

УДК 532.595

Кудзінівська¹ І.П., к.т.н., доцент
Лимарченко² О.С., д.т.н., проф.
Мельник² В.М., аспірант

Параметричні коливання рідини з вільною поверхнею в резервуарі конічної форми

¹Національний авіаційний університет, 03058, м. Київ, проспект Комарова 1,
e-mail: Kudzinovskaya@ukr.net

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т Глушкова 4е,
e-mail: olelim2010@yahoo.com

Kudzinovska I.P., candidate of technical sci.
Limarchenko O.S., doctor of eng., prof.
Melnik V.N., graduate student

Parametric oscillations of liquid with a free surface in reservoir of conic shape

¹National Aviation University, 03058, Kiev, Komarova ave., 1,
e-mail: Kudzinovskaya@ukr.net

²Taras Shevchenko Kiev National University, 03680, Kyiv, Glushkova ave., 4e,
e-mail: olelim2010@yahoo.com

Досліджується задача про параметричні коливання рідини з вільною поверхнею в резервуарі конічної форми (задача Фарадея). Показано як різні параметри збудження коливань системи і початкові умови впливають на розвинення динамічних процесів.

Ключові слова: рідина з вільною поверхнею, конічний резервуар, параметричні коливання.

The problem about parametric oscillations of liquid with a free surface in reservoir of conic shape (the Faraday problem) is under investigation. Liquid is considered as ideal, incompressible, reservoir is a rigid body of conic shape. Investigation is done on the basis of nonlinear model of combined motion of liquid with reservoir with representation of liquid motion as decomposition with respect to normal modes of oscillations. Resolving mathematical model is obtained in the form of a system of ordinary differential equations relative to parameters of motion of reservoir and amplitudes of excitation of normal modes of oscillation of liquid with a free surface. It is shown how different parameters of disturbance of oscillations and initial conditions influence development of dynamic processes. We focused our attention on absolute value of ultimate wave and time of this maximum manifestation depending on initial excitation of liquid. Effects of modulation of oscillations and drift of mean level of oscillating parameters were discovered.

KeyWords: liquid with a free surface, conic reservoir, parametric oscillations.

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор Я.О. Жук

Вступ

Класична задача Фарадея про параметричні коливання рідини з вільною поверхнею в останні роки знову привернула увагу дослідників [1, 2, 4]. Відомо, що в класичній постановці ця задача призводить до таких результатів: за наявності малих початкових збурень по антисиметричних формах коливань вільної поверхні рідини при вимушених вертикальних коливаннях кругового циліндричного резервуара існують два діапазони частот коливань резервуара, коли антисиметричні збурення зростають. Перший діапазон спостерігається в околі основної частоти коливань рідини по першій антисиметричній формі і є дуже вузьким (потрапити в цей діапазон достатньо складно); другий діапазон лежить в околі подвоєної частоти коливань рідини по першій антисиметричній формі і є достатньо широким.

Дослідження останніх років показали, що класична задача Фарадея є достатньо ідеалізованою і для більшої відповідності практиці має враховувати ряд додаткових факторів. Частина з них обумовлена технічною задачею про повздовжні коливання ракет. Наприклад, повздовжніх коливань ракет рух ракети в поперечному напрямку і відповідний кутових рух в поперечній площині не обмежуються і при розвиненні антисиметричних коливань рідини встановиться режим сумісних коливань резервуару з рідиною. При цьому частоти сумісних коливань резервуару з рідиною будуть суттєво відрізнятися від парціальних частот [1]. В класичній задачі Фарадея рух резервуару збуджувався за заданим законом, що відповідає нескінченній масі резервуару. В прикладних задачах навпаки маса резервуару поступається масі рідини, тому важливо дослідити випадок силового збудження коливань в системі.

Лише в останні роки було розглянуто питання про вплив в'язкості і поверхневого натягу на вільній поверхні на розвинення параметричного резонансу [1]. До теперішнього часу задача Фарадея розглядалася виключно для резервуарів циліндричної форми.

Метою дослідження даної статті є постановка задачі Фарадея про параметричні коливання рідини в резервуарі конічної форми і дослідження впливу параметрів збудження коливань системи і початкових збурень на подальше розвинення параметричного резонансу.

