

УДК 539.595

Лимарченко О.С.<sup>1</sup>, д.т.н., проф.  
Семенович К.О.<sup>1</sup>, аспірант

## Поверхневе хвилеутворення в системі резервуар–рідина при кутовому збуренні руху резервуару

<sup>1</sup> Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,  
e-mail: olelim2010@yahoo.com  
e-mail: kateryna.semenovych@gmail.com

O.S. Limarchenko<sup>1</sup>, doctor of eng., prof.  
K.O. Semenovych<sup>1</sup>, graduate student

## Surface sloshing in the system reservoir–liquid for the case of angular excitation of reservoir motion

<sup>1</sup> Taras Shevchenko National University of Kyiv,  
03680, Kyiv, Glushkova st., 4e,  
e-mail: olelim2010@yahoo.com  
e-mail: kateryna.semenovych@gmail.com

*Розглядається задача про рух циліндричного резервуару на маятниковому підвісі, частково заповненого ідеальною рідиною. Збудження руху відбувається з положення спокою за рахунок імпульсного прикладення моменту. Досліджено перерозподіл кінетичної енергії в системі і пояснено згасання поверхневого хвильового руху. Вказані результати якісно збігаються з експериментальними даними.*

*Ключові слова: нелінійна динаміка рідини, вільна поверхня рідини, кутовий рух резервуару, циліндричний резервуар.*

*Dynamics of a cylindrical reservoir on pendulum suspension, partially filled with an ideal liquid, is considered. Mathematical modeling is done on the basis of multimodal model, which takes into account combined character of motion of liquid and reservoir and comparatively great number of sloshing normal modes. Disturbance of motion was done by impulse of torque, applied to the reservoir. Redistribution of kinetic energy between different modes of liquid motion and parameters of angular motion of reservoir as well as varying of these parameters in time was investigated. Decay of surface sloshing processes is explained on the basis of insertion of dissipative forces, which is done according to boundary layer approximation. Results of numerical modeling qualitatively coincide with experimental data, obtained by laboratory experiment. We investigate also variation in time of kinematic parameters of motion of liquid and angular of inclination of reservoir for different values of dissipation forces. It was shown that only in the case of considering of dissipation factors the discovered effect of decay of liquid oscillations is agreed with the experiment.*

*Key Words: nonlinear liquid dynamics, liquid free surface, angular motion of reservoir, cylindrical tank .*

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Жук Я.О.

### Вступ

Розглядається рух резервуару, частково заповненого рідиною, на маятниковому підвісі. В початковий момент часу система знаходиться в стані спокою. Збурення руху забезпечується імпульсом моменту тривалістю 1 с.

Було проведено серію лабораторних дослідів, під час яких було виявлено наступний ефект: впродовж 5–7 періодів коливань резервуару після початку руху коливальний рух на вільній поверхні рідини зникає, і надалі поверхня рідини залишається практично плоскою. Поясненням цього може бути перерозподіл енергії в розглядуваній системі між різними формами руху. Для аналізу вказаного явища було побудовано математичну

модель та проведено чисельні експерименти. Одержані результати порівнювалися з якісними даними лабораторного експерименту і було одержане добре узгодження.

### Математична модель

Для дослідженні задачі використаємо математичну модель системи [2, 3]. Рідина вважається ідеальною, однорідною, нестисливою, а її рух безвихровим. Метод ґрунтується на формулюванні задачі в вигляді варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського та використанні методу Канторовича з попереднім виключенням кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини для побудови дискретної моделі системи. До розгляду приймалися 12 форм коливань ріди-

ни. Рух системи збуджується моментом у вигляді імпульсу прямокутної форми тривалістю  $1$  с, його амплітуда підбирається таким чином, щоб максимальні амплітуди коливань вільної поверхні знаходились в діапазоні  $0,2R - 0,3R$ , де  $R$  – радіус резервуару. Для побудови нелінійної дискретної моделі системи резервуар–рідина були введені наступні узагальнені координати:  $a_i$  – амплітуди збудження форм коливань рідини;  $\alpha_i$  – кути відхилення резервуару;  $\varepsilon_i$  – параметри поступального руху резервуару. Зауважимо, що наведений опис придатний для загального випадку просторового руху системи. Для випадку кутового руху резервуару на маятниковому підвісі, який є предметом розгляду даної роботи, параметри поступального руху відсутні.

