3. GIKHMAN, I.I. and SKOROKHOD, A.V. (1965) *Stohasticheskie differencialnyie uravnenia.* Kyiv:Naukova Dumka.

4. ITO, K. and McKEAN, H.P. (1965) *Diffusion Processes and Their Sample Paths,* Berlin:Springer.

Received: 15.11.2013