Математична модель системи

Математична модель, отримана на основі [3], представлена в амплітудних параметрах a_i коливань рідини та поступального руху резервуара $\bar{\epsilon}$:

$$\sum_{n=1}^N p_{rn}(a_k, t) \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}(a_k, t) \ddot{\epsilon}_{n-N} = q_r(a_k, \dot{a}_l, t),$$

$$r = \overline{1, N+3} \quad (1)$$

При цьому коефіцієнти p_{rn} визначаються через алгебраїчні форми від першого до третього порядку з коефіцієнтами, які визначаються через квадратури від форм коливань (координатних функцій). Для побудови координатних функцій використовувався метод допоміжної області, який на відміну від класичного методу враховує виконання умови неперетікання вище рівня незбуреної вільної поверхні. Результативизначення відносно похибки виконання умови неперетікання (відношення порушення умови неперетікання до максимального збурення на вільній поверхні рідини) для оберненого усіченого конуса показують, що на твердих границях похибка не перевершує 10^{-6} , а на продовженні бічної поверхні до висоти 0,2 радіуса вільної поверхні вона не перевершує 10^{-3} , що є цілком придатним для проведення прикладних досліджень. Зазначимо, що необхідність високоточного задоволення цих умов пов'язана з виконанням умов розв'язності крайової задачі Неймана для рівняння Лапласа, якою описується задача для визначення форм коливань вільної поверхні рідини.

В подальших розрахунках прийнято, що резервуар виконує коливальні рухи лише в вертикальному напрямку, вільна поверхня рідини в початковому стані має збурення за першою формою коливань, система здійснює коливання внаслідок прикладання гармонічної сили в позадздовжньому напрямку $F_z = A \cos \Omega t$. Досліджував-

ся рух системи при випадку, коли частота зовнішнього збудження приблизно в два рази була більшою за власну частоту першої антисиметричної форми коливань.

Аналіз чисельних результатів

Розглянемо спочатку вільні коливання системи за умови початкового збурення коливань внаслідок відхилення вільної поверхні рідини з амплітудою $0,1R$, де R – радіус незбуреної вільної поверхні рідини. На Рис. 1 показано залежність амплітуди першої антисиметричної форми від часу в секундах.

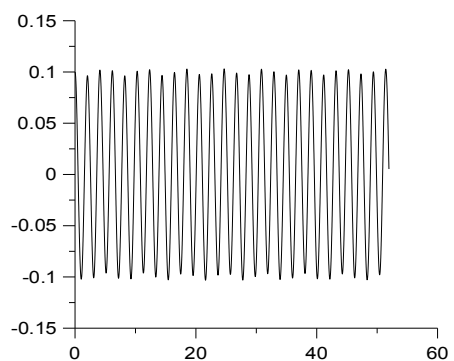


Рис. 1. Вільні коливання за першою формою

З рисунку видно, що коливання відбуваються з практично незмінною амплітудою. Малі зміни амплітуд обумовлені фактором сумісності руху рідини і резервуара. Розглянемо тепер рух системи при початковому збуренні 0,1 під дією гармонічної сили з амплітудою 0,7 з частотою, що приблизно в два рази більша за частоту власних коливань системи за основною формою. В цьому випадку коливання вільної поверхні набувають модуляцію (Рис. 2).

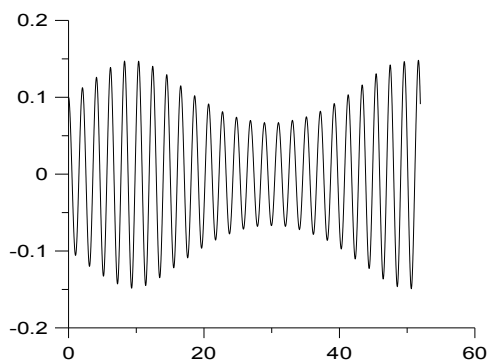


Рис. 2. Параметричні коливання при $a_1(0) = 0,1$

Як видно з рисунку амплітуда коливань за основною антисиметричною формою a_1 зміню-

ється в часі і набуває періодично свого максимального значення порядку 0,15.

