УДК 519.8

Брила А.Ю.[1], к.ф.-м.н., доц.,
Антосяк П.П.[2], к.ф.-м.н.

## Досяжність нечітких цілей у заданій субординації строгого ранжування

[1]Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 14
e-mail: brila_andrij@ukr.net
[2]Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 14
e-mail: antosp@ukr.net

A.Yu. Brila[1], Ph.D.,
P.P. Antosyak[2], Ph.D.

## Attainability of fuzzy goals in a defined subordination of strict ranking

[1]Uzhgorod National University, 88000, Uzhgorod, Universitetska str., 14,
e-mail: brila_andrij@ukr.net
[2]Uzhgorod National University, 88000, Uzhgorod, Universitetska str., 14,
e-mail: antosp@ukr.net

*Розглядається задача прийняття рішень із нечітко визначеними цілями, які упорядковано за важливістю. Пропонується звести дану задачу прийняття рішення як задачу лексикографічної оптимізації до задачі однокритеріальної оптимізації, цільова функція якої є додатною лінійною згорткою часткових критеріїв.*

*Ключові слова: нечітка ціль, лексикографічна оптимізація, досяжність.*

*The decision-making problem with fuzzy goals are considered. Such problems, for example, are in the case of decision-making based on the opinions of several experts who formulate the estimation not clearly. Goals are ranking by importance, i.e. the strict subordination ranking on set of corresponding membership functions are defined. The set of allowed solutions (alternatives) is a subset of the integer numbers.*

*Based on the properties of the considered problem is proposed to reduce this decision-making problem which is the lexicographical optimization problem with to the one criterion optimization problem with objective function which is a positive linear convolution of partial criteria. This method allows to reduce the optimization problem with of the vector criterion function to a optimization problem with scalar objective function, which allows to apply known methods for its solve. The proved theorem, justifying that ability. The cases with different kinds of membership functions are considered, and for each of them the corresponding rules for calculating of the coefficients of positive linear convolution are described.*

*Key Words: fuzzy goal, lexicographic optimization, attainability.*

Статтю представив д.т.н. Волошин О.Ф.

### Вступ

У багатьох задачах прийняття рішень нечітка ціль задачі визначається як нечітка підмножина універсальної множини альтернатив (у загальному випадку також нечітка). Розв'язати цю задачу − означає досягти цілі з тим чи іншим ступенем належності та з урахуванням ступеня належності до множини альтернатив [1].

У [2] запропоновано підхід до розв'язання задачі прийняття рішень із нечіткими цілями (підхід Белмана-Заде) для випадку рівноважливих нечітких цілей та випадку, коли відомі коефіцієнти відносної важливості ступеню належності до множини альтернатив і відносної важливості цілей.

У даній статті запропоновано підхід до розв'язання задачі із нечіткими цілями для випадку, коли нечіткі цілі упорядковано за важливістю, тобто на множині відповідних функцій належностей задано субординацію строгого ранжування.

### Постановка задачі

Нехай $X$ $\left(X \subset Z\right)$ − універсальна множина альтернатив (розв'язків). Нечіткими цілями можуть бути нечіткі підмножини $X$ типу:

1) *«величина x повинна бути приблизно в межах від b до c»;*
2) *«величина x повинна бути близькою до b»;*
3) *«величина x не повинна бути більшою за b»;*
4) *«величина x не повинна бути меншою за b».*

Кожна нечітка ціль подається відповідною функцією належності ([1,3])

$$\mu_i\left(x\right),\ i=1,2,\ldots,q\text{, де } 0 \le \mu_i\left(x\right) \le 1,\ i=1,2,\ldots,q .$$

