УДК 539.3

Острик В. І.[1], д. ф.-м. н., проф.
Улітко А. Ф.[1], д. ф.-м. н., проф., член-кор. НАН України

Ковзний контакт з довантаженням двох штампів і пружної півплощини

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е,
e-mail: ostrik_v@rambler.ru

V. I. Ostryk[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
A. F. Ulitko[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Cor. Memb. of NASU

Sliding contact with added stresses of two stamps and elastic half-plane

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e,
e-mail: ostrik_v@rambler.ru

Розглянуто контактну взаємодію двох штампів з прямолінійною горизонтальною основою і пружної півплощини, яка довантажена зосередженою нормальною силою на рівній відстані від штампів. Враховано сили тертя в області контакту за умови повного проковзування граничних точок півплощини уздовж основ штампів. Задача зведена до сингулярного інтегрального рівняння на системі двох інтервалів, розв'язок якого отримано в аналітичному вигляді. Знайдено інтервал можливих значень довантажувальної сили. Показано, що за відсутності довантаження повне проковзування основ штамів і півплощини не має місця.

Ключові слова: контакт, пружна півплощина, штампи, довантаження.

Contact interaction of two stamps having straight horizontal base with an elastic half-plane has been considered when the half-plane is loaded by the concentrated normal force at the equal distance from the stamps. Friction forces in the contact area are included at the condition of full slipping of boundary points of the half-plane along the stamps. The problem is reduced to a singular integral equation for the function of the contact pressure at the set of two intervals, the solution is obtained in analytical form. A range of possible values of added normal force of the half-plane is found, for which the full contact and frictional sliding of stamps boundaries along the half-plane take place. It is shown that in the absence of added stresses, as well with the relatively small concentrated force, the full slip of the boundaries of stamps does not take place and the problem should be considered in the complicated formulation with some adhesion contact areas taken into account.

Key Words: contact interaction, elastic half-plane, stamps, added stresses.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я. О.

Вступ

Контакт абсолютно жорсткого штампа з пружним тілом у випадку, коли до межі тіла прикладене додаткове навантаження (частіше за все, у вигляді зосередженої нормальної сили), у теорії контактних задач носить назву контакту з довантаженням. Гладкий контакт кругового штампа з пружним півпростором, довантаженим зосередженою силою, розглядався в роботі [1]. Аналогічна задача у випадку, коли основа штампа зчеплена з межею півпростору розв'язана у [2]. Контактні задачі з довантаженням для пружної півплощини без урахування сил тертя в області контакту вивчені в роботах [3-5]. Ковзний контакт, тобто контакт з урахуванням сил тертя в області контакту, за наявності довантаження раніше не розглядався. Не розглядався також контакт з довантаженням для системи штампів.

Постановка задачі

Два штампи з прямолінійною горизонтальною основою $-a \le x \le -b$ і $b \le x \le a$ ($y = 0$) з'єднані між собою і вдавлюються як єдине ціле у пружну півплощину нормальною силою P (рис. 1). Межа

© В. І. Острик, А. Ф. Улітко, 2014

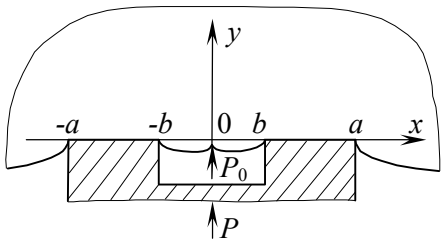

Рис. 1. Схема задачі

півплощини у точці $x=0$ довантажена нормальною силою P_0. Враховуючи сили тертя, вважаємо, що проковзування граничних точок півплощини в області контакту відбувається у напрямку до точки прикладання сили P_0, тобто вправо на лівому штампі та вліво на правому. Таке припущення знаходиться у відповідності з розв'язком аналогічної задачі гладкого контакту, у якій повздовжня деформація межі півплощини відсутня поза областю контакту і є деформацією стиску в області контакту [6].