Математичне формулювання задачі про рух циліндричного резервуару, заповненого рідиною з вільною поверхнею, складається з кінематичних умов, динамічних рівнянь та початкових умов. Для досліджуваної системи до кінематичних умов відноситься вимога нерозривності потоку в області, умова непротікання на границі контакту резервуар–рідина та умова непротікання через вільну поверхню рідини. Динамічні граничні умови та рівняння руху отримано застосуванням принципу Гамільтона–Остроградського для Лагранжіану системи, що представлений в наступному вигляді [3]

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} [\vec{\nabla} \varphi + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega})]^2 d\tau + \frac{1}{2} M_r (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 + \frac{1}{2} I_{res}^{ij} \omega_i \omega_j - (M_r + M_l) g \varepsilon_z + \rho g (\cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \cdot \int_{S_0} r \cdot \cos \theta (\xi + H) dS - \rho g (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \cdot \int_{S_0} r \cdot \sin \theta (\xi + H) dS - \frac{1}{2} \rho g \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cdot \int_{S_0} \xi^2 dS - (M_l h_l + M_r h_r) (1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) - \sigma \int_{S_0} \sqrt{1 + (\vec{\nabla} \xi)^2} dS - \sigma \cos \theta_l \int_{L_0} \xi dl + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{M} \cdot \vec{\chi}.$$

Кінематичні умови розглядаються як кінематичних в'язі відносно варіаційного принципу

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

Для ефективного застосування варіаційних методів необхідно задовольнити цим в'язям до розв'язання варіаційної задачі. Після задоволення кінематичних граничних умов за методом [3]. Одержується варіаційна задача для вільної системи, для якої записуються рівняння Лагранжа другого роду.

Рівняння руху системи в загальному випадку в параметрах  $a_i, \alpha_i, \varepsilon_i$  можна подати наступним чином:

$$\sum_{n=1}^N p_{rn} \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn} \ddot{\alpha}_{n-N} + \sum_{n=N+4}^{N+6} p_{rn} \ddot{\varepsilon}_{n-N-3} = q_r$$

$$r = \overline{1, N+6} \quad (1)$$

де  $p_{rn}$  і  $q_r$  це квадратна матриця та вектор розміру  $N+6$  відповідно. Елементи матриці та вектору залежать від форм коливань  $\psi_i$  та векторного потенціалу Стокса-Жуковського. За рахунок вибору системи координат з центром в точці підвісу в задачі, що вивчається, відсутні поступальні рухи резервуару, тому розмірність системи рівнянь (1) скорочується до  $N+3$ .

Особливість даного класу задач полягає в тому, що можна умовно поділити кінетичну енергію системи на складові, які описують різні форми руху в системі. Для того, щоб відповісти на питання про, характер перерозподілу енергії в системі, було розглянуто зміну в часі складових кінетичної енергії системи. Кінетична енергія системи може бути представлена у вигляді

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

Розглядаючи лише ті компоненти кінетичної енергії, які пов'язані з рухом рідини, можна виділити складову  $T_1$ , яка відповідає хвильовому руху на вільній поверхні рідини

$$T_1 = \frac{1}{2} \rho \left( \sum_i \dot{a}_i^2 \alpha_i^v + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \gamma_{i,j,k}^v + \sum_{i,j,k,l} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k a_l \delta_{i,j,k,l}^v \right)$$

Складова  $T_2$  кінетичної енергії системи відповідає квазітвердому кутовому руху

$$T_2 = \frac{1}{2} \rho \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s (I_{res} + E_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3)$$

Складова  $T_3$  кінетичної енергії системи відображає зв'язок хвильового та квазітвердого кутового руху системи

$$T_3 = \frac{1}{2} \rho \sum_{p=1}^3 \omega_p \left( \sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right).$$

### Аналіз чисельних результатів

Розглядаються коливання резервуару радіуса 1 м, заповненого рідиною до рівня 0,5 м. Маса резервуару складає 0,25 маси рідини. Довжина маятничкового підвісу 4 м.