Нечіткі цілі упорядковано за важливістю, тобто на множині відповідних функцій належностей задано субординацію строгого ранжування $Rg(1,2,...,q)$. Позначимо $\kappa^L$ критерій, що є векторною згорткою критеріїв $\mu_i, i=1,2,...,q$ у субординації $Rg(1,2,...,q)$ з векторною цільовою функцією

$$F(x)=(\mu_1(x),\mu_2(x),...,\mu_q(x)).$$

Задача знаходження непокращуваного розв'язку у заданій субординації строгого ранжування є задачею лексикографічної оптимізації [4]

$$\max{}^L F(x), x\in X\ . \qquad (1)$$

У [5] запропоновано підхід до розв'язання лінійної задачі лексикографічної оптимізації, що ґрунтується на зведенні її до задачі однокритеріальної оптимізації, цільова функція якої є додатною лінійною згорткою часткових критеріїв. У даній статті розглянемо аналогічний підхід до розв'язання задачі (1) та з урахуванням властивостей розглядуваної задачі.

## Досяжність оптимальних розв'язків задачі (1)

Спочатку дослідимо випадок, коли для кожної із функцій належностей

$$\mu_i(x)\in\{0,1\},\ x\in X, i\in\{1,2,...,q\}. \qquad (2)$$

Графічно такі функції виглядають так:

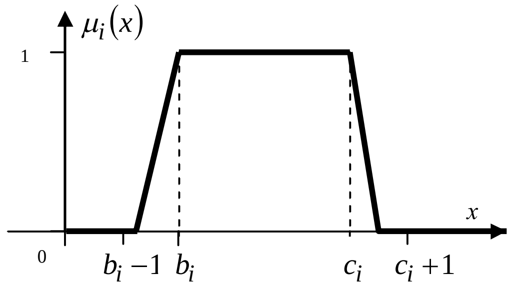


Рис. 1. *«Величина x повинна бути приблизно в межах від b до c»*

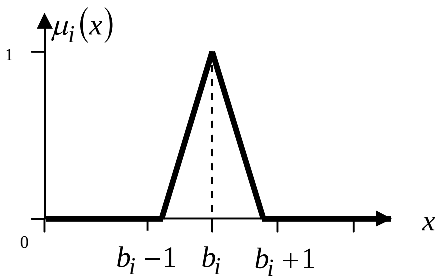


Рис. 2. *«Величина x повинна бути близькою до b»*

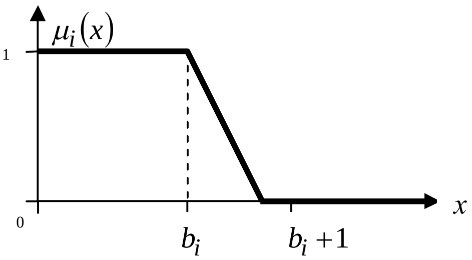


Рис. 3. *«Величина x не повинна бути більшою за b»*

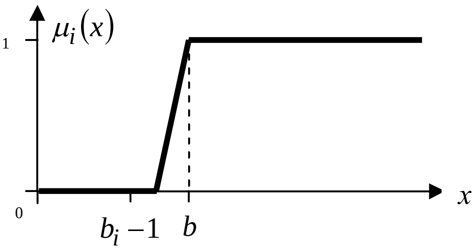


Рис. 4. *«Величина x не повинна бути меншою за b»*

Будемо вважати, що параметри $b_i, c_i$, $i=1,2,...,q$ є цілочисловими.

Позначимо $X^*$ множину оптимальних розв'язків цієї задачі.

Постає питання, чи існує такий набір додатних коефіцієнтів $\alpha_i, i-1,2,...,q$, що функціонал $L(x)=\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\mu_i(x)$ представляв би лексикографічний порядок віддачі переваги на множині $X$.

Нехай коефіцієнт $\alpha_q>0$ вибрано довільним чином, а інші додатні коефіцієнти вибрано згідно умови

$$\alpha_i>\sum_{l=i+1}^{q}\alpha_l,\ i=q-1,q-2,...,1. \qquad (3)$$

Розглянемо задачу однокритеріальної оптимізації зі скалярною цільовою функцією

$$\max L(x), x\in X \qquad (4)$$

Позначимо $\overline{X}^*$ множину оптимальних розв'язків задачі (4).