Крайові умови задачі наступні:

$$u_y\Big|_{y=0}=0,\quad \tau_{xy}\Big|_{y=0}=\operatorname{sign}x\cdot\mu_0\,\sigma_y\Big|_{y=0}\quad (b<|x|<a),$$

$$\sigma_y\Big|_{y=0}=-P_0\delta(x),\quad \tau_{xy}\Big|_{y=0}=0\quad (|x|<b,\ |x|>a),\quad (1)$$

де μ_0 – коефіцієнт тертя, $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

Розв'язання контактної задачі

Для розв'язання контактної задачі з крайовими умовами (1) скористаємося сингулярними інтегральними співвідношеннями [6]:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}\Big|_{y=0}=-(1-2\nu)p(x)+2(1-\nu)\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{q(s)}{s-x}ds,$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x}\Big|_{y=0}=2(1-\nu)\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(s)}{s-x}ds+(1-2\nu)q(x),\quad (2)$$

в яких

$$p(x)=-\frac{1}{2G}\sigma_y\Big|_{y=0},\quad q(x)=-\frac{1}{2G}\tau_{xy}\Big|_{y=0},\quad (3)$$

де G – модуль зсуву. Функції $p(x)$ і $q(x)$ в області контакту є невідомими функціями контактного тиску та дотичних зусиль і завдяки другій крайовій умові (1) зв'язані лінійною залежністю

$$q(x)=\operatorname{sign}x\cdot\mu_0 p(x)\quad (b<|x|<a).\quad (4)$$

Поза областю контакту

$$p(x)=\frac{P_0}{2G}\delta(x),\quad q(x)=0\quad (|x|<b,\ |x|>a).\quad (5)$$

Задовольнивши за допомогою другого співвідношення (2) здиференційовану першу крайову умову (1) і врахувавши при цьому рівності (4), (5), отримаємо сингулярне інтегральне рівняння на системі інтервалів $L=\{-a<x<-b\}\cup\{b<x<a\}$:

$$\alpha(x)p(x)+\frac{1}{\pi}\int_L\frac{p(s)}{s-x}ds=\frac{P_0}{2\pi G}\frac{1}{x}\quad (x\in L),\quad (6)$$

$$\alpha(x)=\alpha\cdot\operatorname{sign}x,\quad \alpha=\frac{\mu_0(1-2\nu)}{2(1-\nu)}.$$

Розв'язок інтегрального рівняння (6) знаходимо у вигляді [7]:

$$p(x)=\frac{P_0\cos\pi\gamma}{2\pi G}\left(\frac{\sin\pi\gamma}{|x|}-\right.$$

$$\left.-\frac{\operatorname{sign}x\cdot\cos\pi\gamma}{(a^2-x^2)^{1/2-\gamma}(x^2-b^2)^{1/2+\gamma}}\frac{1}{\pi}J(x)\right)+$$

$$+\frac{(C_1x+C_2)\operatorname{sign}x}{(a^2-x^2)^{1/2-\gamma}(x^2-b^2)^{1/2+\gamma}}\quad (b<|x|<a),$$

$$\gamma=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\alpha,$$

$$J(x)=\left(\int_b^a-\int_{-a}^{-b}\right)\frac{(a^2-s^2)^{1/2-\gamma}(s^2-b^2)^{1/2+\gamma}}{s(s-x)}ds.\quad (7)$$

Для обчислення інтеграла $J(x)$ зведемо його до інтегралу по проміжку $b<s<a$ і виконаємо заміну $s^2=(a^2+b^2)/2+\tau$. Тоді

$$J(x)=\frac{1}{x}\int_{-(a^2-b^2)/2}^{(a^2-b^2)/2}\left(\frac{a^2-b^2}{2}-\tau\right)^{1/2-\gamma}\left(\frac{a^2-b^2}{2}+\tau\right)^{1/2+\gamma}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\tau+(a^2+b^2)/2-x^2}-\frac{1}{\tau+(a^2+b^2)/2}\right)d\tau.\quad (8)$$