Зазначимо, що на основі моделі ідеальної рідини не вдалося одержати підтвердження наявності перерозподілу енергії, який спостерігається в експериментах. Тому в системі було вве-

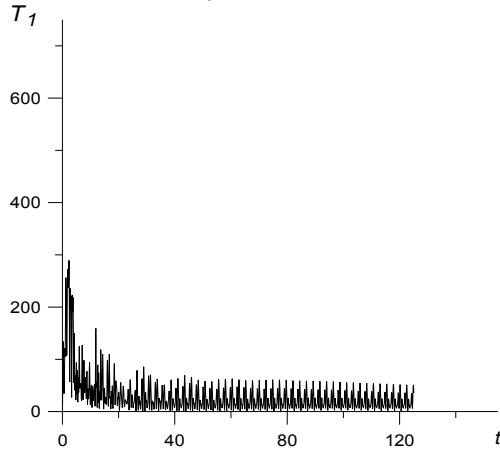


Рис. 1. Графік зміни в часі складової  $T_1$

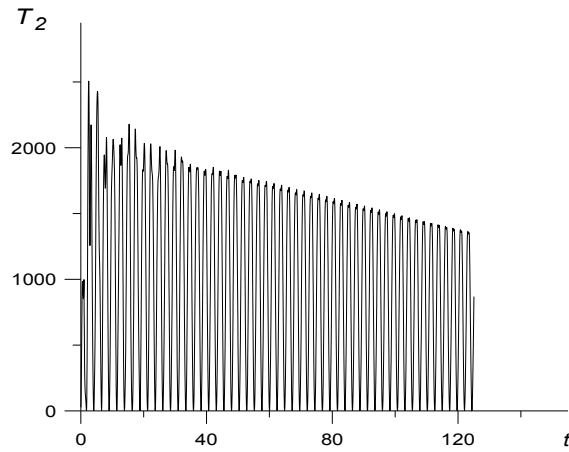


Рис. 2. Графік зміни в часі складової  $T_2$

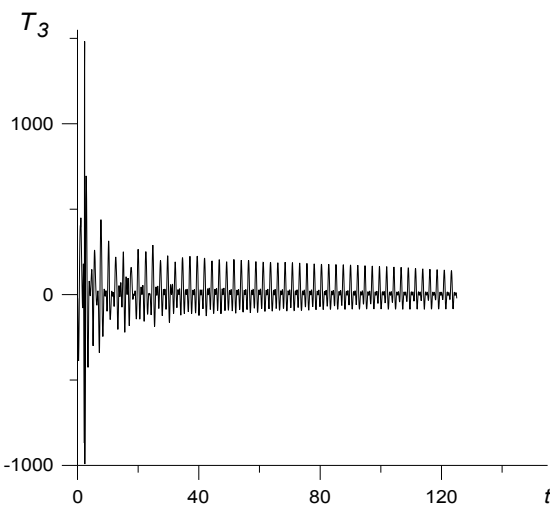


Рис. 3. Графік зміни в часі складової  $T_3$

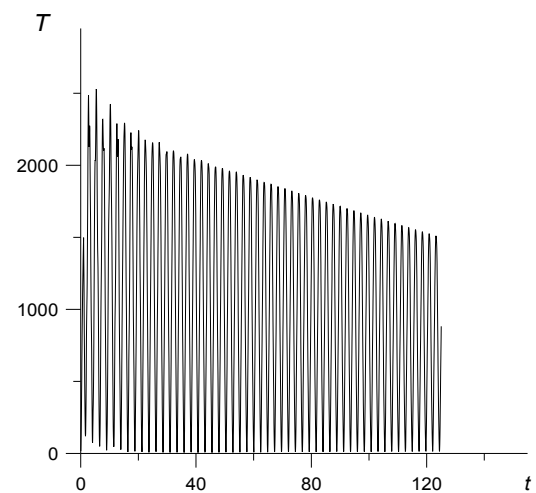


Рис. 4. Графік зміни в часі повної кінетичної енергії  $T$

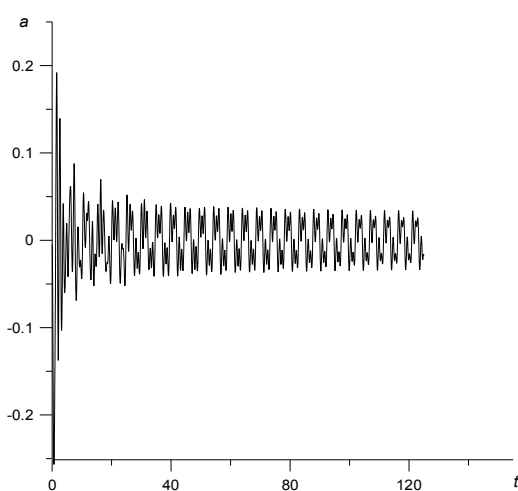


Рис. 5. Зміна в часі амплітуди першої антисиметричної форми коливань рідини

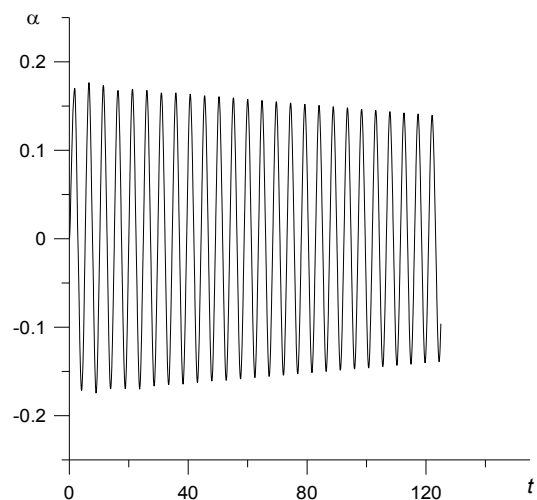


Рис. 6. Зміна в часі кута відхилення резервуару від вертикалі

дено узагальнену дисипацію згідно [1]. Аналіз коефіцієнтів подібності (критерію Рейнольдса) експериментальної та змодельованої систем дозволяє визначити значення коефіцієнту підсилення узагальненої в'язкості  $\nu = 46$ .

На Рис. 1 – 4 подано графіки зміни в часі складових кінетичної енергії системи  $T_1, T_2, T_3$  та повної кінетичної енергії системи  $T$ .

Також розглянемо зміну в часі першої антисиметричної форми коливань рідини (Рис. 5 а) та кута відхилення резервуару від вертикалі (Рис. б), що дозволить проаналізувати рух системи більш повно.

### Аналіз результатів і висновки

З графіків видно, що для дійсно має місце ефект перерозподілу енергії між хвильовим рухом та квазітвердим. Перша складова кінетичної енергії системи згасає впродовж декількох періодів коливання резервуару. Одночасно спостеріга-

ється зменшення амплітуди першої антисиметричної форми коливань в 4 рази. Разом з цим, згасає і третя складова кінетичної енергії, яка відповідає за зв'язок між хвильовою та квазітвердою кутовою формами рухів. Натомість друга складова, що описує квазітвердий рух системи, дещо знижується, але прямує до сталого ненульового значення. Відповідно кутові коливання резервуару з часом згасають дуже повільно.