Якщо розв'язок багатокритеріальної задачі оптимізації може бути отриманий як розв'язок відповідної однокритеріальної задачі, з цільовою функцією, яка є лінійною згорткою критеріїв цієї багатокритеріальної задачі оптимізації, то вважають ([4]), що даний розв'язок є досяжним за зваженою сумою різноважливих критеріїв

**Теорема 1.** *Розв'язок задачі* (4) *є розв'язком задачі* (1).

*Доведення.* Для доведення теореми достатньо показати, що порядок віддачі переваги, що задає критерій $\kappa^L$ на множині $X$ за правилом віддачі переваги є підпорядком порядку віддачі переваги, що задає функціонал $L(x)$ на множині $X$. Тобто необхідно довести, що для всяких $x, y \in X$ з умови $F(x) >^L F(y)$ випливає відношення $L(x) > L(y)$.

Відношення $F(x) >^L F(y)$ справедливе у $q$ випадках, тому доведення проведемо за $q$ кроків

*Крок 1.* Нехай $F(x) >^L F(y)$ і $\mu_1(x) > \mu_1(y)$. Враховуючи (1) можемо сказати, що $\mu_1(x) = 1$, а $\mu_1(y) = 0$. Доведемо, що $L(x) > L(y)$. Розглянемо різницю

$$L(x) - L(y) = \alpha_1\mu_1(x) + \sum_{i=2}^{q}\alpha_i\mu_i(x) - \alpha_1\mu_1(y) - \sum_{i=2}^{q}\alpha_i\mu_i(y) =$$

$$= \alpha_1 + \sum_{i=2}^{q}\alpha_i\mu_i(x) - \sum_{i=2}^{q}\alpha_i\mu_i(y) \geq$$

$$\geq \alpha_1 - \sum_{i=2}^{q}\alpha_i\mu_i(y) \overset{(2)}{\geq} \alpha_1 - \sum_{i=2}^{q}\alpha_i \overset{(3)}{>} 0$$

Отже, $L(x) > L(y)$.

*Крок k* $(2 \leq k \leq q)$. Нехай $F(x) >^L F(y)$ і $\mu_i(x) = \mu_i(y), i = 1,2,...,k-1$, а $\mu_k(x) > \mu_k(y)$. Враховуючи (1) можемо сказати, що $\mu_k(x) = 1$, а $\mu_k(y) = 0$. Доведемо, що $L(x) > L(y)$. Розглянемо різницю

$$L(x) - L(y) = \sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\mu_i(x) + \alpha_k\mu_k(x) + \sum_{i=k+1}^{q}\alpha_i\mu_i(x) -$$

$$- \sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\mu_i(x) - \alpha_k\mu_k(y) - \sum_{i=k+1}^{q}\alpha_i\mu_i(y) =$$

$$= \alpha_k + \sum_{i=k+1}^{q}\alpha_i\mu_i(x) - \sum_{i=k+1}^{q}\alpha_i\mu_i(y) \geq$$

$$\geq \alpha_k - \sum_{i=k+1}^{q}\alpha_i\mu_i(y) \overset{(2)}{\geq} \alpha_1 - \sum_{i=2}^{q}\alpha_i \overset{(3)}{>} 0$$

Отже, $L(x) > L(y)$.

Оскільки ми довели, що порядок віддачі переваги, що задає критерій $\kappa^L$ на множині $X$ за правилом віддачі переваги є підпорядком порядку віддачі переваги, що задає функціонал $L(x)$ на множині $X$, то згідно з теоремою 1.16 у [4] одержимо $\overline{X}^* \subset X^*$. Теорема доведена.

Отже, ґрунтуючись на даній теоремі та правилах вибору додатних коефіцієнтів (3) ми можемо знаходити досяжні оптимальні розв'язки задачі (1) з векторною цільовою функцією шляхом розв'язання задачі (4) зі скалярною цільовою функцією.