Скориставшись значеннями інтеграла [8]:

$$\int_{-c}^{c}(c-\tau)^{1/2-\gamma}(c+\tau)^{1/2+\gamma}\frac{d\tau}{\tau-t}=\frac{\pi}{\cos\pi\gamma}\times$$

$$\times\left(\begin{cases}\sin\pi\gamma\cdot(c-t)^{1/2-\gamma}(c+t)^{1/2+\gamma}, & |t|<c\\ \operatorname{sign}t\cdot|t-c|^{1/2-\gamma}|t+c|^{1/2+\gamma}, & |t|>c\end{cases}-t-2\gamma c\right),\quad (9)$$

$$c=(a^2-b^2)/2,$$

знайдемо

$$J(x)=\frac{\pi}{\cos\pi\gamma}\frac{1}{x}\Big[\sin\pi\gamma\cdot(a^2-x^2)^{1/2-\gamma}(x^2-b^2)^{1/2+\gamma}-$$

$$-x^2+a^{1-2\gamma}b^{1+2\gamma}\Big].\quad (10)$$

Із (7) з урахуванням (10), ввівши нову довільну сталу $C_1' = 2\pi G C_1/(P_0 \cos\pi\gamma)+1$ і поклавши $C_2=0$ через парність функції $p(x)$, отримаємо

$$p(x) = \frac{P_0 \cos\pi\gamma}{2\pi G} \frac{C_1' x^2 - a^{1-2\gamma} b^{1+2\gamma}}{|x|(a^2-x^2)^{1/2-\gamma}(x^2-b^2)^{1/2+\gamma}}$$

$$(b<|x|<a). \quad (11)$$

Задовольнивши виразом (11) умову рівноваги кожного із штампів

$$\int_b^a p(x)dx = \frac{P}{4G}, \quad (12)$$

після обчислення відповідних інтегралів шляхом заміни $x^2 = (a^2+b^2)/2+\tau$ і використання значень інтегралів [8]:

$$\int_{-c}^{c} \frac{d\tau}{(c-\tau)^{1/2-\gamma}(c+\tau)^{1/2+\gamma}} = \frac{\pi}{\cos\pi\gamma},$$

$$\int_{-c}^{c} \frac{1}{(c-\tau)^{1/2+\gamma}(c+\tau)^{1/2-\gamma}} \frac{d\tau}{\tau-t} =$$

$$= -\frac{\pi \operatorname{sign} t}{\cos\pi\gamma} \frac{1}{|t-c|^{1/2+\gamma}|t+c|^{1/2-\gamma}} \quad (|t|>c) \quad (13)$$

знаходимо

$$C_1' = \frac{P}{P_0}+1. \quad (14)$$

Отже, функція контактного тиску із (11) набуває вигляду

$$p(x) = \frac{\cos\pi\gamma}{2\pi G} \frac{(P+P_0)x^2 - P_0 ab(b/a)^{2\gamma}}{|x|(a^2-x^2)^{1/2-\gamma}(x^2-b^2)^{1/2+\gamma}}$$

$$(b<|x|<a). \quad (15)$$

На краях штампів контактний тиск необмежений і має характерні для ковзного контакту особливості: з показником $1/2-\gamma$ на вході в контакт ($x=\pm a$) та $1/2+\gamma$ на виході із контакту ($x=\pm b$).