Розглянемо для порівняння випадки початкових умов $a_1(0) = 0,04$ (Рис. 3) і $a_1(0) = 0,005$ (Рис. 4).

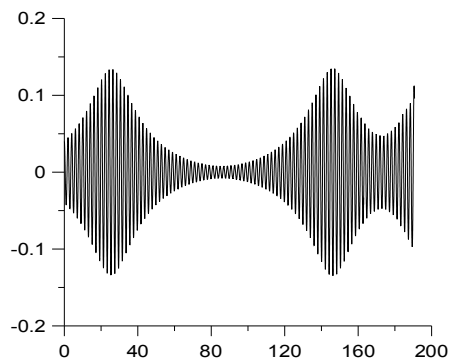


Рис. 3..Параметричні коливання при $a_1(0) = 0,04$

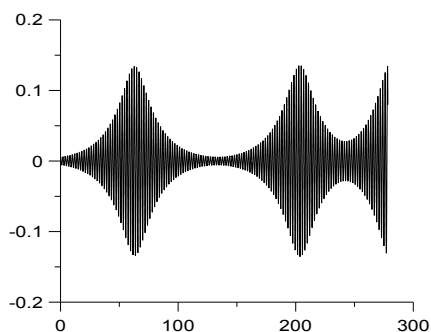


Рис. 4..Параметричні коливання при $a_1(0) = 0,005$

Аналіз чисельних результатів показує, що максимальні розмахи коливань в усіх випадках залишаються практично незмінними і приблизно дорівнюють $0,15R$. В той же час графіки показують, що вихід на режим усталених коливань не відбувається: для всіх початкових умов вагою є модуляція коливань. Відмітимо, що цей результат відрізняється від результатів робіт [2, 4], де розглядаються параметричні коливання в резервуарах з рідиною на основі моделей з рядом спрощуючи гіпотез і без прийняття до уваги фактору сумісності руху складових системи.

Зазначимо, що розглянуті задачі моделювалися згідно з класичною постановкою задачі Фарадея за умови виключення руху резервуару в горизонтальній площині. Це суттєво спрощує проблему і дозволяє

відразу визначити частотний діапазон прояву параметричного резонансу, який не залежить від співвідношення мас резервуару і рідини.

Проаналізуємо тепер збурення другої форми коливань вісесиметричної форми, яка є проявом збудження нелінійних механізмів в системі. На Рис. 5 показано закон зміни в часі амплітуди цієї форми.

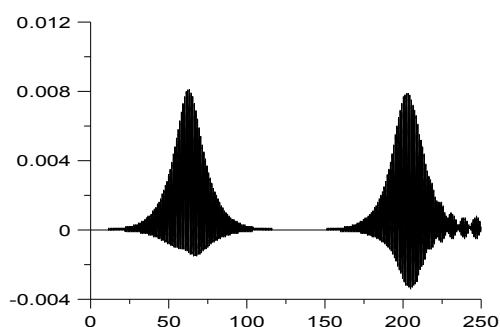


Рис. 5..Параметричні коливання за вісесиметричною формою при $a_1(0) = 0,04$

Як видно з рисунку в цілому збудження за другою формою не є значним, тобто розвиток нелінійностей в системі при таких параметричних коливаннях незначний. Звернемо увагу, що для всіх графіків амплітуди послідовних піків є приблизно однаковими. Звернемо увагу, що коливання за другою формою суттєво модульовані. На відміну від коливань по першій формі помітний дрейф середнього значення; при коливаннях переважають амплітуди з додатнім відхиленням. Це свідчить про те, що серед хвиль на вільній поверхні переважно будуть спостерігатися хвилі, в яких буде опускання профілю хвиль всередині і зростання амплітуд на стінках резервуару. Ця властивість нелінійного хвилеутворення підтверджується експериментально.

Розглянемо тепер випадок збудження параметричних коливань системи з амплітудою 0,2 (тобто амплітуду зменшено в 3,5 рази). Результати визначення зміни амплітуди коливань вільної поверхні за першою антисиметричною формою в часі представлені на Рис. 6.