Розглянемо тепер задачу лексикографічної оптимізації з нечіткими цільовими функціями (1), відмовившись від умови (2). Графічне представлення цільових функцій набуде вигляду:

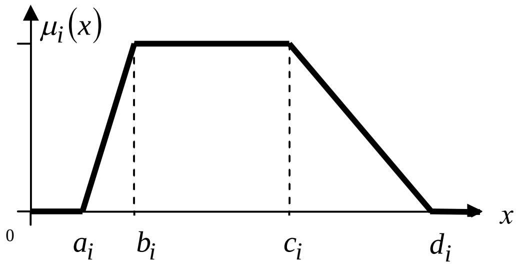


Рис. 5. *«Величина x повинна бути приблизно в межах від b до c»*

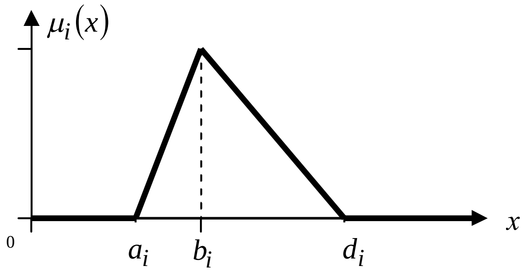


Рис. 6. *«Величина x повинна бути близькою до b»*

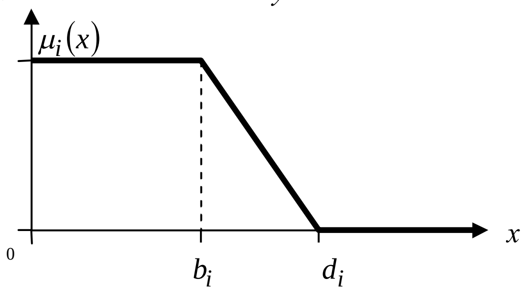


Рис. 7. *«Величина x не повинна бути більшою за b»*

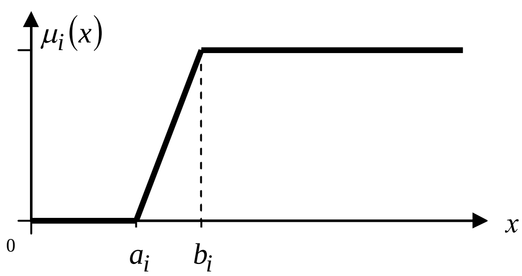


Рис. 8. *«Величина x не повинна бути меншою за b»*

Будемо вважати, що параметри $a_i, b_i, c_i, d_i$, $i = 1,2,...,q$ є цілочисловими. Позначимо $X^{**}$

множину оптимальних розв'язків такої лексикографічної задачі оптимізації з довільними функціями.

Дослідимо проблему відшукання досяжних оптимальних розв'язків. Нехай $\beta_q > 0$ довільне додатне число, а інші поступово визначено з

$$\beta_i > \frac{1}{\alpha_i} \sum_{l=i+1}^{q} \beta_l, \; i = q-1, q-2, \ldots, 1, \qquad (5)$$

де

$$\alpha_i = \min_{\mu_i(x) \neq \mu_i(y)} |\, \mu_i(x) - \mu_i(y) \,|, \; i = 1,2,\ldots,q. \qquad (6)$$

З використанням коефіцієнтів $\beta_i$, знайдених згідно з (5), побудуємо функціонал

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{q} \beta_i \mu_i(x)$$

і задачу однокритеріальної оптимізації зі скалярною цільовою функцією

$$\max Z(x), x \in X. \qquad (7)$$

Позначимо $\overline{X}^{**}$ множину оптимальних розв'язків цієї задачі.

**Теорема 2.** *Якщо* $x^* \in \overline{X}^{**}$, *то* $x^* \in X^{**}$.

*Доведення.* Для доведення цієї теореми, як і при доведенні теореми 1, достатньо показати, що порядок віддачі переваги, що задає критерій $\kappa^L$ на множині $X$ за правилом віддачі переваги є підпорядком порядку віддачі переваги, що задає функціонал $Z(x)$ на множині $X$. Тобто необхідно довести, що для всяких $x, y \in X$ з умови $F(x) >^L F(y)$ випливає відношення $Z(x) > Z(y)$.