Вимагаючи невід'ємність контактного тиску на краях $x=\pm b$ штампів:

$$\left[(P+P_0)x^2 - P_0 ab(b/a)^{2\gamma}\right]\Big|_{x=\pm b} \ge 0,$$

приходимо до умови повного контакту

$$\frac{P_0}{P} \le \bar{P}_0^{\max}, \quad \bar{P}_0^{\max} = \frac{1}{(a/b)^{1-2\gamma}-1}. \quad (16)$$

З'ясуємо тепер при яких значеннях сили P_0 проковзування точок межі півплощини уздовж основ штампів відбувається у напрямку до точки прикладання сили P_0, як і передбачено постановкою задачі. Для цього достатньо вимагати, щоб горизонтальне переміщення точки $x=b$, $y=0$ півплощини було від'ємним або дорівнювало нулю. Інтегруючи від 0 до b рівність

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}\Big|_{y=0} = -(1-2\nu)\frac{P_0}{2G}\delta(x) + 2(1-\nu)\frac{2\mu_0}{\pi}\int_b^a \frac{sp(s)}{s^2-x^2}ds$$

$$(|x|<b, |x|>a),$$

яка випливає із першого співвідношення (2), за умови $u_x|_{y=0,\, x=0} = 0$ знаходимо

$$u_x|_{y=0,\, x=b} = -(1-2\nu)\frac{P_0}{4G} +$$

$$+2(1-\nu)\frac{\mu_0}{\pi}\int_b^a p(s)\ln\frac{s+b}{s-b}ds \le 0. \quad (17)$$

Звідси з урахуванням (15) отримуємо умову повного проковзування

$$\frac{P_0}{P} \ge \bar{P}_0^{\min}, \quad (18)$$

$$\bar{P}_0^{\min} = \frac{J_1}{\pi^2 \sin\pi\gamma/(2\mu_0^2\cos^2\pi\gamma) - J_1 + ab(b/a)^{2\gamma}J_{-1}},$$

$$J_m = \int_b^a \frac{s^m \ln[(s+b)/(s-b)]}{(a^2-s^2)^{1/2-\gamma}(s^2-b^2)^{1/2+\gamma}}ds \quad (m=\pm 1).$$

Граничні значення $\bar{P}_0^{\min}$, $\bar{P}_0^{\max}$ відношення сил P_0/P, обчислені за формулами (16), (18) для різних відносних відстаней b/a між штампами при $\nu=0{,}3$ і $\mu_0=0{,}25$, наведені у табл. 1. Із збільшенням коефіцієнта тертя μ_0 проміжок можливих значень P_0/P звужується і, наприклад, при $\mu_0=0{,}5$, $b/a<0{,}342$ зовсім зникає.

Таблиця 1

b/a	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$\bar{P}_0^{\min}$	0,120	0,315	0,520	0,770	1,187
$\bar{P}_0^{\max}$	0,125	0,464	1,066	2,465	9,451

Випадок відсутності довантаження

У випадку відсутності довантаження ($P_0/P = 0$) умова (17) не може бути виконаною, оскільки інтеграл, який входить в цю умову, є додатною величиною. Як у точці $x=b$, так за неперервністю функції $u_x|_{y=0}$ і у деякому околі цієї точки, зокрема, на певній частині $b \le x < b+\delta$ підобласті контакту $b \le x \le a$ проковзування відбувається у протилежному напрямку, ніж припускалося за постановкою задачі. Отже, у випадку $P_0=0$ поставлена задача є фізично беззмістовною, оскільки повного проковзування граничних

точок півплощини уздовж основ штампів насправді не відбувається. Розв'язок (15) при $P_0 = 0$ отримано Л. А. Галіним [1], однак фізичну суперечливість такого розв'язку ним не було виявлено.

Обговорюване тут протиріччя розв'язку задачі за відсутності довантаження показує, що в цьому випадку задачу потрібно розглядати в іншій, більш складній постановці. А саме: всередині основи кожного штампа виникають зони зчеплення $-c_2 \le x \le -c_1$, $c_1 \le x \le c_2$ ($b < c_1 < c_2 < a$), а поблизу країв – зони проковзування $-a \le x < -c_2$, $-c_1 < x \le -b$, $b \le x < c_1$, $c_2 < x \le a$, причому в зонах проковзування на кожному штампі рух граничних точок півплощини відбувається у напрямку до середини штампа. У такій постановці числове розв'язання задачі (при $P_0 = 0$) із застосуванням методу механічних квадратур отримано А. А. Амірджаняном і А. А. Саакяном [9]. Таку ж постановку задача має і при довантаженні, яке є недостатнім для забезпечення повного проковзування граничних точок півплощини уздовж основи штампів, тобто коли $0 < P_0 / P < \overline{P}_0^{\min}$.