Ці результати дозволяють говорити про наявність перерозподілу енергії між хвильовим рухом та квазітвердим кутовим. Зауважимо, що такий перерозподіл наявний лише при застосуванні нелінійного підходу з введеною узагальненою дисипацією. Розрахунки для випадку без дисипації не дали бажаних результатів. Одержані результати добре узгоджуються з якісними результатами лабораторних дослідів, що, зокрема, є свідченням адекватності розробленої математичної моделі [3] і сукупності механічних гіпотез, на яких вона ґрунтується.

### Список використаних джерел

1. *Микишев Г.Н.* Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов / Г.Н. Микишев – Москва: Машиностроение, 1978. – 246 с
2. *Семенович К.О.*, Перехідний рух резервуара на маятниковому підвісі при кінематичних та силових збуреннях / К.О Семенович // Сучасні математичні методи досліджень в механіці. Збірник матеріалів наукової школи-семінару, Київ, 8-11 жовтня 2012. – Київ, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, «Адверта». – 2012. – С. 32-37
3. *Лимарченко О.С.* Динамика вращающихся конструкций с жидкостью / О.С Лимарченко, Дж. Матараццо, В.В. Ясинский. – Киев: "Гнозис", 2002. – 304 с.

### References

1. MIKISHEV G.N. (1978) *Eksperimentalnye metody v dinamile kosmicheskikh apparatov*. Moskva: Mashinostroenie.
2. SEMENOVYCH K.O. (2012) *Perekhodnoe dvizhenie rezervuara na mayatnikovom podvese pri kinematicallykh i silivnykh vozmushcheniyakh* In *Suchasni matematychni metody doslidzhen v mekha-nitsi*, Scientific school–seminar 8-11 October 2012. Kyiv: Kyiv National Taras Shevchenko University, Adverta. pp. 32-37
3. LIMARCHENKO O.S., MATARAZZO G., YASINSKIY V.V. (2002) *Dinamika vrashchayushchikhsya konstruksiy s zhidkostyu*. Kiev, Gnozis.

Надійшла до редколегії 02.06.14