Як і в попередніх випадках вихід на усталений режим коливань не спостерігається. Коливання суттєво промодульовані. Період модуляції сильно збільшився. Час виходу коливань на максимальне значення істотно змінився. Зміна максимальної амплітуди відбулася приблизно в 2 рази (при зміні амплітуди збудження в 3,5 рази).

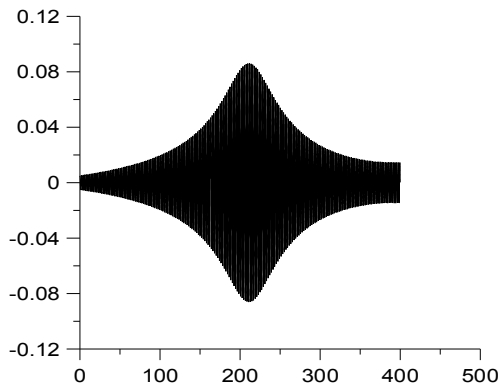


Рис. 6..Параметричні коливання при $a_1(0) = 0,005$,
і амплітуді збудження 0,2

Висновки

Розглянуто задачу про параметричні коливання рідини з вільною поверхнею в резервуарі кінчної форми. На відміну від класичної постановки задачі Фарадея рух системи збуджується повздовжньою гармонічною силою, проте рух резервуару в поперечній площині виключений.

Встановлено, що при розвиненні параметричних коливань в околі подвоєної частоти коливань

системи по першій антисиметричній формі вихід системи на усталені коливання не спостерігається. При незмінній амплітуді гармонічного силового збудження руху час і амплітуда максимального збудження системи по першій формі практично не залежать від початкових відхилень системи по антисиметричній формі. Коливання по першій формі відбуваються при суттєвому прояві модуляції. Коливання по першій віссиметричній формі також сильно промодульовані, проте додатково ще вагомо проявляється дрейф середнього значення коливань, який призводить до того, що переважно спостерігаються хвилі, в яких висота горба перевершує глибину впадини. В цілому збудження нелінійностей в системі незначне. При зміні амплітуди збудження резервуару час і амплітуда прояву максимальних коливань за першою формою змінилися, проте вихід на усталений режим коливань не спостерігається через суттєвий прояв модуляції.

Частина одержаних результатів відрізняється від раніше одержаних результатів, які розглядалися при додаткових спрощуючих припущеннях і без врахування фактору сумісності руху складових системи.

Список використаних джерел

1. Константинов А.В. Исследование параметрического резонанса в задаче М. Фарадея при наличии слабых гравитационно-капиллярных эффектов / А.В. Константинов, О.С.Лимарченко// Проблемы динамики и устойчивости многомерных систем, Праці Інституту математики. – 2011. –8. – № 2. –С. 83-100
2. Ikeda T. Autoparametric resonances in a structure/fluid interaction system carrying a cylindrical liquid tank / T.Ikeda, Sh.Murakami// Journal of Sound and Vibration. – 2005. –285.–P. 517–546
3. Limarchenko O.S. Peculiarities of application of perturbation technology in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape / O.S.Limarchenko// Ukrainian Math. Journ. – 2007. – 59. – No. 1. – P. 44-70.
4. Ibrahim R.A. Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications / R.A.Ibrahim // Cambridge Univ. Press. – 2005. – 972 p.

References

1. KONSTANTINOVA.V.and LIMARCHENKO.S.(2011) Issledovanie parametricheskogo rezonansa v zadache M. Faradeya pri nalichii slabykh gravitatsionnykh effektov. In *Problemy dinamiki i ustoichivosti mnogomernykh system. Pratsi Institutu matematiki*,V. 8, No. 2, pp. 83-100
2. IKEDAT.and MURAKAMI SH.(2005)Autoparametric resonances in a structure/fluid interaction system carrying a cylindrical liquid tank. In *Journal of Sound and Vibration*, 285,pp. 517–546
3. LIMARCHENKO O.S. (2007)*Peculiarities of application of perturbation technology in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape*.In *Ukrainian Math. Journ.*,V. 59, No. 1, pp. 44-70.
4. IBRAHIM R.A.(2005) *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*, Cambridge Univ. Press.

Надійшла до редколегії 22.09.14