Висновок

Увівши довантаження пружної півплощини на її межі зосередженою силою у середній точці між штампами, з'ясовано величину довантаження, за якої між межею півплощини та основами штампів відбувається повне проковзування. Показано, що розв'язок задачі за відсутності довантаження, отриманий Л. А. Галіним, є фізично суперечливим.

Список використаних джерел

1. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. – Москва: Гостехиздат, 1953. – 264 с.
2. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.
3. *Ковура А. Б.* Об одном обобщении задачи Садовского // Смешанные задачи механики деформируемых сред: Сб. научн. тр. – Днепропетровск, 1995. – С. 72-79.
4. *Ковура А. Б., Рыбка В. М.* Гладкий контакт штампа с упругой полуплоскостью в условиях симметричной пригрузки // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. – 1998. – Вип. 1. – Т. 2. – С. 41-44.
5. *Ковура А. Б., Рыбка В. М.* О гладком контакте штампа с упругой полуплоскостью при несимметричной пригрузке // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. – 1999. – Вип. 2. – Т. 2. – С. 74-81.
6. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1962. – 600 с.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. – Москва: Наука, 1981. – 800 с.
9. *Амирджанян А. А., Саакян А. В.* О вдавливании пары жестких штампов, соединенных упругой балкой, в упругую полуплоскость с учетом сил трения и сцепления в зоне контакта // Сучасні проблеми механіки деформівного твердого тілі, диференціальних та інтегральних рівнянь. Тези доповідей Міжнародної наукової конференції. 23-26 серпня 2013 р. – Одеса: «Астропринт», 2013. – С. 14-15.

References

1. GALIN, L. (1953) *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti.* Moskva: Gostehizdat.
2. UFLJAND, JA. (1968) *Integral'nye preobrazovanija v zadachah teorii uprugosti.* Leningrad: Nauka.
3. KOVURA, A. (1995) Ob odnom obobshenii zadachi Sadovskogo. *Smeshannye zadachi mehaniki deformiruemyh sred.* P. 72-79.
4. KOVURA, A. and RYBKA, V. (1998) Gladkii kontakt shtampa s uprugoi poluploskost'ju v uslovijah simmetrichnoi prigruzki. *Visnyk Dnipropetrovs'kogo universitetu.* Issue 1. V. 2.
5. KOVURA, A. and RYBKA, V. (1999) O gladkom kontakte shtampa s uprugoi poluploskost'ju v pri nesimmetrichnoi prigruzke. *Visnyk Dnipropetrovs'kogo universitetu.* Issue 2. V. 2.
6. DZHONSON, K. (1989) *Mehanika kontaktnogo vzaimodeistvija.* Moskva: Mir.
7. MUSHELISHVILI, N. (1962) *Singuljarnye integral'nye uravnenija.* Moskva: Nauka.
8. PRUDNIKOV, A., BRYCHKOV JU. and MARICHEV, O. (1981) *Integralyi i rjadyi.* Moskva: Nauka.
9. AMIRDZHANJAN A. A., SAAKJAN, A. V. (2013) O vdavlivanii pary zhestkih shtampov, soedinonnyh uprugoi balkoi, v upruguju poluploskoct' s uchetom sil trenija i stseplenija v zone kontakta. In *The Modern Problems of Solid Mechanics, Differential and Integral Equations.* Abstracts International Scientific Conference. August 23-26, 2013, Odessa. Odesa: Astroprint. pp. 14-15.

Надійшла до редколегії 19.08.14