Відношення $F(x) >^L F(y)$ справедливе у $q$ випадках, тому доведення проведемо за $q$ кроків

*Крок 1.* Нехай $F(x) >^L F(y)$ і $\mu_1(x) > \mu_1(y)$. Доведемо, що $Z(x) > Z(y)$. Розглянемо різницю

$$Z(x) - Z(y) = \beta_1 \mu_1(x) + \sum_{i=2}^{q} \beta_i \mu_i(x) - \beta_1 \mu_1(y) - \sum_{i=2}^{q} \beta_i \mu_i(y) =$$

$$= \beta_1(\mu_1(x) - \mu_1(y)) + \sum_{i=2}^{q} \beta_i \mu_i(x) - \sum_{i=2}^{q} \beta_i \mu_i(y) \geq$$

$$\geq \beta_1(\mu_1(x) - \mu_1(y)) - \sum_{i=2}^{q} \beta_i \mu_i(y) \geq \beta_1 \alpha_1 - \sum_{i=2}^{q} \beta_i \overset{(5)}{>} 0.$$

Отже, $Z(x) > Z(y)$.

*Крок* $k$ $(2 \leq k \leq q)$. Нехай $F(x) >^L F(y)$ і $\mu_i(x) = \mu_i(y), i = 1,2,\ldots,k-1$, а $\mu_k(x) > \mu_k(y)$. Доведемо, що $Z(x) > Z(y)$. Розглянемо різницю

$$Z(x) - Z(y) = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \mu_i(x) + \beta_k \mu_k(x) + \sum_{i=k+1}^{q} \beta_i \mu_i(x) -$$

$$- \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \mu_i(x) - \beta_k \mu_k(y) - \sum_{i=k+1}^{q} \beta_i \mu_i(y) =$$

$$= \beta_k(\mu_k(x) - \mu_k(y)) + \sum_{i=k+1}^{q} \beta_i \mu_i(x) - \sum_{i=k+1}^{q} \beta_i \mu_i(y) \geq$$

$$\beta_k(\mu_k(x) - \mu_k(y)) - \sum_{i=k+1}^{q} \beta_i \mu_i(y) \geq$$

$$\geq \beta_1 \alpha_k - \sum_{i=2}^{q} \beta_i > 0.$$

Отже, $Z(x) > Z(y)$.

Оскільки ми довели, що порядок віддачі переваги, що задає критерій $\kappa^L$ на множині $X$ за правилом віддачі переваги є підпорядком порядку віддачі переваги, що задає функціонал $Z(x)$ на множині $X$, то згідно з теоремою 1.16 у [4] одержимо $\overline{X}^{**} \subset X^{**}$. Теорема доведена.

<u>**Зауваження 1**</u>. Зауважимо, що коефіцієнти $\alpha_i$ для кожної із функцій $\mu_i(x)$ можна знайти наступним чином:

1) *«величина x повинна бути приблизно в межах від b до c»*

$$\alpha_i = \min\left\{\frac{1}{b_i - a_i}, \frac{1}{d_i - c_i}\right\};$$

2) *«величина x повинна бути близькою до b»*

$$\alpha_i = \min\left\{\frac{1}{b_i - a_i}, \frac{1}{d_i - b_i}\right\};$$

3) *«величина x не повинна бути більшою за b»*

$$\alpha_i = \frac{1}{d_i - b_i};$$

4) *«величина x не повинна бути меншою за*

$$\alpha_i = \frac{1}{b_i - a_i}.$$

**Приклад**

Нехай потрібно прийняти рішення відносно значення деякої величини на основі наступних суджень експертів:

<u>*експерт 1*</u>: "*значення величини не повинно перевищувати 1*";

<u>*експерт 2*</u>: "*значення величини повинно коливається десь у межах від 2 до 4*";

<u>експерт 3</u>: "*значення величини повинно бути біля* 5";

<u>експерт 4</u>: "*значення величини повинно бути біля* 6";

І нехай ці нечіткі експертні оцінки формалізовано функціями належності у відповідності до наступного рисунка:

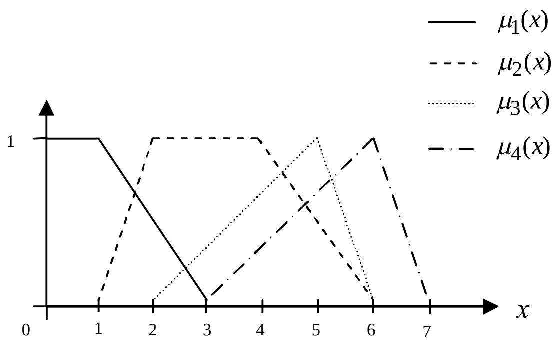


Рис. 9. *Формалізовані судження експертів*

Визначимо коефіцієнти $\beta_i,\ i=1,2,3,4$ та з урахуванням зауваження 1. Маємо:

$$\alpha_3=\min\left\{\frac{1}{6-5},\frac{1}{5-2}\right\}=\frac{1}{3},$$

$$\alpha_2=\min\left\{\frac{1}{2-1},\frac{1}{6-4}\right\}=\frac{1}{2},$$

$$\alpha_1=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2},$$

$$\beta_4=1,$$

$$\beta_3=4>\frac{1}{\alpha_3}\beta_4=3,$$

$$\beta_2=11>\frac{1}{\alpha_2}(\beta_4+\beta_3)=10,$$

$$\beta_1=33>\frac{1}{\alpha_1}(\beta_4+\beta_3+\beta_1)=32.$$

У відповідності до (7) маємо:

$$\max\{33\mu_1(x)+11\mu_2(x)+4\mu_3(x)+\mu_4(x)\},$$
$$x\in X=[1,7].$$

Як розв'язок отримаємо $\overline{X}^{**}=\{2\}$.

**Висновки**

Запропонований підхід до розв'язання задачі прийняття рішень із нечітко визначеними цілями, які строго упорядковано за важливістю зводиться до лексикографічної задачі оптимізації. Розглянуто та обґрунтовано можливість звести задачу з векторною цільовою функцією до задачі однокритеріальної оптимізації зі скалярною цільовою функцією, що в свою чергу дає можливість застосувати для її розв'язання відомі методи.

**Список використаних джерел**

1. *Волошин О.Ф., Мащенко С.О.* Моделі та методи прийняття рішень. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. – 336 с.
2. *Беллман Р.* Принятие решений в расплывчатых условиях / *Беллман Р., Заде Л.* — В кн.: Вопросы анализа и процедуры принятия решений. — М.: Мир — 1976. — С. 172-215.
3. *Рыжов А. П.* Элементы теории нечетких множеств и измерения нечет-кости / А. П. Рыжов. — М.: Диалог-МГУ, 1998. — 116 с.
4. *Червак Ю.Ю.* Оптимізація. Непокращуваний вибір / Ю.Ю. Червак – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2002. – 312 с.
5. *Подиновский В.В.* Оптимизация по последовательно применяемым критериям / В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов. – М.: Сов. Радио, 1975. –115с.

**References**

1. VOLOSHYN O.F., MASHENKO S.O. (2010) *Modeli ta metody pryjnyatya rishen.* Kyiv: Vydavnycho-polihrafichnyj centr Kyyivskyj universytet.
2. BELLMAN R., ZADEH L. (1976). *Prinyatie resheniy v rsplyvschatych usloviyach. V knige: Voprosy analiza i procedury prinyatiya reshenij*. Moskva: Mir. pp. 172-215.
3. RYZOV A.P. (1998) *Elementy teorii nechetkich mnozestv i izmereniya nechetkosti*. Moskva: Dialog-MGU.
4. CHERVAK Yu.Yu. (2002) *Optymizaciya. Nepokraschuvanyj vybir*. Uzhgorod: Uzhgorodskyj nacionalnyj universytet.
5. PODINOVSKIJ V.V., GAVRILOV V.M. (1975) *Optimizacija po posledovatelno primenjayemym kriteriyam*. Moskva: Sovetskoe radio.

Надійшла до редколегії 12.05.2014